

FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión March 3, 2009

Contents

V	RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA	3
V.1	Introducción	3
V.2	Paradigma previo a la relatividad especial	5
V.2.1	El Principio de Relatividad de Galileo	6
V.2.2	Las Ecuaciones de Maxwell	9
V.3	Diagramas Espacio–Tiempo	11
V.4	Postulados de la Relatividad Especial	15
V.5	Simultaneidad	23
V.5.1	Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita)	24
V.5.2	Simultaneidad Relativa (La velocidad de la luz es finita)	25
V.6	Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.	31
V.6.1	Transformaciones de Lorentz	31
V.7	Geometría de las Transformaciones de Lorentz	38
V.7.1	El Efecto Doppler Relativista	38
V.7.2	Dilatación del Tiempo	43
V.7.3	La paradoja de los gemelos: el tiempo transcurrido depende de la trayectoria	46
V.7.4	La contracción del largo de una barra	49
V.7.5	El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein	51
V.7.6	Las transformaciones de Lorentz.	55

V.8	El retorno de lo absoluto, los invariantes.	58
V.9	Composición de velocidades	60
V.9.1	Velocidades paralelas.	60
V.10	Ejercicios Resueltos	66
V.11	Apéndice A: Las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS	73
V.12	Apéndice B: ¿Qué es el tiempo?	74
V.12.1	La medición del tiempo	74
V.13	Apéndice C: El Sistema de Posicionamiento Global (GPS)	77
V.14	Ejercicios Propuestos	83

Chapter V

RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA

V.1 Introducción

La relatividad especial, de acuerdo a Sir E. Whittaker [1], fue introducida por H. Poincaré, H. A. Lorentz, G. F. FitzGerald, y puesta en su forma final por A. Einstein en 1905.

Las ecuaciones de la relatividad especial, ciertamente fueron introducidas por Lorentz, pero Einstein las reinventó y les dió una interpretación física genial y simple con la cual se resolvió uno de los dilemas más importantes de esa época. La interpretación propuesta por Lorentz, no encontró respaldo experimental.

En breve, el dilema aludido en el párrafo anterior es la existencia o ausencia de un sistema de referencia en reposo absoluto, que se denominaba el éter. Las teorías ya establecidas en aquel tiempo era el electromagnetismo, descrito a través de la ecuaciones de Maxwell y la mecánica de Newton. Previo al establecimiento de la relatividad especial, las ecuaciones de Maxwell requerían la existencia del éter, no así la dinámica de Newton.

En el libro citado, Whittaker describe el ingenio y los esfuerzos desplegados para determinar el movimiento de la tierra con respecto al éter, para así establecer el movimiento absoluto. Mencionaremos sólo un ejemplo, la idea de Fitzgerald (pág. 29, [1]) que consistía en distinguir el desplazamiento de la tierra con respecto al éter a través de la fuerza entre las dos placas paralelas de un condensador. El resultado de este experimento fue nulo, como ocurrió con todos los otros experimentos diseñados para determinar el movimiento absoluto.

Ante el reiterado fracaso de estos intentos, Poincaré, uno de los físicos más destacados de esta

época, afirmó en 1899: *Considero como muy probable que los fenómenos ópticos dependen sólo de los movimientos relativos entre los cuerpos materiales...* Al año siguiente proclamaba su creencia en una nueva ley, semejante a la segunda ley de la termodinámica, que consideraría la imposibilidad de medir la velocidad de la tierra con respecto al éter. Finalmente, de acuerdo a Whittaker, ya en 1904 Poincaré sostenía que las leyes físicas debían ser las mismas para todos los observadores en movimiento relativo uniforme de traslación. Concluía que debería existir una nueva dinámica en la cual la velocidad de la luz era un límite superior.

La idea del éter había perdido su magia.

Ejercicio Propuesto

a.- Investigue el uso que se le ha dado al término *éter* o *quinta esencia* desde los tiempos de Aristóteles hasta la teoría de supercuerdas.

b.- Con respecto al experimento propuesto por Fitzgerald -mencionado en el párrafo anterior- y la idea de un sistema de referencia en reposo absoluto (el éter): ¿Podría establecer *cualitativamente* los efectos (si existen) de la rotación y traslación de la tierra y la existencia del campo magnético?

La genialidad de Einstein consistió en abandonar la idea de un espacio y un tiempo absoluto, independientes y establecer una unidad espacio-tiempo, construido por cada observador inercial en base a un cierto protocolo claramente establecido y válido en cada sistema inercial. El espacio-tiempo constituye una especie de andamiaje que acompaña a cada observador inercial y es diferente para cada observador inercial en movimiento relativo. Las mediciones de longitud de una vara o la duración de un cierto fenómeno son propias y únicas del observador inercial que realiza las mediciones y para las cuales utiliza su propio andamiaje.

Einstein estableció como un principio que la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia inercial. La velocidad de la luz es así una constante universal.

Este principio genera dos consecuencias inmediatas. La simultaneidad de dos eventos¹ es relativa: es válida únicamente para el observador inercial que así lo estableció. Esto marca una primera diferencia con las teorías previas y el sentido común. No es fácil aceptar que dos eventos que ocurren simultáneamente, por ejemplo, para una persona en la estación del metro, no lo sean para un pasajero que viaja en el metro.

¹Un evento es un punto en espacio-tiempo, por ejemplo: el golpe en una mesa, el encendido de una luz, tocarse dos dedos...,etc.

Otra consecuencia de este postulado es que relojes idénticos instalados en dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo, no pueden ser sincronizados. Uno de ellos siempre se adelanta con respecto al otro.

Una breve referencia a la vida de Einstein aparece en el documento escrito por J. A. Wheeler, quien conoció y trabajó con Einstein en sus años en Princeton².

V.2 Paradigma previo a la relatividad especial

La comprobación experimental de esta teoría es compleja debido a la magnitud de la velocidad de la luz, ≈ 300.000 km/s. Por esta razón, los *experimentos pensados* formaron la base de los primeros ejemplos utilizados para ilustrar las consecuencias de la relatividad especial. El parámetro adimensional que caracteriza la relatividad especial es v/c .

Esta teoría se caracteriza por ser muy cuidadosa en explicitar los protocolos de las mediciones, particularmente el largo y los tiempos.

Si la velocidad de la luz se postula como una constante universal, cualquier medición debe proceder utilizándola. Por ejemplo, el largo de una barra se puede medir enviando un pulso de luz desde un extremo de forma que se refleje en el otro extremo y vuelva al punto de partida. El tiempo empleado, de acuerdo a lo que marca un reloj ubicado en dicho extremo, multiplicado por la velocidad de la luz nos da el largo de la barra: $L = \Delta t c/2$. Este protocolo es válido para cualquier sistema de referencia inercial.

Incluimos una sección al final de este capítulo con los métodos utilizados en la medición del tiempo a lo largo de la historia. Aquí emerge el GPS (Global Positioning System), como la única

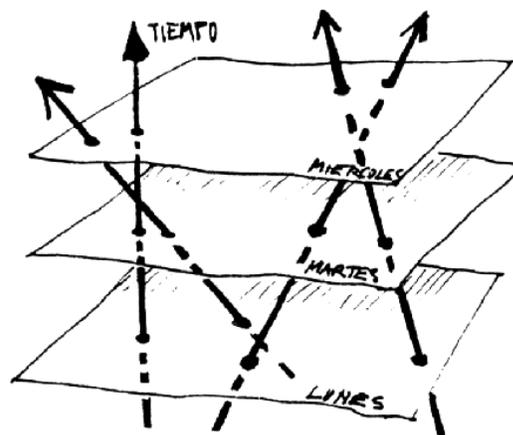


Figure V.1: Las líneas representan la trayectoria de tres observadores inerciales. El tiempo se indica con un rayo vertical y es el mismo para todos ellos (líneas inclinadas). Las coordenadas asignadas a un punto P , fijo a uno de los sistemas, cambian en el tiempo de acuerdo a la medición realizada por otro de los observadores. esto se aprecia en el punto que perfora la línea del observador al plano $t = \text{constante}$.

²www.escuela.de.verano/fisica/index.html, ver relatividad especial

instancia de la vida diaria donde es imprescindible utilizar los resultados de la relatividad especial y también la relatividad general para determinar las coordenadas de un objeto con la precisión establecida inicialmente.

La validez, dentro de la física clásica, de las predicciones de la relatividad especial han sido verificadas en todos los experimentos realizados hasta el presente.

V.2.1 El Principio de Relatividad de Galileo

La mecánica newtoniana se construye suponiendo la existencia de un tiempo absoluto, totalmente independiente del movimiento de la partícula.

Consideremos varios observadores viajando en el espacio vacío con una cierta velocidad relativa v entre ellos (ver Fig.V.1). No existen estrellas o galaxias a su alrededor que sirvan como una referencia. Como ninguno de estos observadores experimenta fuerza alguna, cada uno de ellos considera que se encuentra en reposo absoluto y le designa a cada punto del espacio unas coordenadas, por ejemplo $[x, y, z]$. Para ello utilizan una barra de largo L . Esta operación la puede realizar cada uno de los observadores imaginables que se desplacen con una velocidad constante con respecto a nuestra referencia inicial.

Hemos supuesto, en la compañía de Newton, que el largo de la barra L es el mismo para todos los observadores, o, lo que es lo mismo, que el largo de la barra no depende de su movimiento. Esta suposición unida a la anterior, que el tiempo es absoluto, podemos resumirla diciendo que el espacio en la teoría de Newton es absoluto: ni el largo de una barra ni el lapso de tiempo depende del estado de movimiento si es uniforme.

Podemos enunciar ahora la primera ley de Newton: considere un sistema de referencia dado, si un cuerpo, sobre el cual no actúan fuerzas externas, permanece en reposo o en movimiento uniforme con respecto a este sistema de referencia, éste es un sistema de referencia inercial.

Dado otro sistema de referencia que se desplaza uniformemente relativo al anterior, éste también constituye un sistema inercial, puesto que la partícula se desplaza uniformemente en este nuevo sistema de referencia.

Al extender este razonamiento a los infinitos movimientos uniformes posibles, se desprende que existen infinitos sistemas inerciales.

Hay todavía un hecho más relevante y fundamental que se vincula directamente con los sistemas inerciales. En todos ellos es posible describir el movimiento de una partícula utilizando las mismas leyes. Veamos.

La segunda ley de Newton establece la ecuación que rige el movimiento de una partícula puntual:

$\vec{F} = m a$. Esta expresión es la misma y es válida en todos los sistemas inerciales.

Otra propiedad de los sistemas inerciales es que se pueden identificar localmente. Basta que haga un experimento en mi sistema de referencia y puedo saber si está acelerando o se mueve a velocidad constante. No se requiere observar otros sistemas de referencia para averiguarlo. Por ejemplo, basta llevar un péndulo (una masa unida a un hilo) para saber si el carro del metro comienza a moverse o no. Apenas acelera el tren, el péndulo se desvía de la vertical, sin que exista una fuerza aparente. El sistema se acelera y ya no es inercial, una masa en reposo no permanece en reposo.

Cómo relacionar dos sistemas de referencia inerciales

Considere, por ejemplo, la caída libre de un objeto en dos sistemas inerciales: un observador en tierra y otro en un carro en movimiento, como aparece en la Figura V.3. Cada uno de ellos observa que al soltar una pelota que llevan consigo, ésta cae verticalmente con aceleración constante porque existe una fuerza que las atrae hacia el piso, **pero** en la dirección horizontal, en la cual no existen fuerzas, permanece siempre a la misma distancia del observador que la lanzó. De esta forma, cada uno de estos observadores opina que él permanece en reposo absoluto y es el otro observador quien está en movimiento. Prueba de ello es la parábola que describe la otra pelota en su sistema de referencia. Este razonamiento es simétrico: cada uno de ellos observa lo mismo acerca del movimiento en el otro.

Esta forma de simetría se repetirá, pero en forma menos intuitiva en la relatividad especial.

El observador en la estación no se complica con la trayectoria seguida por la pelota en que cae en el carro del Metro. Es equivalente a un movimiento horizontal uniforme, con la velocidad del carro y una caída libre en la dirección vertical.

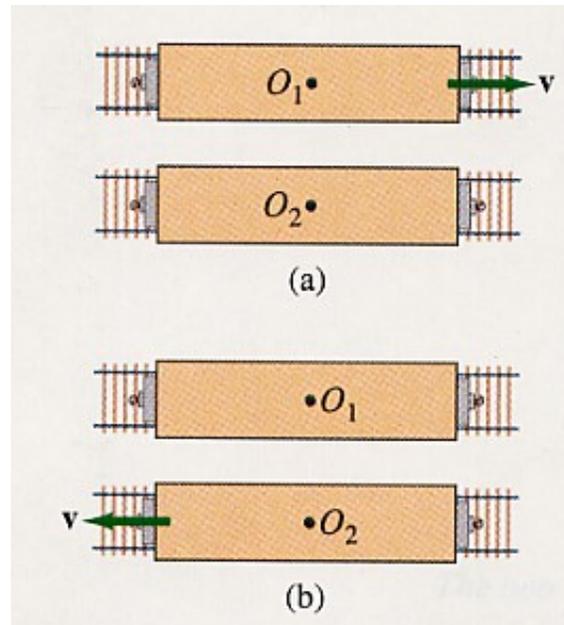
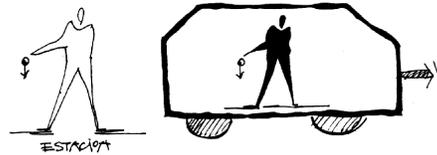


Figure V.2: En la Figura aparecen dos trenes vistos desde arriba y que viajan en sentido opuesto con velocidad relativa V . En la parte a) O_2 se considera en reposo absoluto y observa cómo O_1 se aleja con rapidez V . En la parte b) ocurre lo inverso. Ninguno de estos dos observadores puede decidir, aún realizando un experimento físico, cuál de ellos se encuentra en reposo absoluto y cuál en movimiento.

Una vez definido en un sistema de referencia, necesitamos un protocolo para relacionar las trayectorias desde un sistema inercial a otro, de forma que las leyes de Newton permanezcan iguales en ambos sistemas de referencia. Éste es lo que denominamos *Principio de Relatividad de Galileo*.



$$\text{Transformación de Galileo} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + v_o \cdot t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{array} \right. \quad (\text{V.1})$$

Figure V.3: Un carro del metro con velocidad constante y un observador en la estación del metro, constituyen dos observadores inerciales válidos. En ambos la caída de una pelota ocurre de la misma forma: vertical.

Ejemplo

Ilustraremos el uso del Principio de Relatividad de Galileo para resolver un ejemplo simple de choques (Ver [4]. pág.11). Será una demostración sin palabras.

		Antes	Después
Dato Conocido	Estación		
Pregunta	Estación		
Cambio Sistema de Referencia	Tren $\xrightarrow{5 \text{ cm/s}}$		
Respuesta	$\xleftarrow{5 \text{ cm/s}}$		

Figure V.4: Si se conoce el resultado de un choque específico, se puede obtener el resultado de otro similar mediante cambios de sistemas de referencias inerciales usando las transformaciones de Galileo.

V.2.2 Las Ecuaciones de Maxwell

A fines del siglo decinueve existían dos teorías que habían demostrado, a través de numerosos experimentos, constituir un buen modelo de la naturaleza: la teoría de J. C. Maxwell de la electricidad y magnetismo de los cuerpos y la mecánica de Newton.

James Clerk Maxwell (1831 – 1879) unificó las leyes de la electricidad y el magnetismo. Estableció un conjunto de ecuaciones que llevan su nombre y que determinan el comportamiento de cargas en reposo y en movimiento en el espacio vacío. La propagación de estos campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} , obedece a una ecuación de onda y ocurre, en vacío, con la velocidad de la luz.

Esta identificación de la luz como una onda electromagnética, fue propuesta por primera vez por Maxwell. Es parte de su tremendo aporte a la física. Su verificación experimental ocurrió en 1888, cuando Maxwell ya había muerto. Heinrich Hertz se comunicó a través del canal de Beagle mediante ondas de radio, usando las ecuaciones establecidas por J. C. Maxwell.

Es curioso, en principio, que la velocidad de propagación de estos campos, resultó ser el inverso de la raíz cuadrada del producto de dos constantes insertadas previamente e independientes: ϵ_o y μ_o . Éstas provenían del ajuste de unidades que era necesario introducir debido a que la definición para la carga y la fuerza fueron establecidas en forma independiente. Estas últimas unidades, son determinadas experimentalmente midiendo la atracción entre dos cargas (ϵ_o) y la fuerza entre dos conductores con corrientes en sentido opuesto (μ_o)[11].

Incluimos las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS en el Apéndice A, como información.

Las transformaciones de Galileo y las ecuaciones de Maxwell

Como se puede verificar, las ecuaciones de Newton toman la misma forma en todos los sistemas inerciales bajo una transformación de Galileo de coordenadas. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell cambian de forma al aplicar esta misma transformación (V.1). Si este resultado se verifica en la naturaleza, es posible identificar un sistema de referencia en reposo absoluto. Sería aquél donde las ecuaciones de Maxwell tomaran la forma más simple. Se postuló que este medio en reposo absoluto existía y se le denominó el éter. Las ondas electromagnéticas se propagarían en este medio.

La influencia histórica de las ondas mecánicas en cuerdas, ondas de sonido en gases y otros ejemplos, hacía pensar que se requería de un medio de transmisión para sostener las ondas electromagnéticas.

Por otra parte, de acuerdo a la composición de velocidades introducida por Galileo, si la velocidad con que viaja un destello de luz en nuestra sala es c , la velocidad de este mismo destello, medida por un observador que se desplaza con una rapidez v con respecto a la sala debería ser:

$c' = c \pm v$, dependiendo del sentido de la rapidez del observador.

Aquí estamos considerando que la luz se comporta como una partícula material propagándose y medida con respecto a distintos sistemas de referencia. Sin embargo, esto debería ser más complejo, puesto que al cambiar de forma las ecuaciones de Maxwell al ir de un sistema a otro, parece muy extraño que su velocidad de propagación cambie en forma lineal y, más aún, de la forma indicada.

Asignamos la velocidad c al caso de una onda electromagnética en el sistema en reposo absoluto: al *éter*.

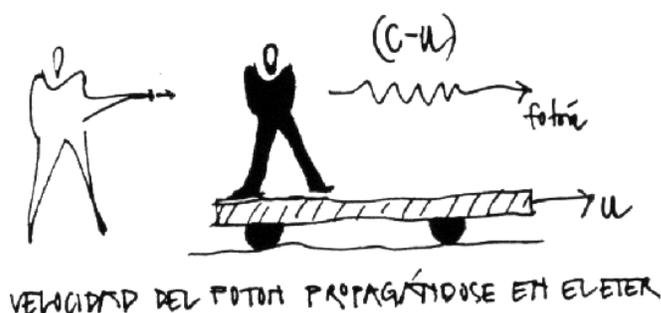


Figure V.5: Con la composición de velocidades establecida por Galileo, un destello (o fotón) lanzado por un observador en reposo en el **éter** tiene una velocidad igual a c . Sin embargo, un observador ubicado sobre la plataforma en movimiento, mide una velocidad $(c - u)$. Aquí hemos considerado, sin ninguna justificación, el fotón como una partícula viajera.

Nota: En este libro llamaremos indistintamente un destello de luz como un fotón y viceversa. Una imagen intuitiva y útil en esta etapa, es la trayectoria de un misil en el espacio, un paquete de energía viajando a la velocidad de la luz. Más tarde, en mecánica cuántica veremos que un fotón es más misterioso de lo que parece.

Un experimento decisivo

Hubo varios experimentos que fracasaron intentando verificar esta composición de velocidades. El más notable fue el realizado por Michelson-Morley, quienes utilizaron un dispositivo óptico inventado por ellos mismos, el interferómetro, con este objeto. Intentaron detectar alguna diferencia en el valor de la velocidad de la luz utilizando la velocidad orbital de la Tierra. El resultado fue negativo: no se encontró evidencia alguna, *dentro de la precisión del instrumento*, de una superposición

de la velocidad orbital y la la velocidad de la luz. Hasta donde se podía asegurar, la velocidad de la luz mantenía su valor independiente de la velocidad relativa del sistema de referencia.

Si la luz no discrimina entre dos sistemas inerciales en movimiento relativo, tampoco las ecuaciones de Maxwell, que son el origen de estas ondas, deben discriminar entre dos sistemas de referencia inerciales.

Surge así el problema de encontrar las transformaciones de coordenadas que dejen las ecuaciones de Maxwell invariantes de forma al ir de un sistema inercial a otro.

Este problema fue resuelto por H.A. Lorentz quien inventó las transformaciones buscadas. Estas son las mismas transformaciones que A. Einstein re-descubrió más tarde.

¿Por qué Lorentz no es, entonces, el inventor de la relatividad? Pese a la importancia de su aporte al establecimiento de la relatividad especial, no acertó con la interpretación correcta de sus ecuaciones. De acuerdo a Lorentz, una barra en movimiento efectivamente se acortaba con respecto a una en reposo. Se realizaron varios experimentos, muy ingeniosos, sin resultado. Las barras **no** mostraban ningún acortamiento.

Se necesitaban ideas más revolucionarias. Einstein desechó la existencia del éter y estableció como principio físico que la velocidad de la luz en el vacío era una constante universal, la misma en todos los sistemas inerciales. Todas las inconsistencias previas se disiparon, pero fue necesario cambiar radicalmente las suposiciones incrustadas en la mecánica de Newton con respecto al tiempo absoluto y a las mediciones en distintos sistemas de referencia.

Es paradójico que la teoría que inicialmente parecía más sólida, con más aciertos, como el movimiento de los planetas , el de la Luna...la mecánica, hubo de ser modificada. En su expresión no relativista sigue siendo una excelente aproximación al mundo que nos rodea.

Por otra parte, Maxwell había inventado una teoría relativista antes de siquiera conocerse la relatividad especial.

V.3 Diagramas Espacio–Tiempo

Un punto en el diagrama espacio-tiempo representa un hecho concreto, como el instante en que un objeto puntual al caer toca el suelo, o un martillo golpea a un clavo, o una luz se enciende... etc. Esto se denomina un *evento*.

Matemáticamente, un evento está definido por un conjunto ordenado de cuatro números que

corresponden (en nuestra convención) al tiempo, el primero, y a las tres coordenadas espaciales, los consecutivos. Como todas las coordenadas jugarán el mismo papel en esta teoría, deben tener la misma dimensión, de modo que conviene usar ct en lugar de t .

Evento: Es un tetrada ordenada de números que describen un hecho puntual. Constituye la forma de identificar este evento en el espacio-tiempo.

Línea de universo: La trayectoria de un punto en el espacio-tiempo.

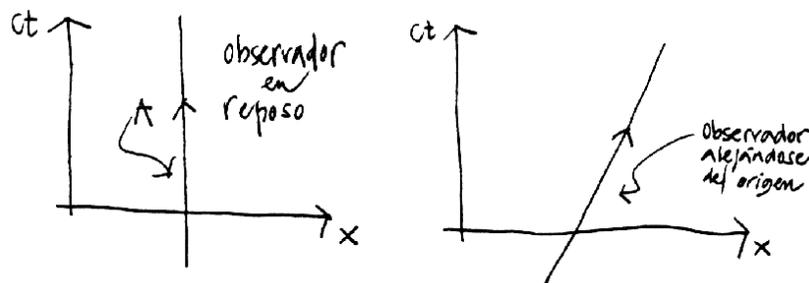


Figure V.6: La línea A, a la izquierda de esta Figura, representa la trayectoria en el espacio-tiempo de un observador en reposo. En el diagrama de la derecha, se dibuja un observador (puntual) que se aleja del origen con una velocidad V . La recta inclinada representa la línea de universo de este observador.

Una barra no constituye un evento puesto que no es posible definirla mediante un conjunto de cuatro números, debemos incluir la longitud y la orientación. Y en relatividad especial, también especificar el sistema de referencia asociado a estas medidas.

El instante en que dos barras chocan es un evento, el tiempo asociado es el instante del choque y las coordenadas espaciales de los dos puntos en contacto.

Como no es posible representar 4 dimensiones en un espacio de menores dimensiones, dibujaremos la coordenada temporal y sólo una o dos de las coordenadas espaciales.

Veamos otro movimiento relevante en esta teoría: una onda propagándose.

Si un objeto cae en una fuente con agua, se genera una onda superficial que se aleja del punto donde cayó la piedra con una velocidad característica. Idealmente el frente de onda es una circunferencia que se expande alejándose del origen. En el diagrama espacio-tiempo, provisto de una dimensión temporal y dos dimensiones espaciales, la trayectoria de un frente de onda describe un cono cuyo vértice descansa en el punto (evento) donde se originó la onda, que en este caso coincide con el origen del sistema de coordenadas. Algo similar es lo que sucede con un destello de luz, éste se propaga como un cascarón esférico en un espacio de tres dimensiones. En los diagramas, esta onda se transforma en un cono de luz. Definimos ct como las dimensiones del eje vertical, de este modo todos los ejes tienen la dimensión de longitud.

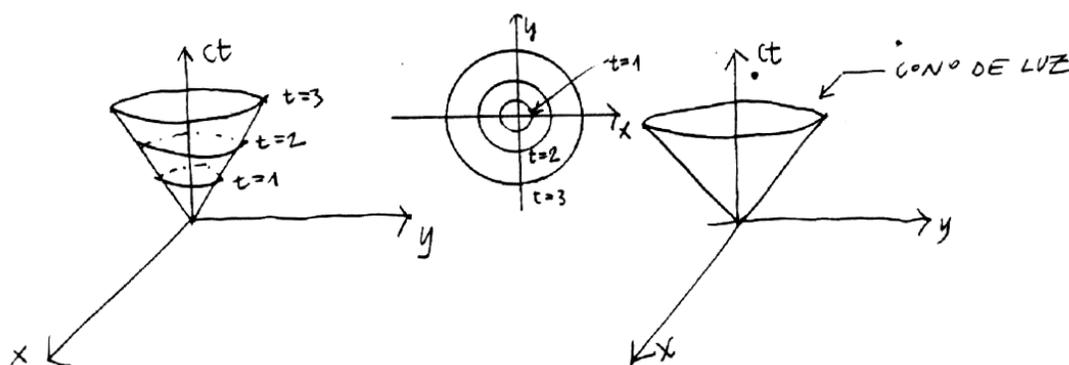


Figure V.7: Se incluye, a la izquierda, una onda de sonido propagándose en la superficie del agua (dos dimensiones). La onda de la derecha representa un pulso luminoso propagándose en dos dimensiones. Usamos la misma escala de longitud en ambos ejes x y ct .

También elegimos la escala de las coordenadas de manera que la velocidad de la luz se propague formando un ángulo de 45° con las coordenadas espaciales y el tiempo ct . Esto se logra estableciendo la misma unidad de longitud para los ejes espaciales y para el eje vertical ct . De esta forma la trayectoria de un rayo de luz forma un ángulo de 45° con el eje ct . Note que esta escala establece una nueva unidad de longitud igual a 300.000 km. Por ejemplo, si designamos la unidad de largo como 1 cm en cada uno de los ejes, este cm representa 300.000 km en las unidades normales. Otra forma de verlo, es compararlo con la escala de un mapa. Acá la escala es 1 cm equivale a 300.000 km.

Los diagramas con las trayectorias de los rayos de luz se tornan más fáciles de visualizar con esta escala. No contiene ningún cambio conceptual. Refleja el hecho que los rayos de luz son vitales en el desarrollo de la teoría y se utilizan en el protocolo de la mayoría de las mediciones.

Las figuras a continuación representan un observador en 1 y 2 dimensiones espaciales.

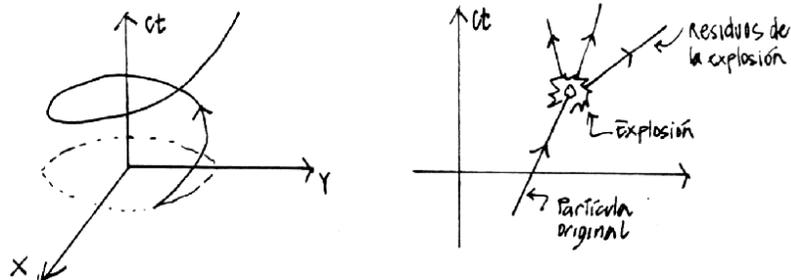


Figure V.8: Línea de universo de una partícula que rota alrededor del origen describiendo una circunferencia de radio a . A la derecha se incluye una partícula que repentinamente explota en tres pedazos. Note que una de las trayectorias es anómala: ¿Cuál parece propagarse con una velocidad mayor que la velocidad de la luz?

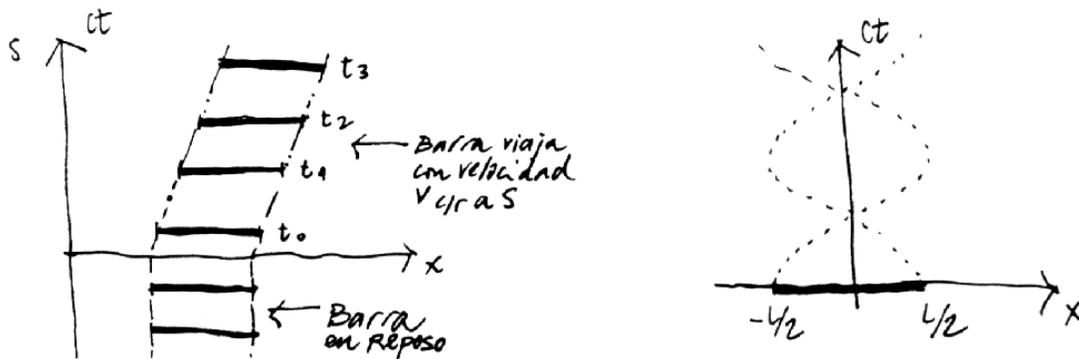
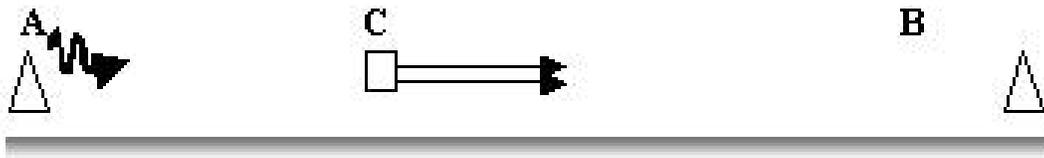


Figure V.9: Línea de universo de los puntos extremos de una barra rígida que está inicialmente en reposo en $t = 0$, viaja con velocidad v con respecto al sistema S . A la derecha se indica la línea de universo de los extremos de una barra que gira en torno al origen.

Ejercicio

Desde el punto **A**, en reposo, se envían pulsos cada **T** segundos mediante un rayo láser hacia el punto **B**, que es otro observador situado a una distancia **D** y que permanece en reposo con respecto a **A**. otro observador **C**, representa una nave que viaja desde **A** hacia **B** con rapidez constante $v = 0.6c$ con respecto al observador **A**.



a.- Haga un diagrama espacio-tiempo donde aparezca claramente la trayectoria de **A**, **B** y **C** de acuerdo a los datos del problema.

b.- ¿Cuál es el valor de T' , el intervalo con que **B** recibe los pulsos enviados por **A**?

c.- Señale el intervalo T'' durante el cual **C**, de acuerdo a su reloj, recibe dos pulsos consecutivos enviados por **A**.

d.- Suponga ahora que **C**, dispara un pulso cada vez que recibe un destello desde **A**: ¿Con qué frecuencia **B** recibe los destellos enviados por **C**?

□

V.4 Postulados de la Relatividad Especial

Una de las bellezas de la teoría de la relatividad especial es su simplicidad. No ocupa herramientas matemáticas sofisticadas, sólo álgebra del colegio. Su dificultad radica en que establece algunos resultados que chocan con nuestro sentido común. Que el tiempo transcurre en forma diferente para diferentes observadores, que no existe un tiempo absoluto, por ejemplo, o que la simultaneidad depende del observador. Estos resultados son una consecuencia de los postulados que estableció Einstein, por ejemplo, que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales, que las leyes físicas no distinguen entre dos sistemas inerciales... .

Parece natural, entonces, establecer al comienzo las creencias a partir de las cuales se construye la relatividad especial. Cualquier experimento que muestre que una de los postulados más rele-

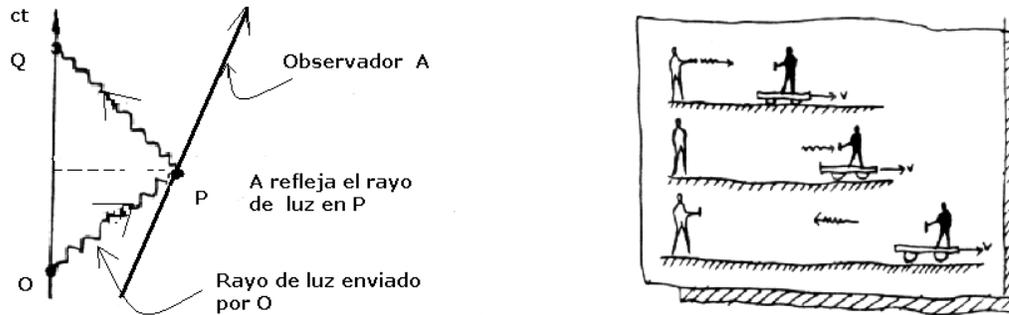


Figure V.10: *El observador A recibe un pulso de luz y lo refleja hacia el Observador O. En un diagramas sin el eje "ct", esta situación está descrita por la figura de la derecha. El observador A es la persona en el carro que se aleja. Note que el eje temporal en la figura de la izquierda progresa hacia arriba y en el de la derecha comienza desde arriba hacia abajo.*

vantes es falso, la teoría pasa a ser falsa, o a lo más una buena aproximación a la naturaleza de las cosas que nos rodean.

Lo que estudiaremos en este capítulo es una teoría cinemática, el movimiento de un observador visto por otro observador inercial. Aquí se elimina todo tipo de interacción con otras partículas o fuerzas (éste será el tema del próximo capítulo).

En esta sección se establecen las bases para el protocolo que cada observador inercial debe establecer en el contexto de la relatividad especial. Su necesidad quedará clara en cuanto avancemos en el establecimiento de la teoría.

Para construir el andamiaje de cada observador inicial sólo permitiremos la emisión y recepción de rayos de luz por parte de estos observadores.

A continuación estableceremos los postulados de la Relatividad Especial.

Postulado 0 *El espacio es homogéneo e isótropo.*

Esta afirmación indica que el resultado del experimento no depende del lugar dónde se realizó (homogeneidad del espacio). Tampoco interesa la dirección donde apuntemos con nuestros ejes

coordinados, todas las direcciones son equivalentes (isotropía).

En la superficie de la tierra existe una dirección preferida que está señalada por la atracción gravitacional. Al eliminar la gravitación (haciendo $G = 0$), el espacio recupera su isotropía. La homogeneidad e isotropía del espacio ha sido verificada con un error menor que $\pm 2 \times 10^{-15}$ [20].

Postulado 1 *Un movimiento no-acelerado o inercial es el único que puede determinarse en forma absoluta, sin referencia a ningún otro observador.*

Un sistema inercial es aquél en el cual una partícula que está en reposo permanece en reposo. Esta es la Primera Ley de Newton.

No existe un sistema inercial, existen sólo buenas aproximaciones. La superficie de la tierra es considerada como un sistema inercial y en la mayoría de los casos se comporta de esa forma. Sin embargo, sabemos que está girando con respecto a un eje diametral y también en torno al Sol.. etc.

Resumiendo: Un *sistema inercial* ocurre cuando cada partícula de prueba que está inicialmente en reposo, permanece en reposo y cada partícula de prueba que está inicialmente en movimiento continúa en movimiento, sin cambio en su rapidez o dirección.

Postulado 2 *Existen infinitos sistemas inerciales. Cada sistema que se desplaza con respecto a uno inercial con velocidad constante, constituye otro sistema inercial.*

Las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Si cambian al ir de un sistema a otro podríamos singularizar uno de ellos y de esta forma definir un sistema maestro con respecto al cual referir toda la física. Esto no se puede llevar a cabo, por tanto, debemos aceptar que los sistemas inerciales son indistinguibles.

Postulado 3 *La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Es una constante universal de la naturaleza.*

Este postulado va mucho más allá del resultado experimental establecido en el año 1887 por Michelson y Morley. Éste resultó ser *nulo*: no encontraron una diferencia *detectable* entre la velocidad de la luz medida a favor y en contra de la velocidad orbital de la tierra con respecto al Sol. Experimentos recientes, con mayor precisión, han llegado a la misma conclusión [21] : la velocidad de la luz no depende de la velocidad de la fuente.

Este experimento no es compatible con las transformaciones de Galileo (V.1). Si la velocidad de la luz en un sistema de referencia es c , en el sistema que se mueve con una velocidad V con

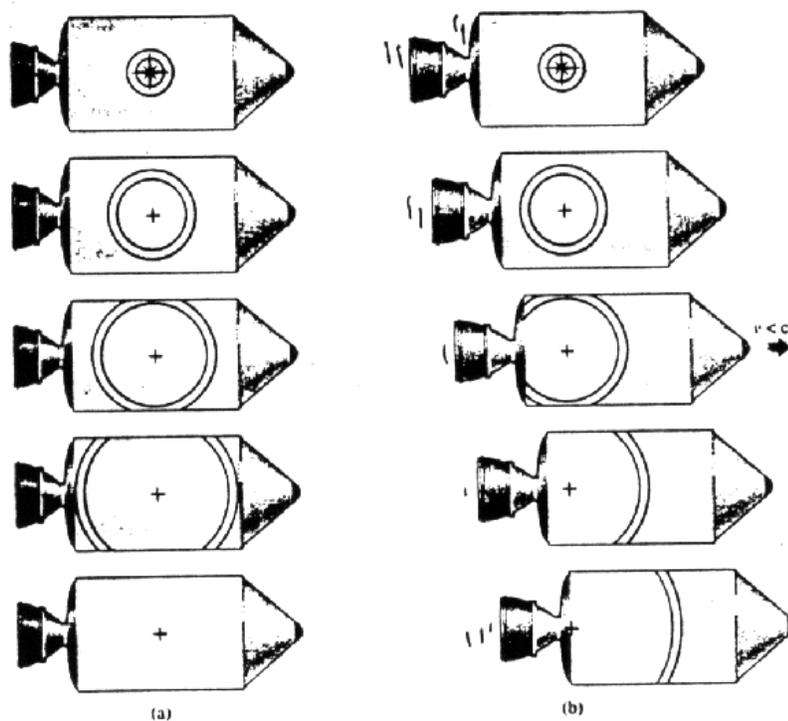


Figure V.11: *La propagación de un pulso de luz visto por dos observadores diferentes. Uno, en reposo con respecto a la nave, (columna de la izquierda, a)) son círculos concéntricos. En la columna de la derecha aparece el mismo pulso visto ahora por un observador que ve la nave desplazarse con velocidad v . Para este último el pulso se propaga con velocidad c con respecto a su sistema de referencia y por tanto, alcanza la cola de la nave antes que la nariz, a diferencia de lo observado por el piloto de la nave.*

respecto al anterior, de acuerdo a las ecuaciones (V.1), debería ser $c' = c \pm V$, dependiendo del sentido en que se traslade.

Ejemplo

Considere la siguiente situación: un astronauta lanza un destello de luz hacia un espejo situado justo encima suyo. Definimos S' como el sistema de referencia fijo a la nave y el eje y' , perpendicular a la velocidad relativa de la nave u , como el eje vertical en la nave.

Analicemos este experimento desde el punto de vista de un observador en tierra (S) y comparemos

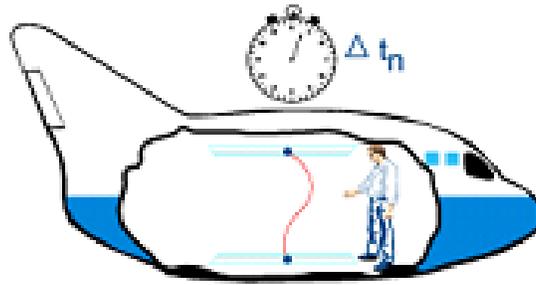


Figure V.12: a) El dibujo representa la medición que establece el observador que se mueve en la nave, que denominamos S' . Lanza un rayo que rebota en el techo de la nave y vuelve al piso. b) Representa el diagrama de lo que observa S en tierra. En c) se muestra cómo se hacen las mediciones que relacionan los tiempos de S y de S' .

con lo observado por el astronauta en (S'). La distancia del origen de S' , O' al espejo superior es L .

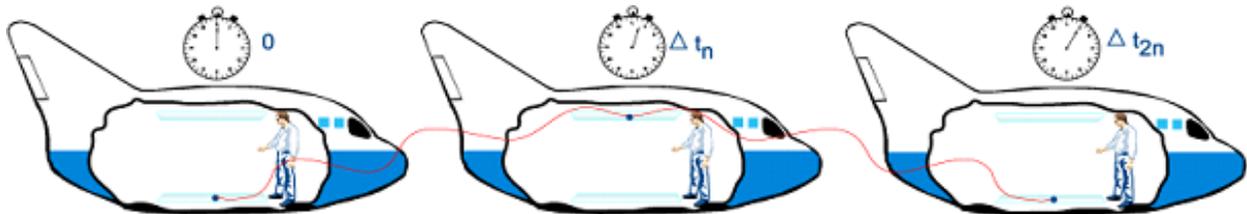


Figure V.13: b) Representa lo que observa S en tierra. La diagonal representa cómo ve el observador en tierra la trayectoria del rayo de luz. A pesar de ser diagonal, su velocidad sigue siendo c . En c) se muestra cómo se hacen las mediciones que relacionan los tiempos de S y de S' .

Comparando los tiempos medidos por ambos observadores y considerando (ver Postulado 5) que las mediciones de longitud en los ejes perpendiculares al movimiento relativo son las mismas en ambos sistemas de referencia, obtenga la expresión para la dilatación del tiempo del observador en tierra.

Solución.

En el sistema de la nave, el destello parte de O' , rebota a una distancia L en el techo y vuelve a O' .

El Postulado 5 afirma que el largo L , medido en ambos sistemas de referencia, es el mismo. Por otra parte, cada uno de los pasos representados en la figura es un evento en el sistema de Laboratorio. Cuando sale el rayo (primera figura a la izquierda), cuando llega al espejo superior (figura del medio) y la posición del origen O' del sistema S' , son tres eventos referidos al sistema de Laboratorio. Con ellos podemos dibujar un triángulo rectángulo en el sistema S y aplicar el teorema de Pitágoras:

$$(u \Delta t_s)^2 + L^2 = (c \Delta t_s)^2,$$

donde $u \Delta t_s$ es la distancia que recorre la nave en el intervalo Δt_s , tiempo que tarda el rayo en ir desde la base hasta el espejo de la nave, medida en S . L es la distancia desde el piso hasta el espejo en S' (que es la misma que en S) y $c \Delta t_s$ es la distancia que recorrió el rayo de luz de acuerdo a S .

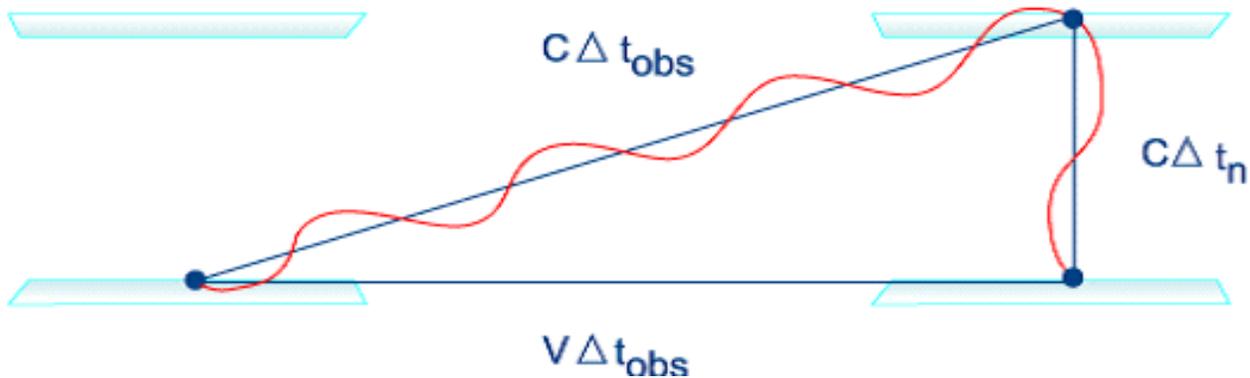


Figure V.14: c) muestra en un diagrama cómo se relacionan los tiempos de S y de S' .

Si consultamos al astronauta acerca del tiempo que empleó el rayo en ir desde el espejo inferior (origen O') hasta el espejo superior nos indica que es $\Delta t_{s'} = L/c$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior y despejando Δt_s en función de $\Delta t_{s'}$, tenemos:

$$\Delta t_{s'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Delta t_s, \quad \text{o bien} \quad \Delta t_s = \gamma \Delta t_{s'}$$

Conclusión : $\Delta t > \Delta t'$. El tiempo en S transcurre más rápido que en S' .

Comentarios: El postulado acerca de la constancia de la velocidad de la luz se utilizó al definir $c \Delta t_s$ como la diagonal del triángulo rectángulo. Si hubiésemos utilizado la composición de velocidades impuesta por Galileo, deberíamos haber escrito $\sqrt{c^2 + u^2} \Delta t_s$ para el largo de la hipotenusa. Ud. puede comprobar que usando esta expresión, desaparece la dilatación del tiempo $\Delta t_{s'} =$

Δt_s .

No comentamos cómo el observador en tierra opera para determinar los vértices del triángulo rectángulo. El destello impactando el espejo superior es un evento que sucede en S' y nosotros debemos fijar su tiempo y su posición con respecto al sistema S .

Veremos que, en este nuevo esquema, medir el largo de una barra debe ser precisamente definido. Con el procedimiento bien establecido podremos comparar largos en sistemas de referencia en movimiento relativo. Esto es necesario porque, a diferencia de lo que señalamos en la mecánica newtoniana, no hay un postulado que garantice que ambos largos son los mismos.

□

Dos observadores, en movimiento relativo, que intercambian información mediante un rayo de luz, lo ven propagarse con la misma velocidad en *ambos* sistemas de referencia. Este postulado es el origen de todas las paradojas de la relatividad especial.

El valor de la velocidad de la luz que usaremos es $c = 300.000 \text{ km/s}$. La velocidad de la luz hoy en día es una cantidad que se define, no contiene error.

Postulado 4 *El largo de una barra es la distancia que separa la posición de sus dos extremos, medidos en forma simultánea en un sistema de referencia inercial. La distancia espacial entre dos eventos simultáneos queda definida de la misma forma.*

Finalmente:

Postulado 5 *El largo de una barra que se desplaza en forma perpendicular a la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia inerciales, no experimenta cambio alguno. Su longitud es la misma, medida en cualquiera de los sistema de referencia.*

Ejemplo

A partir de las dos situaciones que se ilustran en la figura que se acompaña (V.16), los autores J. A. Wheeler y R. Taylor en [2], argumentan que no puede existir una discrepancia entre dos observadores inerciales en movimiento relativo, cuando se trata de medir el largo de una barra perpendicular a la dirección del movimiento relativo. Ambos observadores coinciden en la magnitud del largo de la barra.

Solución:

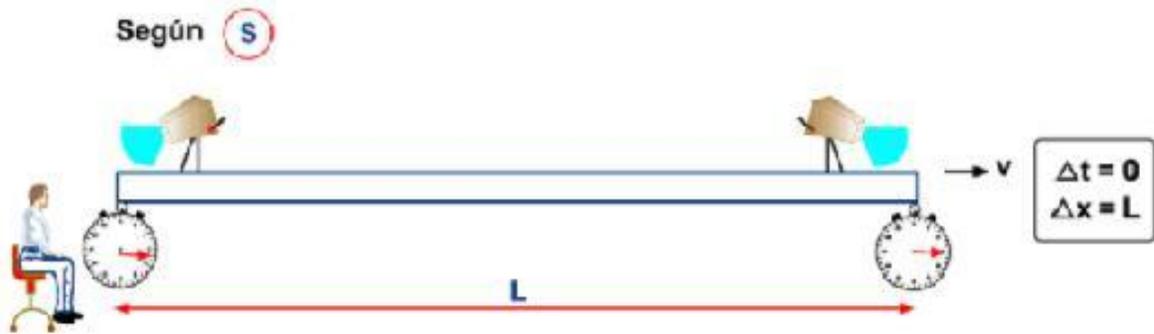


Figure V.15: Los dos extremos de la barra que se desplaza con velocidad V con respecto al observador en reposo, son fotografiados simultáneamente en el sistema S del observador. El largo de la barra es la distancia euclídea entre ambos eventos: la coordenada de la foto del final de la barra en el instante t y la coordenada de la foto del comienzo de la barra en el mismo instante t . Esto es $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

El argumento central en este ejemplo es que dos observadores inerciales no pueden alcanzar conclusiones contradictorias verificables con los sentidos. Concretamente en este ejemplo, si el carro cae dentro o fuera de los rieles, debe suceder así para ambos observadores.

Esta es una demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que una longitud perpendicular al movimiento relativo se acorta debido al movimiento. Esto indica que si mido un largo L de una barra en mi sistema de referencia, esa misma barra si se desplaza con respecto a mi sistema de referencia, y mido su largo, éste resulta ser menos que el original L .

Apliquemos esto al carro de la Figura. Consideraremos dos sistemas de referencia: uno fijo a los rieles y el otro fijo al carro del tren. Lo que mediremos es el ancho de las ruedas del carro (vistas de frente en la Figura). En reposo las ruedas del carro permanecen sobre los rieles.

Consideremos el acortamiento propuesto en el párrafo anterior. En este caso un sistema de referencia fijo a los rieles ve (por ejemplo) que el ancho de los carros (que normalmente viajan a lo largo de los rieles, es decir entrando o saliendo de la hoja) se acorta. Por tanto este observador afirma que el tren en movimiento cae en el interior de los rieles.

Por otra parte, el observador inercial fijo al carro, observa que los rieles (o mejor los durmientes),

viajan y por tanto la distancia entre ellos se acorta y las ruedas del tren caen fuera de los rieles. Para un observador inercial el carro cae dentro de los rieles y para el otro observador inercial el carro cae fuera de los rieles.



Figure V.16: *No pueden existir conclusiones diferentes y medibles entre dos observadores inerciales. Este principio basta para deducir que las longitudes perpendiculares no experimentan cambios al ir de un sistema inercial a otro.*

Claramente esto es contradictorio. O el carro cae dentro o cae fuera, pero no ambos.

La salida a esta contradicción es que NO ocurre nada (ni acortamiento, como se supuso acá, ni alargamiento, alternativa que no se consideró pero que conduce a una contradicción similar).

□

Esta conclusión descansa en la premisa que los sistemas inerciales son indistinguibles el uno del otro.

Este postulado puede entonces considerarse que se desprende de los anteriores.

V.5 Simultaneidad

Distinguimos dos tipos de simultaneidad: absoluta y relativa.

La simultaneidad es absoluta cuando es válida para todos los observadores inerciales. Si es simultáneo en un sistema referencia lo es para para todo el resto de los posibles observadores inerciales.

Al contrario la simultaneidad relativa es una propiedad restringida a un sistema de referencia específico: aquel que lo estableció.

V.5.1 Simultaneidad Absoluta (La velocidad de la luz es infinita)

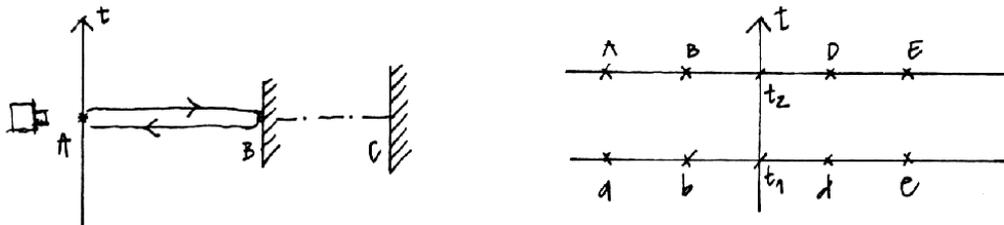


Figure V.17: *Un destello de luz viajando con velocidad infinita. Llega a todos los lugares simultáneamente.*

Para la mayoría de los fenómenos que ocurren a nuestro alrededor, la luz se propaga prácticamente con *velocidad infinita*. De esta forma no hay retardo medible al recibir la información entre dos eventos separados una distancia arbitraria. Cuando recibo el fotón puedo asumir, que el evento que lo originó tomó lugar casi en el mismo instante en que lo recibí.

En el diagrama espacio–tiempo, esta situación se representa como dos eventos ubicados en un plano ortogonal al eje del tiempo. Esta es nuestra definición de *eventos simultáneos*.

El fotón emitido por una fuente se refleja instantáneamente en B y vuelve a A (ver Figura V.17). A y B son simultáneos.

Lo mismo sucede con el evento C , el rayo con velocidad infinita recorre en ida y vuelta el camino AC , sin demora, de esta forma A y C son simultáneos. Análogamente, y por las mismas razones A, B y C son simultáneos. Prosiguiendo con este método podemos formar líneas de simultaneidad absoluta. Estas son rectas perpendiculares al eje ct .

Los eventos a, b, c, d y e , señalados en la figura (V.18) son simultáneos y ocurren en el instante t_1 .

Los eventos A, B, C, D y E son también simultáneos, pero ocurren en el instante t_2 con posterioridad a t_1 .

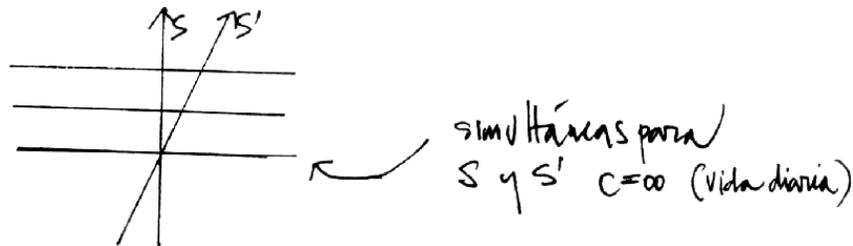


Figure V.18: *Los planos de simultaneidad absoluta son líneas horizontales. Son los mismos para todos los observadores inerciales. Si la velocidad de la luz se considera infinita, la simultaneidad es absoluta, la misma para todos los observadores.*

Supongamos un observador que viaja con velocidad v con respecto al anterior: ¿cuál es la línea de simultaneidad que le debemos asociar? (Ver Fig. V.18)

La respuesta es que le debemos asociar la misma que al observador en reposo debido a que la velocidad infinita de la luz alcanza todos los eventos sin retraso, no importa la velocidad con que se desplace este nuevo observador.

Ciertamente esta es una buena aproximación en muchos casos.

Veamos qué cambia al considerar una velocidad de propagación finita para la luz.

V.5.2 Simultaneidad Relativa (La velocidad de la luz es finita)

Usando el hecho que la velocidad de la luz es finita y tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, podemos definir en forma única la simultaneidad.

Se denomina simultaneidad relativa porque está asociada a un sistema de referencia particular (relativo a dicho sistema y no a otro). Dos eventos simultáneos, lo son sólo en el sistema de referencia en el cual se estableció.

Definimos simultaneidad relativa de la misma forma que la simultaneidad absoluta: enviando desde uno de los eventos (el origen, por ejemplo) un rayo de luz que rebota en el punto (el otro evento) y retorna a la fuente. La única diferencia con la simultaneidad absoluta es que hemos

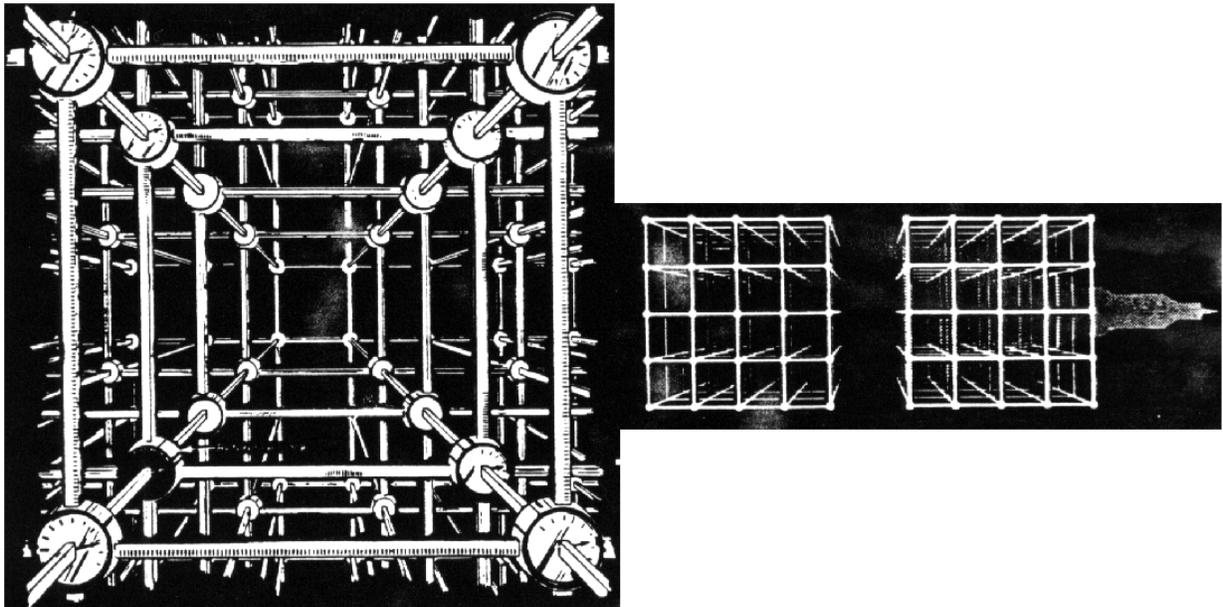


Figure V.20: *El observador en el Laboratorio (andamiaje de la izquierda) y el Astronauta en su nave (a la derecha de la Figura, y que se desplaza con una velocidad relativa v), cada uno construye, en forma independiente, su enrejado espacio-tiempo. Cada uno de ellos lo construye rectangular (como el que aparece a la izquierda en la Figura). La relatividad especial es el protocolo que permite relacionar los valores asignados en un andamiaje con los de la otra grilla.*

y una coordenada espacial usando un protocolo bien establecido. Este método, es aplicable a cualquier sistema de referencia inercial. Mostraremos que las líneas de simultaneidad en dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo, no coinciden. Este protocolo establece que CADA OBSERVADOR INERCIAL construye su propio sistema de coordenadas, sincronizando sus relojes y asociando las coordenadas a sus eventos. La relatividad especial relaciona las coordenadas de un observador inercial a las de otro en movimiento relativo uniforme.

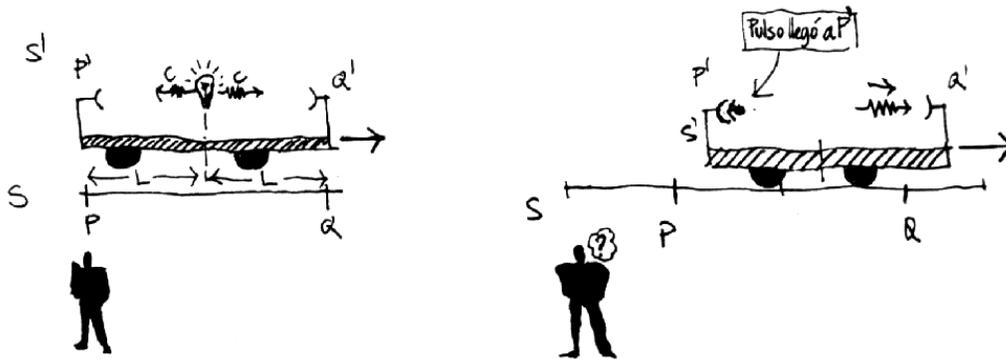


Figure V.21: *Los dos destellos de luz salen simultáneamente desde el punto medio del carro. Alcanzan simultáneamente los dos extremos del carro (figura de la izquierda). Para un observador externo no existe esa simultaneidad de los dos eventos separados. Para él, debido a que la velocidad de la luz es c , el destello alcanza primero el extremo izquierdo y después el extremo del derecho (figura de la derecha).*

La velocidad de la luz es finita y toma el mismo
valor en todos los sistemas inerciales



Dos eventos simultáneos en un sistema de referencia inercial,
no lo son en ningún otro sistema en movimiento relativo. (Ver V.21)

A continuación usaremos esta definición para asignar las coordenadas espacio temporales a un observador que designamos como S' , y que se aleja con velocidad V constante, del observador en el sistema S . Como S' constituye también un sistema inercial, debemos aplicar el mismo método para definir las superficies de simultaneidad: el rebote de los rayos de luz. De la figura V.22, se aprecia que debido a la asimetría del eje ct' , las líneas de simultaneidad no van a coincidir con aquellas de S , como era el caso en la simultaneidad absoluta.

Después de determinar dos puntos simultáneos, definidos como el punto de rebote del rayo y el punto medio del tramo comprendido entre la partida y el regreso del destello de luz, es evidente de la Figura (V.22) que las líneas de simultaneidad están inclinadas con respecto a las anteriores.

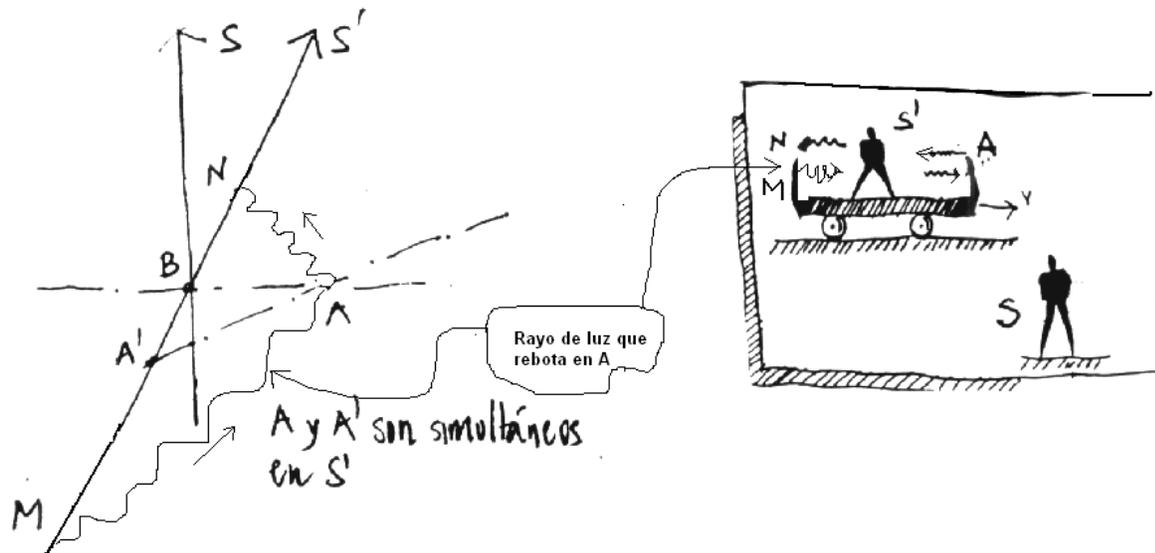


Figure V.22: Los eventos A y B son simultáneos para el observador en el sistema S . Para S' los puntos A y A' son simultáneos. A' se ubica en el punto medio del intervalo MN , por tanto, de acuerdo al protocolo establecido, es el evento simultáneo al evento A donde rebotó el destello de luz. El rayo de luz parte de M .

Cómo construir una familia de líneas de simultaneidad

Si, al igual que el caso anterior, repetimos el proceso con otros puntos, desarrollamos una familia de líneas de simultaneidad asociadas al observador S' .

En la Figura siguiente, se aprecia que los puntos (eventos) A y B , son simultáneos para el observador S (y también para todo su equipo de relojes sincronizados), pero *no* lo son para el observador designado por S' . De hecho, en el sistema S' , A sucede antes que B . La simultaneidad es *relativa*, está asociada a un sistema de referencia específico.

Ejercicio

A partir del ejemplo ilustrado en la figura V.23, haga el diagrama espacio-tiempo que corresponda a esa situación.

Compare este ejercicio con el indicado en la figura (V.21) y señale qué tienen de común ambos experimentos en su planteamiento.

□

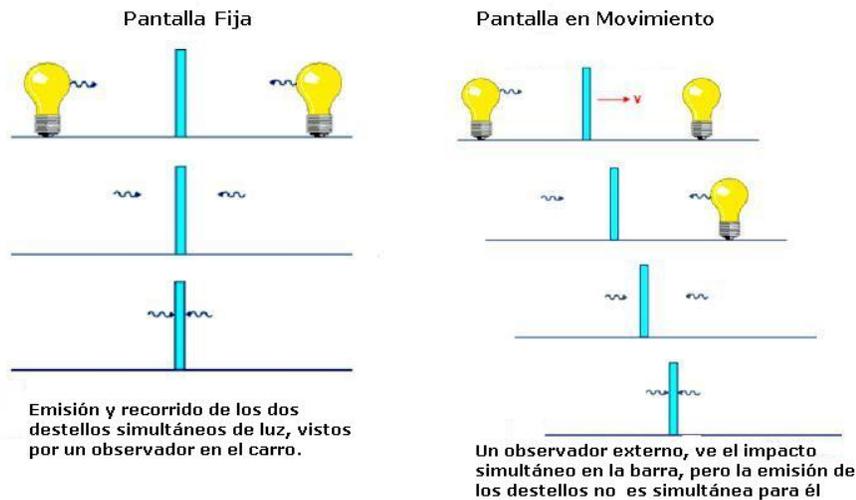


Figure V.23: Los dos destellos de luz que salen simultáneamente desde los dos extremos del carro, llegan simultáneamente a su punto central (figura de la izquierda). Sin embargo, para un observador externo no existe esa simultaneidad. Para él, el rayo de la izquierda salió primero y de esa forma, dada la velocidad del carro, ambos logran llegar simultáneamente al centro del carro (figura de la derecha).

Ejemplo

Este es otro ejemplo de simultaneidad relativa. En la parte izquierda de la Figura V.24, los rayos provenientes de los extremos de la estación (nave superior) llegan simultáneamente al centro donde se ubica el director de la estación. Para él no hay problema, ambos rayos salieron simultáneamente y llegaron simultáneamente al centro de la estación. Es lo que se describe en la columna izquierda.

En cambio para el astronauta viajando en la nave espacial -que sabe que ambos rayos salieron del extremo de su nave (ver Fig. V.24) debido a que existe evidencia fotográfica ve otra cosa.

Lo que sucede es lo siguiente: lo que es simultáneo para la estación espacial (nave superior) no lo es para el astronauta de la nave espacial (nave inferior). Para este último, se dispara primero el destello en la izquierda de la Figura, cuando ambos extremos izquierdos coinciden. La estación espacial avanza hacia la derecha. Posteriormente cuando ambos extremos derechos coinciden, aparece el otro destello.

Hemos afirmado que los largos de ambas naves, construidas en forma idéntica, no coinciden. Analizaremos este resultado después de conocer las transformaciones inventadas por Lorentz.

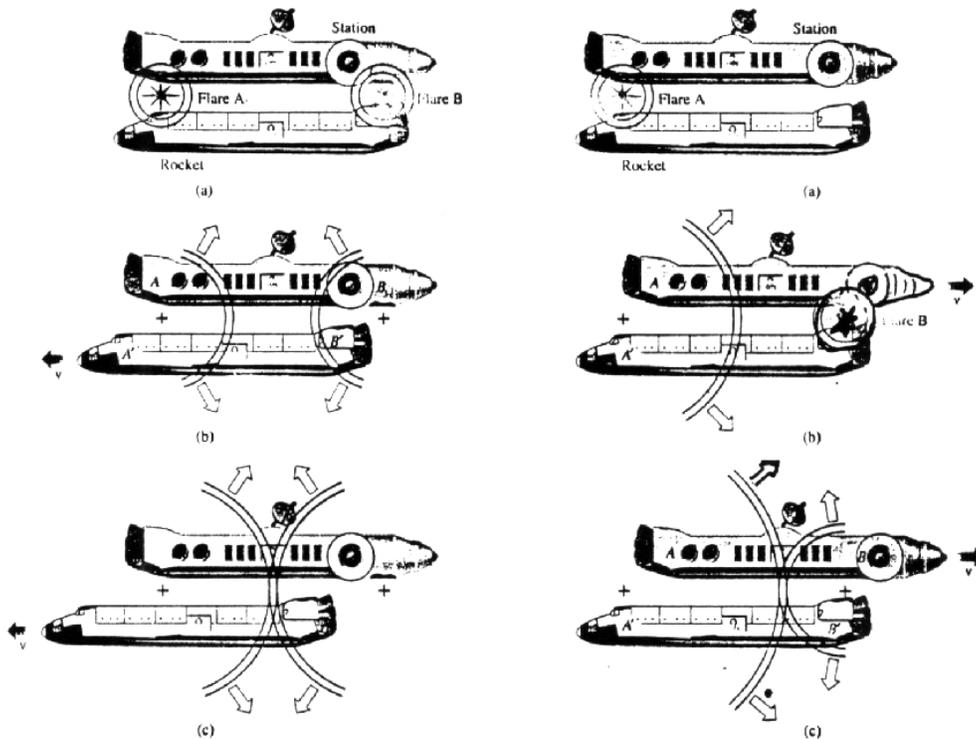


Figure V.24: El observador en la estación espacial (nave superior) figura a.-, se considera en reposo y observa como el astronauta (nave inferior) se aleja de la estación con velocidad constante. Los círculos indican la propagación de dos destellos de luz emitidos, simultáneamente, desde el frente y la parte posterior de la estación espacial. La columna izquierda detalla lo que se observa desde la estación espacial. El tiempo evoluciona hacia abajo en la figura. La misma situación, pero vista por el astronauta en la nave inferior, se detalla en la columna derecha. El evento medible por ambos observadores es el choque de los frentes de onda y la posición en que esto ocurre, eso **DEBE** ser el mismo en ambos casos. En caso contrario, Ud. puede inventar un experimento que demuestre que la relatividad especial es incorrecta.

V.6 Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.

V.6.1 Transformaciones de Lorentz

La relatividad especial estudia las relaciones que existen entre dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo. La mecánica, el electromagnetismo,... toman la misma forma en ambos

sistemas de referencia. Son indistinguibles.

Las transformaciones de Lorentz relacionan las coordenadas de un sistema de referencia con las del otro logrando mantener la misma forma de las ecuaciones básicas (Newton, Maxwell,...) en ambos sistemas de referencia.

A continuación veremos cómo construir estas transformaciones.

Consideremos dos sistemas inerciales de referencia: S , en el cual nos ubicamos y S' , que se desplaza con rapidez v **constante** con respecto a nosotros (sistema S). El vector velocidad \vec{v} , quiebra la isotropía del espacio. Para evitar complicaciones algebraicas, seleccionamos el eje x de nuestro sistema de referencia en la misma dirección y sentido en que apunta la velocidad \vec{v} (V.25).

Siempre uno elige como la primera opción para enfrentar un problema, la más simple. Si funciona, se examina en mayor detalle, si no, se busca la siguiente opción. En la relatividad especial, como veremos a continuación, funciona la opción más simple.

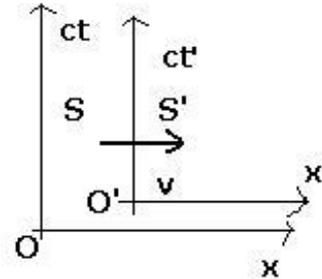


Figure V.25: Diagrama que representa dos sistemas de referencia en movimiento relativo con velocidad \vec{v} .

Supondremos, por simplicidad, que la relación entre las coordenadas de un evento visto desde el sistema S y desde S' , es lineal en las coordenadas. Supondremos también que los orígenes de coordenadas de ambos sistemas de referencia coinciden $x = x' = 0$ en $t = t' = 0$. Los relojes de ambos sistemas parten cuando se enfrentan los relojes ubicados en el origen de cada uno de los sistemas de referencia (O y O'). Analicemos sólo la coordenada x' por ahora. De acuerdo a la definición de linealidad, tenemos

$$x' = ax + bt, \quad (\text{V.2})$$

donde a y b son funciones de la velocidad, $a = a(v)$ y $b = b(v)$.

Considere una partícula ubicada en el origen de coordenadas del sistema S' , por definición: $x' = 0$. De manera que la ecuación anterior nos da

$$0 = ax + bt. \quad (\text{V.3})$$

donde x representa la posición del origen de coordenadas de S' en el instante t .

De aquí obtenemos $0 = ax + bt$, de modo que

$$\frac{x}{t} \equiv \frac{dx}{dt} = v = -\frac{b}{a}.$$

Las funciones $a(v)$ y $b(v)$ están relacionadas. La transformación general de coordenadas toma la siguiente forma:

$$x' = a(v)(x - vt). \quad (\text{V.4})$$

Utilizando el Postulado que afirma que todos los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí deducimos que esta misma relación debe ser válida para el sistema S' cuando evalúa la posición de una partícula ubicada en S :

$$x = a(-v)[x' + vt'], \quad (\text{V.5})$$

donde $a(-v)$ señala que la partícula en S viaja hacia la izquierda de S' .

Consideremos ahora que la velocidad de la luz es una constante universal. Si en el instante $t = 0 = t'$, cuando ambos sistemas de referencia coinciden $\mathbf{O} = \mathbf{O}'$ (ver figura (V.25)), enviamos un pulso de luz en el sentido positivo del eje x . Como la velocidad de la luz es constante para cada uno de los dos observadores, se tiene

$$x' = ct' \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S'$$

$$x = ct \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S.$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en V.4 y V.5 obtendremos una expresión para la función $a(v)$, como se muestra a continuación:

$$ct' = a(v)(x - vt) = a(v)(ct - vt)$$

$$\Rightarrow t' = a(v)\left(1 - \frac{v}{c}\right)t$$

$$\text{por otra parte: } ct = a(-v)(x' + vt') = a(-v)(ct' + vt')$$

$$t = a(-v)\left(1 + \frac{v}{c}\right)t'$$

Reemplazando la expresión de t' en la última ecuación, obtenemos el producto de $a(v)a(-v) = [1 - \frac{v^2}{c^2}]^{-1}$.

Supondremos que el factor $a(v)$ es una función que no depende de la dirección de la velocidad, de

forma que $a(v) = a(-v)$. Posteriormente obtendremos estas ecuaciones en forma geométrica y no necesitaremos hacer esta suposición.

Con esto podemos despejar la expresión para $a(v)$ y obtenemos

$$a(v) \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{V.6})$$

donde hemos definido $a(v) \equiv \gamma$, que es la letra usada para esta expresión.

En definitiva la transformación V.4, se escribe:

$$\mathbf{x}' = \gamma(v) [x - vt]. \quad (\text{V.7})$$

Para obtener la transformación del tiempo operamos algebraicamente con las mismas transformaciones anteriores:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ x &= \gamma[\gamma(x - vt)] + \gamma vt' \end{aligned}$$

Si despejamos t' de la ecuación anterior, obtenemos:

$$t' = \gamma t + \left[\frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} \right] x.$$

Re-escribimos esta última ecuación, utilizando las siguientes igualdades:

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2} = -\beta^2 \gamma^2,$$

con $\beta \equiv v/c$. Finalmente la expresión para t' es:

$$t' = \gamma \left[t - \frac{v}{c^2} x \right]. \quad (\text{V.8})$$

Las ecuaciones V.7 y V.8, son las transformaciones de Lorentz. Dadas las coordenadas de un evento en un sistema S , podemos obtener las coordenadas en el sistema S' a través de estas ecuaciones.

Las coordenadas perpendiculares a la velocidad y y z no cambian $y' = y, z' = z$.

Note que para $v \ll c$ se recuperan las transformaciones de coordenadas de Galileo.

Líneas de simultaneidad en el sistema S'

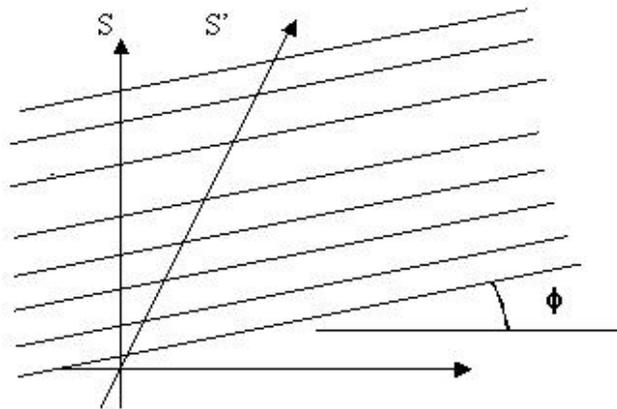


Figure V.26: La familia de rectas dibujadas corresponden a relojes sincronizados en el sistema S' que marcan el mismo tiempo t' . Marcan los eventos simultáneos de acuerdo al observador S' . Las líneas horizontales marcan las líneas de simultaneidad del observador S .

A continuación encontraremos *analíticamente* la ecuación para la familia de líneas de simultaneidad, es decir tiempo constante, en el sistema S' .

La relación entre los tiempos de S' y S está dada por la transformación de Lorentz

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c} x \right)$$

La ecuación de la familia de líneas con $t' = \text{constante}$ en S' , escritas en el sistema de referencia S , es

$$t' \equiv \text{constante} \equiv t'_0 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$

Ordenando los términos se obtiene la ecuación de la familia de líneas de simultaneidad en S' .

$$ct = \frac{v}{c} x + \frac{ct'_0}{\gamma}. \quad (\text{V.9})$$

t' es el parámetro que determina la familia de rectas de simultaneidad en S' indicadas en la figura (V.26), cuya pendiente es

$$\tan \phi = \frac{v}{c} \quad (\text{V.10})$$

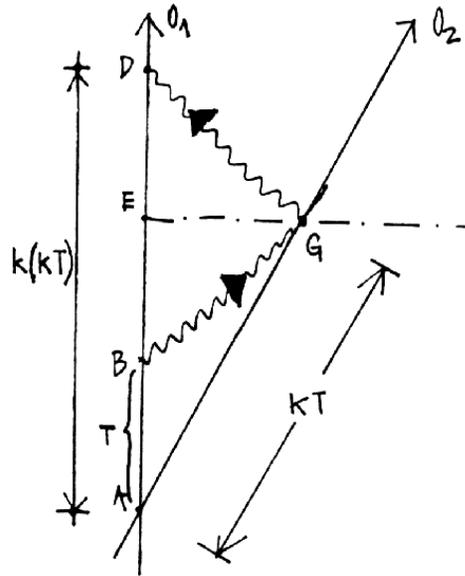
Líneas de universo: observadores en reposo

El ángulo que forma la línea de universo del observador S' con la vertical que corresponde al observador en reposo (S) es, de acuerdo a la figura V.6.1

$$\tan \phi = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} = \frac{x_G}{ct_E} = \frac{vt_G}{ct_E} = \frac{v}{c}$$

donde hemos usado que $t_E = t_G$.

Encontremos ahora la familia de líneas de universo de los observadores en reposo en S' . Las líneas con $x' = \text{constante}$ son $x'_o = \gamma(x - vt)$. Estos son los observadores que permanecen en reposo en el sistema S' . El objetivo final de estos dos cálculos es mostrar que



el sistema de referencia de S' aparece deformado visto por el observador S . Esta asimetría entre S y S' proviene de haber considerado que el observador S está efectivamente en reposo. Operando con la expresión para x'_o tenemos

$$\frac{v}{c}(ct) = x - \frac{x'_o}{\gamma}, \quad \text{y ordenando} \quad t = \frac{1}{(v/c)} x - \frac{x'_o c}{v \gamma}. \quad (\text{V.11})$$

La pendiente de la familia de rectas con $x' = \text{constante}$ es $\tan \phi' = 1/(v/c)$. A continuación mostramos que es idéntico al primer resultado que obtuvimos en esta sección.

$$\tan \phi' = \frac{1}{\tan \phi} = \cot \phi, \quad \text{pero} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{1}{\tan \phi}.$$

De esta manera

$$\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

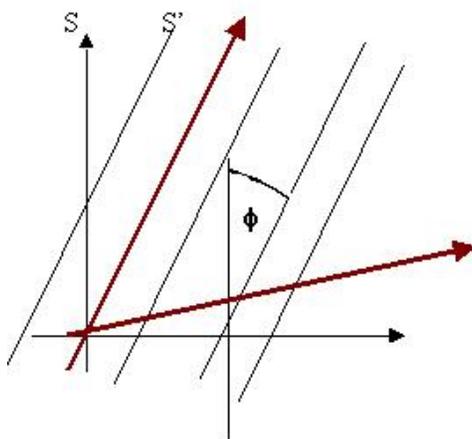


Figure V.27: Las líneas corresponden a la trayectoria de observadores en reposo en S' . El sistema S' visto desde S aparece como deformado en un ángulo ϕ con respecto a ambos ejes de S . Esto ocurre porque hemos tomado S como referencia. Desde el punto de vista de S' , es el otro observador S el que ha sido deformado.

En resumen, el sistema S' sufre una deformación con respecto al sistema S . Esta deformación está caracterizada por el ángulo ϕ . Recuerde que el observador S' no sufre ninguna deformación (o lo que sea). Se considera un observador inercial tan seguro como S . Es más, del punto de vista de S' , S se ha deformado y abierto, como una tijera, en un ángulo ϕ . Esta es la esencia de la relatividad especial: cada uno de los observadores se cataloga como un observador inercial y nota

cambios en el otro compañero. Esto es lo relativo de la relatividad.

V.7 Geometría de las Transformaciones de Lorentz

Lo natural sería continuar estudiando los problemas típicos de la relatividad especial: la dilatación del tiempo, la contracción del largo, la paradoja de los gemelos.

Hemos preferido introducir el método geométrico previamente antes de seguir ese camino.

A nuestro juicio, el conocer el método analítico y geométrico permite plantear mejor los problemas y facilita la comprensión de la solución.

Además es siempre mejor tener dos maneras de resolver un mismo problema.

El efecto Doppler permite en forma natural la introducción de un factor que denominaremos $k(v)$ y con ello estudiar la geometría de los problemas de relatividad especial y, a la vez, recuperar todas las fórmulas ya obtenidas en forma analítica.

V.7.1 El Efecto Doppler Relativista

Utilizaremos un método analítico y geométrico para determinar la corrección debida al efecto Doppler relativista. El método se debe a H. Bondi, un físico inglés quien lo introdujo. El factor que representa el efecto Doppler lo denominaremos k . Con este factor mostraremos que se pueden re-obtener las transformaciones de Lorentz, las transformaciones de la velocidad..., en resumen todo lo conocido de relatividad especial.

Desde los años 1920 sabemos que las galaxias están alejándose entre ellas a una velocidad promedio proporcional a la distancia que las separa. La identificación del emisor y la frecuencia $\nu \equiv 1/T$ de la radiación que proviene de estas galaxias, revela que nos llegan con un cierto corrimiento en el valor de la frecuencia $\nu' = \nu + \Delta\nu$. Esta diferencia, más algunos resultados básicos de cosmología, nos permite estimar la velocidad con que se están alejando. Este fenómeno se denomina *corrimiento al rojo*, que resalta el hecho que las galaxias se alejan. Si las galaxias se aglomeraran en el tiempo, el corrimiento cambiaría de signo y se denominaría *corrimiento al azul*, en este caso la frecuencia recibida aumentaría.

Una explicación cualitativa de lo que aquí sucede es la siguiente: suponga que enviamos una señal a un habitante de dicha galaxia, ésta consiste en dos destellos de luz separados por un intervalo T . Como, desde nuestro punto de vista, la otra galaxia se aleja, el segundo destello debe recorrer un trayecto más largo que el primero y por lo tanto demora más en alcanzar la galaxia y en ser detectado por uno de sus habitantes. Este retraso depende linealmente del lapso T y de

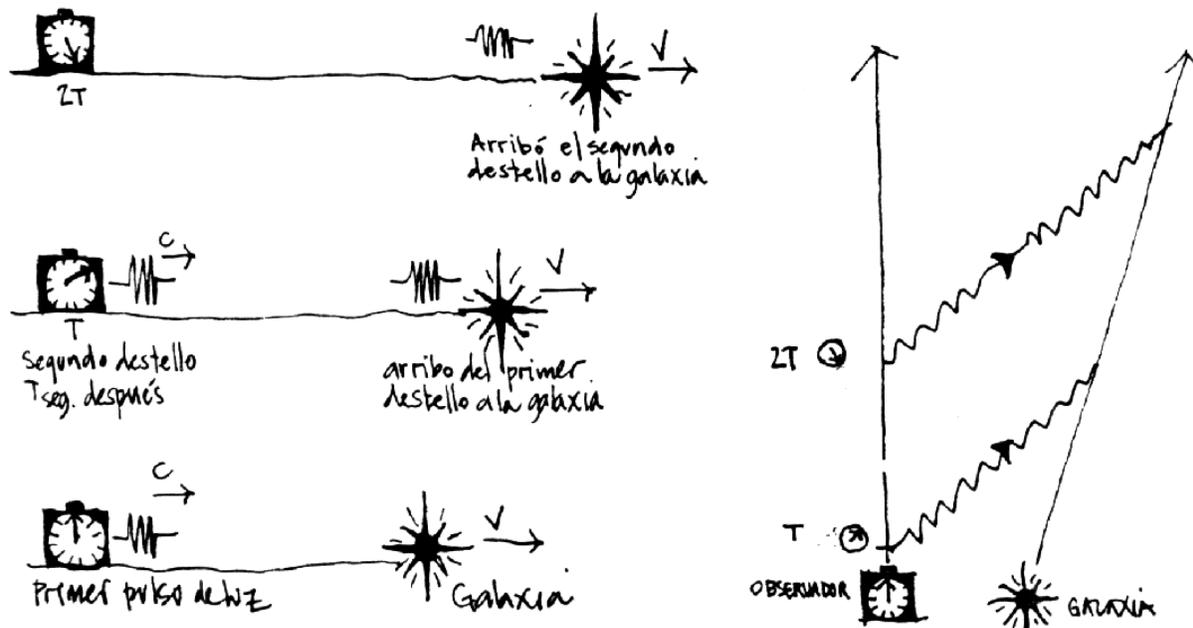


Figure V.28: En la figura de la izquierda se ilustra cómo un tren de fotones alcanzan a una fuente en movimiento relativo. A la derecha se incluye el diagrama espacio-tiempo del mismo fenómeno. Se supone que ambos cuerpos parten de un origen común. El efecto Doppler relaciona el intervalo T de la fuente (reloj) con el intervalo T' de recepción en la galaxia (línea inclinada).

la velocidad relativa entre ambos medios. kT es el intervalo con que se recibe la señal, donde $k = k(v)$ es una función que sólo depende de la velocidad de separación de estos dos objetos.

Esta función k tiene una interpretación física bien concreta: es el efecto Doppler relativista.

La función k : el factor Doppler

Una versión de lo expuesto aquí se encuentra en la referencia [[14]].

A continuación relacionaremos analíticamente las mediciones hechas en distintos sistemas de referencia. Usaremos el método gráfico.

Cálculo analítico del factor k

Consideremos los eventos indicados en la figura V.29 y escribamos las transformaciones de Lorentz que las caracterizan.

Note que se utiliza O_1 en lugar de S y O_2 en lugar de S' .

$$t'_G = \gamma(t_G - \frac{vx_G}{c^2})$$

De la figura V.29 se desprende que la coordenada del punto G es $x_G = v \cdot t_E$, puesto que $t_G = t_E$ son eventos simultáneos en el sistema S . Reemplazando este resultado tenemos

$$t'_G = \gamma(t_E - \frac{v^2}{c^2} t_E) = \frac{t_E}{\gamma} \quad (\text{V.12})$$

Note que esta expresión es la dilatación del tiempo: $t'_G < t_E$, puesto que $\gamma \geq 1$.

Por otra parte $t_E = T + t_{BE}$, pero t_{BE} es lo que demora la luz en ir desde $x = 0$ hasta x_G , luego

$$t_{BE} = (x_G - 0)/c, \quad \Rightarrow \quad t_{BE} = \frac{x_G}{c} = \frac{v}{c} t_E$$

De aquí tenemos que $t_E = T + (v/c) t_E$, y ordenando tenemos $(1 - \frac{v}{c}) t_E = T$. Reemplazando t_E en la expresión previa V.7.1, obtenemos

$$t'_G = \frac{T}{\gamma(1 - v/c)} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} T. \quad (\text{V.13})$$

De acuerdo a la definición del efecto Doppler y su correspondencia con los tramos señalados en la Figura V.29, la expresión para el factor k es

$$t'_G \equiv kT, \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (\text{V.14})$$

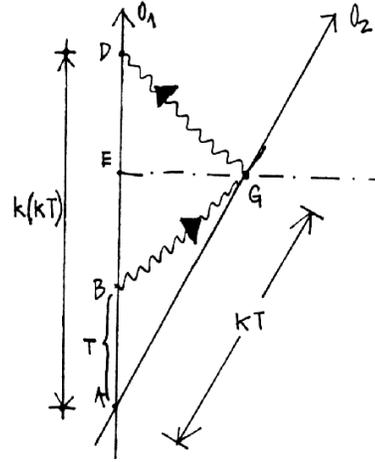


Figure V.29: En la figura no aparece el eje (horizontal) x para evitar el exceso de letras y líneas. Por ejemplo, $x_G \equiv \overline{EG}$ es la coordenada espacial del evento G .

Ejemplo

A partir de esta última ecuación, recupere la transformación de Lorentz que relaciona t'_G con t_G y x_G .

$$\begin{aligned}
 t'_G &= \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} T = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \left(t_G - \frac{x_G}{c} \right) \\
 &= (1 + v/c) \gamma \left(t_G - \frac{x_G}{c} \right) \\
 &= \gamma t_G - \gamma \frac{v}{c^2} x_G + \frac{v}{c} \gamma t_G - \frac{x_G}{c} \gamma \\
 &= \gamma \left(t_G - \frac{v x_G}{c^2} \right) + \gamma \left(\frac{v}{c} t_G - \frac{x_G}{c} \right) \quad \text{como } v t_G = x_G, \\
 t'_G &= \gamma \left(t_G - \frac{v}{c^2} x_G \right).
 \end{aligned}$$

□

Método Geométrico para encontrar $k(v)$.

En A dos observadores (puntos) inerciales O_1 y O_2 , se cruzan y sincronizan sus relojes (ver Fig V.30).

De acuerdo al reloj de O_1 , T segundos más tarde, éste envía un rayo de luz a O_2 . Este lo recibe en el instante que definimos como kT . Postulamos aquí que cualquier diferencia en los intervalos puede ser explicada en base a esta función $k(v)$. La función k sólo puede depender de la velocidad relativa v , puesto que es el único parámetro del problema: $k = k(v) \geq 0$. Además, si $v \rightarrow 0$, $k \rightarrow 1$, puesto que no hay velocidad relativa en este caso.

Si a su vez O_2 , al recibir la señal la responde inmediatamente, entonces O_1 la recibirá en el instante $k(kT)$.

Esta afirmación se basa en el postulado # 3, que señala que ambos sistemas son equivalentes, de forma que si enviamos un destello desde O_1 hacia O_2 ,

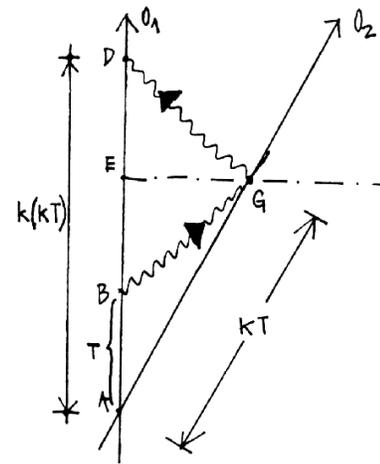


Figure V.30: Esta es la misma figura usada en el caso anterior. Acá se explicará el factor $k(k(T))$ que parece en el eje vertical.

el intervalo de tiempo aparece multiplicado por un factor k . Lo mismo debe suceder al enviar un destello desde O_2 hacia O_1 . En O_1 el intervalo debe ser multiplicado por k veces el intervalo de O_2 , que era kT .

Ambos son sistemas inerciales, indistinguibles y sincronizaron sus relojes en A .

Cada vez que un observador (S) detecte que otro sistema de referencia (S') se está alejando, los intervalos de tiempo se relacionarán con la función $k(v)$ como se ha especificado aquí.

La distancia espacial \overline{EG} que aparece en el gráfico se puede calcular de dos formas:

Primer Método:

Podemos calcular cuánto se demoró el rayo de luz en llegar al punto G que, como es simultáneo con E en el sistema S , es equivalente a calcular el tiempo que marca el reloj del observador en E . Este valor es:

$$\overline{EG} = c \cdot \frac{DB}{2} = c \cdot [k^2 - 1] \frac{T}{2}. \quad c \equiv \text{velocidad de la luz.} \quad (\text{V.15})$$

La física es la misma en todos los sistemas inerciales. Sin embargo, la simultaneidad se asocia a un solo sistema de referencia, es relativa.

Esta elección quiebra la simetría entre los sistemas inerciales.

Al comparar mediciones entre dos sistemas de referencia, se debe especificar que el resultado se obtuvo estableciendo la simultaneidad para uno de ellos.

Volviendo a nuestro cálculo, sabemos que la distancia que se alejó O_2 a partir del punto A , en que ambos coincidían es:

$$\overline{EG} = v \cdot \overline{AE} = v \left[(k^2 - 1) \frac{T}{2} + T \right] = v \cdot (k^2 + 1) \frac{T}{2}. \quad (\text{V.16})$$

Igualando estas dos últimas expresiones, obtenemos:

$$v \cdot [k^2 + 1] \frac{T}{2} = c(k^2 - 1) \frac{T}{2},$$

eliminando $T/2$ y despejando (v/c) ,

$$\beta \equiv \left(\frac{v}{c} \right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \quad k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Si $k = 1$, entonces $\beta \rightarrow 0$ lo cual equivale a que $v \rightarrow 0$ o que la velocidad de la luz c , sea infinita.

Hemos encontrado k como función de la velocidad. Podemos explicar brevemente como podemos detectar la velocidad de un objeto mediante pulsos enviados con un intervalo de tiempo T . Estos, al rebotar en el objeto que se aleja con velocidad v_o vuelven en un intervalo $(k^2 - 1) \cdot T$. Al medir este intervalo y conociendo T y la expresión –ya obtenida– de k^2 podemos conocer la velocidad. Este es el principio físico que regula el funcionamiento de los radares de velocidad de la policía.

Para dos sistemas alejándose: $k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$

Para dos sistemas acercándose: $\bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$

Ejercicio

Demuestre que:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2\gamma, \quad \text{donde hemos definido } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

V.7.2 Dilatación del Tiempo

Usando la expresión encontrada para $k(v)$ en la sección previa, demostraremos la dilatación del tiempo.

Para ello nos ubicaremos en un sistema de referencia inercial que consideramos en reposo. Este

sistema, conforme a lo expuesto previamente, posee un tinglado de relojes sincronizados con respecto al reloj maestro que se ubica en el origen. La línea de universo de este reloj es S . (Ver (V.31)).

Lo que haremos es comparar el tiempo que marca el reloj de un observador que se aleja con velocidad V (que denominamos S' , con los relojes fijos distribuidos por S y, como dijimos, sincronizados con el reloj maestro de S . Esto lo hacemos, por ejemplo, tomando una foto cuando dos relojes coinciden en un punto.

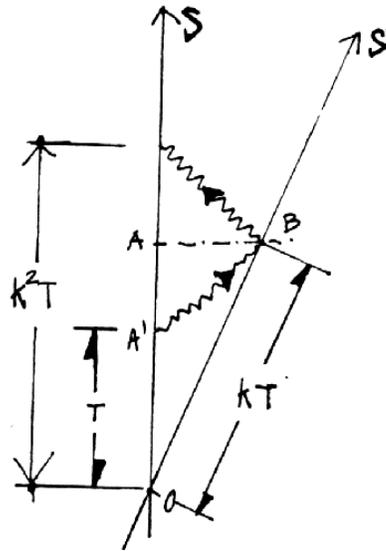
En la figura (V.31), los eventos A y B , son simultáneos en el sistema S . $\Delta t|_S \equiv OA$, son los segundos que avanzó el reloj de S a partir del punto O , que corresponde al encuentro inicial de ambos relojes, S y S' .

Calculamos lo que marca el reloj del observador que está alejándose: $\Delta t' \equiv \Delta t|_{S'} = OB$. Para ello utilizamos los principios de la relatividad especial.

De la geometría de la Figura obtenemos que:

$$OA = \frac{k^2 - 1}{2} T + T = \frac{k^2 + 1}{2} T.$$

El reloj del observador S' , al pasar frente al punto B , marca (de acuerdo a la definición de k), $OB = kT$.



Si comparamos los tiempos que señala el reloj estático en S ubicado en el punto B , con el reloj del observador S' que pasa frente suyo, tenemos: *Figure V.31. Utilizamos el mismo gráfico espacio-tiempo de las demostraciones anteriores.*

$$OA \equiv \Delta t|_S = \frac{k^2 + 1}{2} T, \quad \text{con} \quad OB \equiv \Delta t'|_{S'} = kT,$$

despejando T de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\Delta t|_S = \frac{\Delta t'|_{S'}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{V.17})$$

Hemos usado aquí el resultado del último ejercicio propuesto: $k + 1/k = 2/\sqrt{1 - \beta^2}$. Esto se denomina la dilatación del tiempo. Si transcurre un segundo en S' , es decir $\Delta t' = 1$, entonces $\Delta t > 1$. De acuerdo al observador S , el tiempo transcurre más lento en el sistema S' . \square

Esta conclusión pertenece exclusivamente al observador S . Recordemos que desde el punto de vista de S' , las mediciones realizadas por S , son extrañas, puesto que las hizo con un conjunto de relojes que no estaban sincronizados. Su resultado, por tanto, no permite sacar conclusiones globales, que se extiendan a ambos observadores.

Por ejemplo, afirmar que si el reloj de S' se atrasa con respecto al suyo, S' está en movimiento y S está realmente en reposo. Desde el punto de vista de S' no se puede hacer esta afirmación dado que S comparó dos relojes, el ubicado en A y en B , que no estaban sincronizados. Puesto de otra manera, \overline{AB} , no es una línea de simultaneidad para S' . Si queremos llegar a esa conclusión, S' debe verificar que el mismo retraso se observa desde su sistema de referencia. eso es lo que haremos a continuación.

Ejemplo

Comparar lo que marcan los relojes de S y S' , pero ahora midiendo eventos simultáneos en S' , es decir, relojes sincronizados por S' .

Utilizaremos las transformaciones de Lorentz para resolver este caso. Es un buen ejercicio que dejemos planteado, utilizar el factor $k(v)$ para resolverlo.

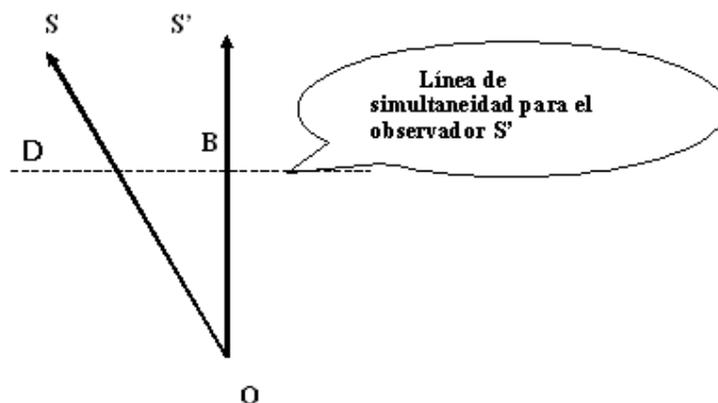


Figure V.32: En la figura aparece la configuración anterior vista ahora por el observador S' que se considera en reposo. De acuerdo a esto, S se aleja hacia la izquierda. \overline{DB} es una línea de simultaneidad para S' y el reloj en D y B están sincronizados. En D coinciden ambos relojes y se comparan.

Las transformaciones de Lorentz relacionan las coordenadas de un evento en S con las de S' . Por ejemplo

$$t_D = \gamma \left(t'_D + \frac{V}{c^2} x'_D \right),$$

donde hemos la fórmula inversa de (V.8) puesto que V se revirtió. Si escribimos la misma ecuación para el evento en el origen y se lo restamos a la esta fórmula, obtenemos

$$(t_D - t_O = \gamma \left[(t'_D - t'_O) + \frac{V}{c^2} (x'_D - x'_O) \right]).$$

pero $x'_O = 0, t'_O = t_O = 0$ por ser el origen y, además $x'_D = -V t'_D$, puesto que es la velocidad del punto D vista desde S' . Reemplazando estos resultados, tenemos

$$\Delta t_D = \gamma \left[\Delta t'_D + \frac{V}{c^2} (x'_D) \right] = \gamma \left[\Delta t'_D + \frac{V}{c^2} (-V \Delta t'_D) \right].$$

. De aquí se obtiene directamente

$$\Delta t_D = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t'_D \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_D = \gamma \Delta t_D. \quad (\text{V.18})$$

Esta es justamente la inversa de la fórmula obtenida anteriormente.

En definitiva, si la comparación de relojes se realiza considerando la simultaneidad establecida por S' , éste observa que el reloj de S se atrasa. Podemos concluir que siempre el observador que realiza las mediciones y por tanto considera la simultaneidad en su sistema de referencia como la correcta, descubre que el tiempo fluye más lentamente para el viajero.

□

La pregunta que permanece en el aire es qué sucede si traigo de vuelta el reloj viajero y lo comparo con el que quedó en reposo... En este caso la comparación es de un evento con otro evento y ya no se requiere sincronización de ningún reloj. Simplemente parten de un mismo punto, va retorna y comparan sus tiempos reloj a reloj, sin intermediarios.

Este problema se conoce como la paradoja de los gemelos y es el ejercicio que estudiaremos en la siguiente sección.

V.7.3 La paradoja de los gemelos: el tiempo transcurrido depende de la trayectoria

A continuación demostraremos que el tiempo no es absoluto y por lo tanto transcurre de forma diferente para distintos observadores en movimiento relativo.

Este problema tradicionalmente se conoce como la paradoja de los gemelos. Consiste lo siguiente: uno de los gemelos permanece en Tierra mientras el otro emprende un viaje interestelar y posteriormente, al volver, se compara con su hermano.

La dificultad técnica que plantea este problema es la aceleración que experimenta el gemelo interestelar en el momento de invertir el sentido en la dirección de su viaje con el objeto de retornar. Las expresiones que hemos usado no se pueden aplicar de acuerdo a los postulados, que excluyen los sistemas acelerados. Para eliminar este problema usaremos tres sistemas inerciales sincronizados y concluiremos que el tiempo, efectivamente transcurre más lentamente en uno de los sistemas de referencia.

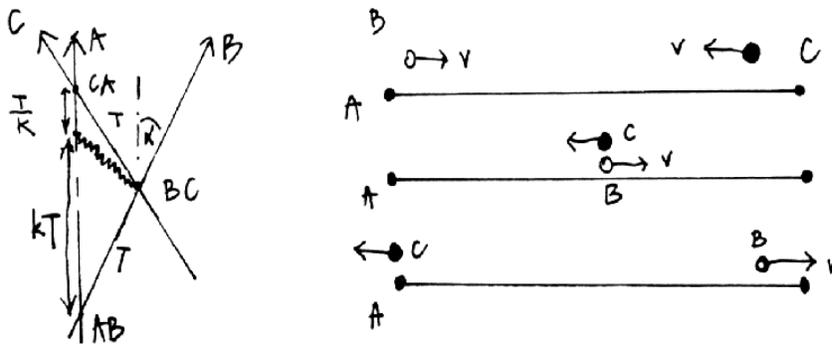


Figure V.33: Nos ubicamos en A, sistema en reposo. B se aleja de A con una velocidad relativa V y C se aproxima hacia A con una velocidad V (según A). A la izquierda se indica el gráfico ct versus x y a la derecha el esquema habitual con la coordenada x en el eje horizontal.

Antes de plantear este problema hagamos un ejercicio cuyo resultado será de utilidad más tarde.

Encontramos la expresión de k en función de v en las páginas anteriores. Note que $k(-v) = 1/k(v)$, es decir que cuando dos observadores se aproximan debemos usar $(1/k)$ en lugar de k para relacionar los intervalos correspondientes

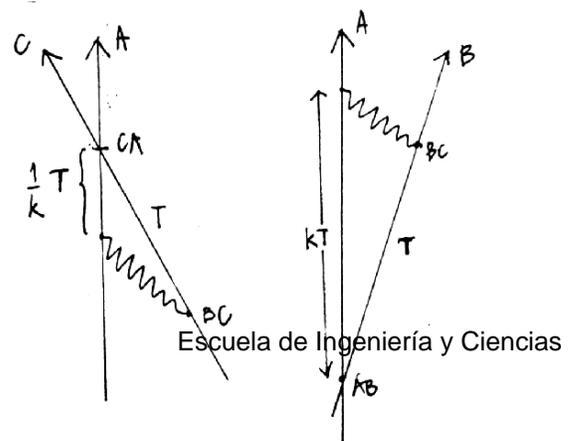


Figure V.34: El factor k y $1/k$ deben ser usados cuando los observadores se alejan y cuando se aproximan.

de tiempo. Para demostrar que el tiempo **no** es absoluto y depende del camino recorrido necesitamos 3 observadores (o relojes) A , B y C .

En el desarrollo del problema distinguimos 3 eventos:

→ A coincide con B definido como: AB

→ B coincide con C definido como: BC

→ C coincide con A definido como: CA

Denominamos T al tiempo indicado por el reloj de B que transcurre entre el evento: [A coincide con B] y el otro evento [B coincide con C]. El intervalo que transcurre entre el evento: [B coincide con C] y el evento [C coincide con A] es también T , según el reloj de C . Esto se puede notar en la Figura, las líneas de universo de C y B son simétricas con respecto a la vertical, porque los trazos que van desde [AB], hasta [BC] y desde [BC] hasta [CA], son idénticos y por lo tanto ambos toman el valor T .

De acuerdo al álgebra de los k el tramo entre los eventos [AB] y [AC] es [$kT + T/k$].

Por otra parte, si en [BC], el observador B accionó el reloj de C y lo dejó marcando T segundos, cuando C llegue al encuentro con A marcará un tiempo $2T$. Comparando ambas cantidades, podemos concluir:

$$\left(k + \frac{1}{k}\right)T \geq 2T$$

Estas expresiones son iguales sólo si $k = 1 \Rightarrow v_0 = 0$, ó $c = \infty$.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 2.$$

De esta forma el tiempo que marca el reloj C es menor que el indicado por A . El tiempo no es absoluto, no transcurre igual para todos los observadores.

En el caso de los gemelos la respuesta es similar a la obtenida aquí. El gemelo de viaje llega más joven al encuentro con su hermano. La diferencia de edad no es la que obtuvimos, puesto que es necesario considerar la aceleración que experimenta durante parte del viaje. En este caso no tiene sentido intentar utilizar el argumento de la simetría de los sistemas inerciales para invalidar el resultado. El gemelo que estuvo de viaje sabe perfectamente que su sistema de referencia, al menos por unos segundos, no fue inercial.

También se puede objetar que en el caso propuesto no se comparan los mismos relojes en A , pero lo esencial aquí es que el reloj C al compararlo con el de A , traía información acerca del

tiempo empleado por un reloj B al recorrer el trayecto que le correspondía. Se demostró entonces que el tiempo contabilizado a lo largo del camino $AB \rightarrow BC \rightarrow y CA$, es más corto que el tiempo contabilizado por S entre AB y CA.

¿Realmente se atrasa el tiempo para un observador en movimiento?

La palabra *realmente* utilizada en la pregunta parece esperar una respuesta que traiga a escena el tiempo absoluto. Al formularla no se hace mención al sistema de referencia que se considera.

La respuesta es que este resultado sólo señala que el sistema de relojes sincronizados por S' se atrasan con respecto a aquellos sincronizados por S . Pero este resultado, de acuerdo a S' no permite concluir nada puesto que, en su opinión, los relojes de S no están sincronizados. Para ilustrar esto, podemos ubicarnos en el sistema de S' y considerar que S está retrocediendo con respecto a nosotros y repetir el mismo cálculo. Lo que obtenemos es que ahora el reloj de S se atrasa con respecto al de S' .

De aquí se desprende que este experimento no permite concluir que el tiempo transcurre diferente en ambos observadores.

Para lograr una respuesta definitiva con respecto a la evolución del tiempo en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, debemos comparar *los mismos relojes dos veces*. Con esta consideración, ya no es posible refutar un resultado debido a la imposibilidad de sincronizar los relojes de los dos sistemas de referencia. En la siguiente sección daremos una respuesta concluyente a este problema.

V.7.4 La contracción del largo de una barra

Definición de longitud

Para medir la *longitud de una barra* un observador en reposo con respecto a ella, se ubica en el medio de la barra y mide el tiempo que demora un rayo de luz en viajar hacia un extremo y volver al punto de partida.

¿Cómo sabemos que estamos en el centro de la barra?

Antes de proceder a medir la longitud de la barra el observador envía en forma simultánea dos rayos de luz hacia ambos extremos de la barra donde serán reflejados. Si recibe de vuelta ambos simultáneamente entonces está justo en el punto medio de la barra. De otra forma deberá desplazarse hasta lograrlo.

¿Por qué medir longitudes con un rayo de luz y no con un metro patrón?

Porque la velocidad de la luz es una constante universal. De esta forma los resultados obtenidos utilizando la luz son válidos en cualquier sistema de referencia inercial.

Contracción del largo

La inclusión del postulado # 3, indica que sólo está definida la distancia espacial –o el largo entre los extremos de una regla– entre dos eventos que ocurren simultáneamente en un sistema de referencia.

Estudiaremos la contracción del largo usando el álgebra de los k .

Por definición la longitud es la distancia *espacial* entre dos eventos simultáneos. Aquí vamos a comparar el largo L' de un barra en reposo en un sistema S' , con el largo de esta misma barra, pero medido en el sistema S , que lo denominamos L . La configuración se indica en la Figura adyacente.

El método que usaremos nos permitirá manipular coordenadas en distintos sistemas de referencia.

Calculemos las coordenadas del evento N en el sistema S . De la Figura se desprende que

$$c \Delta t_+ = (L + v \Delta t_+), \quad \text{y que}$$

$$c \Delta t_- = (L - v \Delta t_-).$$

Este resultado se obtiene siguiendo la trayectoria del punto M en la Figura. En $t = 0$ su coordenada espacial es L , en Δt_+ es $[L + v \Delta t_+]$, puesto que se está alejando de S .

En Δt_+ , la barra está representada por NN' según el observador S . En ese instante se envía un rayo de luz hacia el origen de la barra. Lo alcanza en Δt_- segundos más tarde y la distancia que debe recorrer es el largo de la barra menos lo que ésta se acerca, en el intervalo de tiempo Δt_- , una distancia $L - v \Delta t_-$. Despejando $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$ de estas dos expresiones obtenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}. \quad [i]$$

V.7. GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

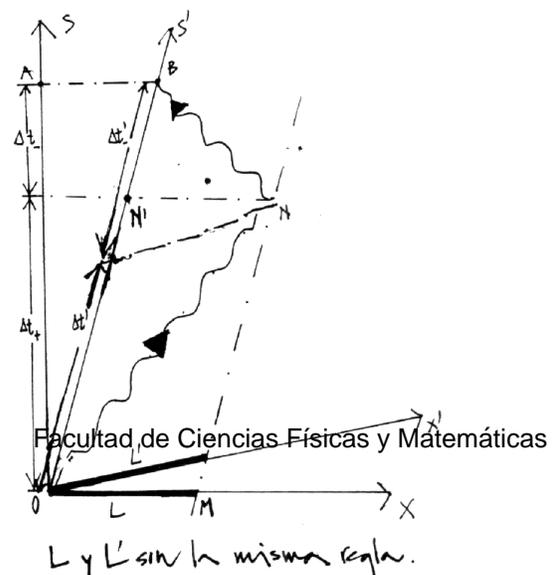


Figure V.35: Qué mide el observador S y qué mide el observador S' . Líneas de simultaneidad

Como los eventos marcados por A y B son simultáneos, utilizando los resultados del último ejercicio, tenemos:

$$\Delta t_+ + \Delta t_- = \frac{\Delta t'_+ + \Delta t'_-}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad [ii]$$

Finalmente, como en el sistema S' , el rayo de luz parte del origen de la barra en $t_0 = 0$ y vuelve a S' en B , después de rebotar en el otro extremo de la barra, entonces tenemos:

$$c[\Delta t'_+ + \Delta t'_-] = 2L' \quad [iii]$$

Despejando $(\Delta t_+ + \Delta t_-)$ de las ecuaciones [i] y [ii], e incluyendo el valor de $(\Delta t'_+ + \Delta t'_-)$ obtenido en [iii], tenemos la relación deseada entre L y L' :

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (V.19)$$

Comprobamos que $L < L'$, al medir el largo de una barra en movimiento, medimos un largo menor. Como hemos señalado, este hecho es consecuencia de que la simultaneidad es relativa. A la barra no le pasa absolutamente nada, no se comprime.

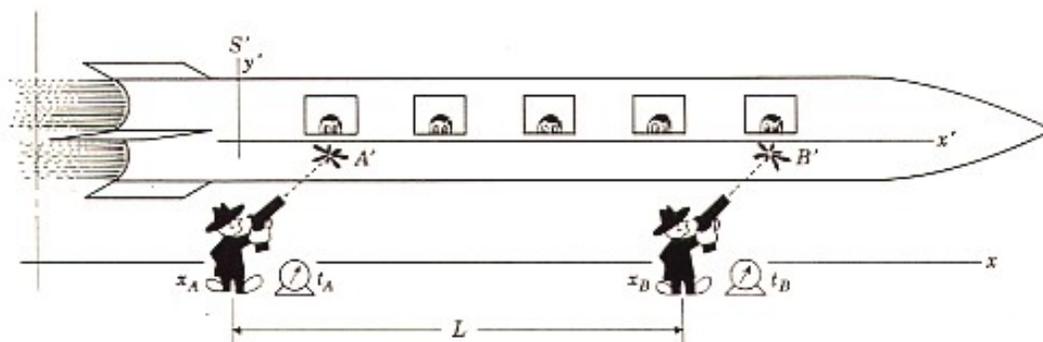
V.7.5 El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein

Definimos VER cuando todos los fotones emitidos desde el objeto que nos interesa llegan simultáneamente a nuestro ojo. Es claro que los puntos más alejados del ojo deben emitir antes los pulsos de luz para llegar al mismo tiempo que aquellos ubicados en una posición más favorable.

Medir es una operación que involucra los siguientes elementos: un sistema de referencia inercial determinado, una red de relojes sincronizados en dicho sistema de referencia, cada uno con una cámara que señale un evento, el tiempo y sus coordenada. El observador en este sistema recopila los datos y compara. Por ejemplo si quiere medir el largo de una barra en movimiento con respecto a su sistema de referencia, debe ubicar dos fotos, una en que aparezca el comienzo de la barra y otra con el otro extremo de la misma barra. Ambas deben indicar el mismo tiempo (simultaneidad). La diferencia entre las coordenadas permite conocer el largo de la barra.

Ejemplo

Un tren S' se mueve con velocidad $v = 0.6c$ en la dirección $+x$ con respecto a un observador en reposo en el sistema S . Dos rufianes con sendos atomizadores, se ubican a $L = 5m$ de distancia en el sistema S . Ambos rufianes disparan simultáneamente de acuerdo a relojes sincronizados en el sistema S . Al gatillar el atomizador aparecen 2 manchas A' y B' en el tren. Los rufianes aseguran que la distancia entre las manchas es $L = 5m$ (La distancia que separa los atomizadores del tren es *despreciable*).



- Los pasajeros del tren llevan sus relojes sincronizados. De acuerdo a los pasajeros del tren ¿quién disparó primero?
- ¿Cuál es la distancia entre las dos manchas medidas por un observador en *reposo con respecto al tren*?
- ¿Cuál es la distancia entre los dos rufianes, de acuerdo a los pasajeros en *reposo con respecto al tren*?

Respuesta

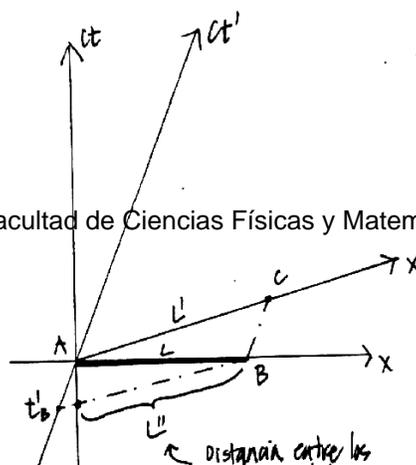
Del gráfico se desprende que B sucede antes que A , según un observador en la nave. Calculemos la diferencia de tiempo. Debemos comparar los eventos A y B en los dos sistemas de referencia. En el sistema fijo a la tierra los eventos A y B son simultáneos y ocurren a una distancia L :

$$\Delta x = L, \text{ y } \Delta t = 0.$$

En el tren, las coordenadas son

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = -\gamma \frac{v L}{c^2}.$$

Donde $\Delta t' \equiv [t'_B - t'_A] = -\gamma \frac{L v}{c^2}$.



$$ct'_B = 0 - 5 \frac{3}{5} \frac{5}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$t'_B = 1,25 \times 10^{-8}.$$

Las dos manchas una vez en el tren se propagan rígidamente con él, es decir su línea de universo nace en A y B pero a partir de entonces se propaga paralela a la línea t' . La distancia entre las manchas, medida con un metro por un observador en la tren es AC , que definimos como L' .

¿Cuánto vale L' ?

i) *Primer método.*

De acuerdo a las transformaciones de Lorentz, la coordenada del punto C en función de las coordenadas del mismo evento en tierra, son:

$$x'_c = \gamma [x_c - v(t_c - t_A)],$$

pero x_c es la posición en el sistema S del extremo de la barra después que ha transcurrido un intervalo $(t_c - t_B) \equiv (t_c - t_A)$, su valor es:

$$x_c = x_B + v(t_c - t_A), \text{ además } x_B \equiv L, \\ x_c = L + v(t_c - t_A),$$

de modo que:

$$x'_c = \gamma [L + v(t_c - t_A) - v(t_c - t_A)] = \gamma L.$$

$$L' = \gamma L.$$

ii) *Segundo método.*

C es la proyección de la coordenada x' de B . Eso es precisamente lo que representan las Transformaciones de Lorentz: una proyección del vector (AB en este caso, del sistema (x, t) al sistema (x', t')). La proyección de B en x' es simplemente $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma L$, ($\Delta t = 0$, puesto que AB es simultáneo S). Además $x'_B = x'_C$ puesto que B y C están en la línea de universo de un observador en reposo en S' . $L' = 1.25L = 6m$. Note que $AC > AB$ $AC_1 > A_1B$.

c) La línea de universo de los dos rufianes son rectas verticales en el diagrama de espacio-tiempo fijo en la tierra (S).

A y B señalan la posición de los rufianes. Esta distancia según un observador en el tren es la intersección entre la línea de universo de B y la línea de simultaneidad de un observador en el tren (por ejemplo : el punto C. La coordenada de C en el sistema (t', x') :

$$x'_c = \gamma [x_c - (t_c - t_B)v],$$

$$x_c = x_B = x_B - 0 = x_B - x_A = L,$$

$$x'_c = x'_c - x'_A = L'',$$

$$L'' = \gamma [L - v(t_c - t_B)]$$

$$\text{pero } t'_c - t'_A = \gamma \left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_c - x_A) \right]$$

$$\text{A y C son simultáneos en } S', \text{ luego: } \gamma \left[(t_c - t_A) - \frac{v}{c^2}L \right]$$

$$t_B \equiv t_A \quad (\text{simultáneo en } S)$$

$$x_c \equiv x_B \quad \text{en } S$$

$$L'' = \gamma \left[L - \frac{v^2}{c^2}L \right] = \frac{1}{\gamma}L \cdot \square$$

Ejemplo

Sean S y S', dos sistemas inerciales que coinciden en un instante. S' se mueve con respecto a S en la dirección $(x+)$, con una velocidad $v = \text{constante}$. En el origen de S' existe una pantalla de cine que proyecta una película de t' minutos, la cual es vista por un observador que se encuentra en el origen de S. ¿ Cuánto tiempo dura la película para el observador en S? Suponer $v = 0,6 c$.

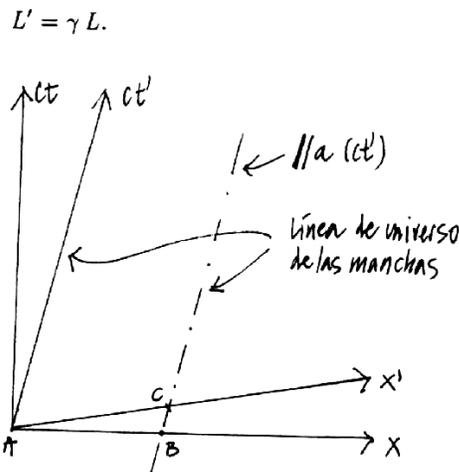
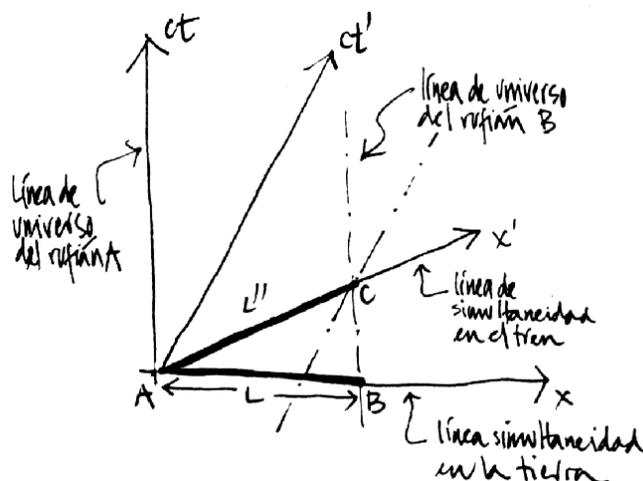


Figure V.37: Distancia entre manchas.



Utilizando las transformaciones de Lorentz, se obtiene:

$$\text{Para } S': \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right),$$

$$\text{Para } S: \quad \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right).$$

Sabemos lo que dura la película en $S' \Rightarrow \Delta t'$ es conocido (con respecto a las mediciones que hace un observador en S'). Además $\Delta x' = 0$ (la pantalla permanece fija en S'). Luego $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Sin embargo, debemos calcular el tiempo que demora en llegar a S el último fotón de la pantalla.

i.e. $\Delta t^* = \frac{\Delta x}{c}$ ya que cuando en S' terminó la película, ésta aún no ha finalizado en S .

Por otra parte $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma v \Delta t'$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' + \Delta t^* = \gamma \Delta t' \left(1 + \frac{v}{c} \right) = 2 \Delta t'$$

V.7.6 Las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz son las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un evento $P = (t_p, x_p)$, en un sistema inercial S , con las coordenadas que describen el mismo evento P , en

otro sistema S' : $P = (t'_p, x'_p)$.

Constituyen el equivalente a las transformaciones de Galileo para ir de un sistema inercial a otro con velocidad v_0 .

El punto P es lo que hemos denominado un evento en el espacio-tiempo. Con respecto al observador A , el punto P tiene coordenadas $P(t, x)$ puesto que consideramos sólo dos coordenadas una espacial y otra temporal, para mantener la simplicidad. En la figura, el origen del tiempo se ubica arbitrariamente en cualquier punto de la línea de universo de A .

El sistema de coordenadas se ubica con el observador A , éste tiene coordenadas $(t, 0)$. El punto Q es simultáneo con P y por lo tanto ambos tienen la misma coordenada temporal en el sistema A .

$$Q = Q(t, 0), \quad P = P(t, x).$$

Para enviar un rayo de luz desde A hasta P , debo gatillar el haz de luz en el instante $(t - x/c)$. Dicho rayo rebota en P y alcanza A en el instante $(t + x/c)$.

La cantidad (x/c) tiene dimensiones de tiempo.

Supongamos que existe otro observador inercial B , que asigna al evento P , las coordenadas (t', x') . La relación entre (t, x) y (t', x') , que respeta los postulados de la relatividad especial, se denominan las transformaciones de Lorentz. Ubicamos el origen del tiempo en la intersección de las líneas de universo de A y B . Al enviar un rayo de luz desde A , este cruza la línea de universo de B en $(ct' - x')$ y posteriormente alcanza el punto P . De vuelta toca la línea de universo de B en $(ct' + x')$ y A en $(ct + x)$.

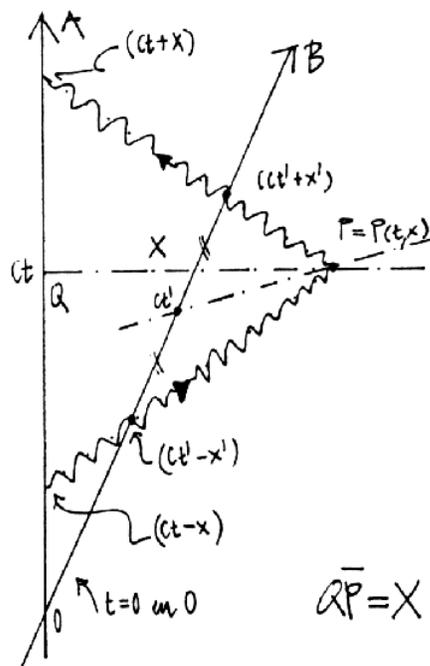


Figure V.38: Un rayo de luz cruza a los dos observadores A y B , rebota en el evento P y regresa al observador A , cruzando la trayectoria de B . Geométricamente se relacionan las coordenadas de $P(t, x)$ medidas por A y las coordenadas del mismo evento $P(t', x')$ vistas por B .

Usando el método de la función k , podemos relacionar ambos sistemas de referencia.

$$ct' - x' = k(ct - x),$$

Este caso corresponde a la relación que existe entre el tiempo que transcurrió entre el origen del

tiempo (intersección de las líneas de universo de A y B) y el instante en que se envía el primer rayo desde A y el tiempo que tarda B en recibirlo: $T' = kT$.

El siguiente caso, corresponde al rayo de luz reflejado desde el punto P y relaciona el tiempo que ha transcurrido según el reloj de B cuando recibe el rayo de luz, con el tiempo que ha transcurrido para A cuando recibe de regreso el mismo rayo de luz:

$$(ct + x) = k(ct' + x')$$

De estas dos ecuaciones se puede despejar x' y t' como funciones de x y t .

$$2ct' = k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

$$2x' = -k(ct - x) + \frac{1}{k}(ct + x),$$

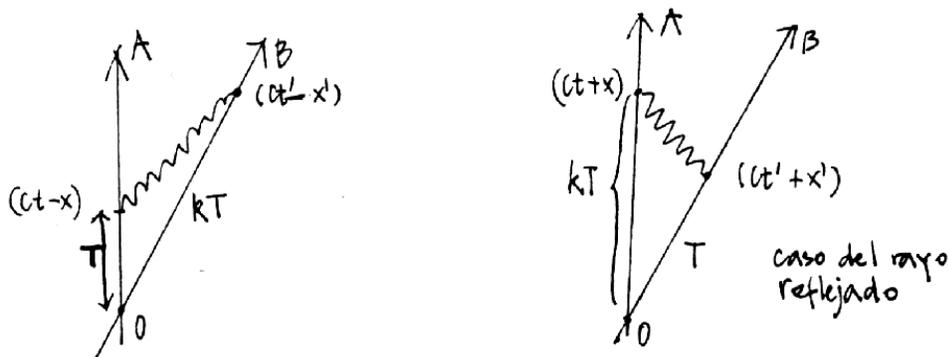


Figure V.39: En la figura de la izquierda debemos identificar T con $(ct - x)$ y kT con $(ct' - x')$. En el diagrama de la derecha, se identifica $(ct' + x')$ con T y $(ct + x)$ con kT .

pero recordando que:

$$\frac{1}{2}\left(k \pm \frac{1}{k}\right) = \begin{cases} \gamma \\ \beta\gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Donde hemos definido $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Despejando x' y t' de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\{x - vt\}, \\ t' &= \gamma\left\{t - \frac{v}{c^2}x\right\}. \end{aligned} \tag{V.20}$$

V.8 El retorno de lo absoluto, los invariantes.

Se puede verificar, a través de las transformaciones de Lorentz, que la combinación

$$(ct')^2 - x'^2 = ct^2 - x^2$$

es un *invariante*: posee el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Esta *distancia* la denominamos $(\Delta s)^2$. Aquí hemos encontrado una cantidad que tiene un valor independiente del sistema de referencia, es el equivalente al tiempo absoluto en la teoría de Galileo y Newton.

$$\Delta s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Sabemos por experiencia lo importante que son las cantidades conservadas en mecánica, electricidad...etc.. El equivalente en relatividad especial son los *invariantes*.

Como ejercicio, podemos reobtener la dilatación del tiempo (que el reloj en B funciona más lento que un reloj, idéntico, en A). O_1Q y O_2P son líneas (o planos en tres dimensiones) de simultaneidad con respecto al observador A . Llamemos $\Delta s = \overline{PQ}$.

$\Delta s^2 = c^2 T'^2$, puesto que P y Q se ubican en la línea de universo de B y por lo tanto $x'_P = x'_Q$.

$$\Delta s^2 = \overline{PQ}^2 = c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2$$

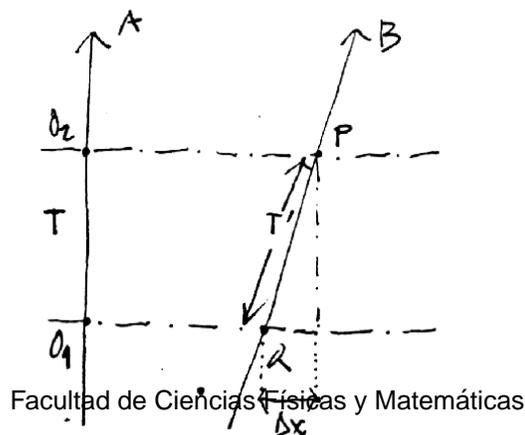


Figure V.40: .

$$\overline{PQ}^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2.$$

Hemos definido $\Delta x = x_P - x_Q$.

Como $(\Delta s)^2$ es un invariante,

$$\Delta s^2 = c^2 T'^2 = c^2 T^2 - (\Delta x)^2$$

$$cT' = cT \left[1 - \left(\frac{\Delta x}{cT} \right)^2 \right]^{1/2},$$

pero $\Delta x/T = V_o$, velocidad con que B se aleja de A.

$$T' = T \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow T = T' / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Si $T = 1$ s, $T' < 1$, puesto que $\beta \leq 1$ y $1/\sqrt{1 - \beta^2} \geq 1$. Esto se denomina la dilatación del tiempo.

Ejercicio

En la Figura A y B son dos eventos en el espacio-tiempo.

$$S_{AB}^2 = c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2$$

Si ubico mi sistema de coordenadas en el evento A, el lugar geométrico de todos los eventos que están a una distancia (espacio temporal) $S_{AB} = \text{Constante}$, de A se ubican en la hipérbola indicada en la Figura 2.

a.- ¿En qué sistema de coordenadas los eventos A y B de la figura 1 quedan representados por el intervalo vertical A y B''' de la figura 3. Haga un esquema cualitativo de dicho sistema de coordenadas (preferible sobre uno similar al de la Fig. 1).

b.- ¿En qué sistema de coordenadas los eventos A B de la figura 1 quedan representados por el intervalo A-B' de la figura 3? Dibuje cualitativamente dicho sistema de coordenadas.

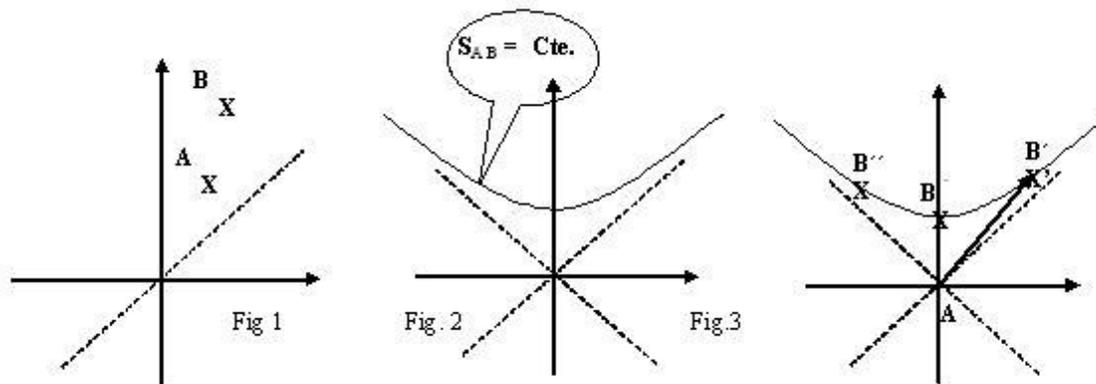


Figure V.41:

V.9 Composición de velocidades

V.9.1 Velocidades paralelas.

El método de los productos de la función k para obtener la suma de las velocidades no es el más sencillo. Sirve para ilustrar que todas las fórmulas de la relatividad especial se pueden obtener a través de su uso.

A continuación incluimos una derivación alternativa.

Para ello necesitamos usar el Postulado # 5 planteado previamente.

Supongamos que un cuerpo P viaja con velocidad u' con respecto a un sistema S' . A su vez, este sistema viaja con una velocidad v con respecto a s . Queremos calcular la velocidad u de este cuerpo con respecto al sistema s .

Designamos las coordenadas de P con respecto a S' como (t'_p, x'_p) . Las coordenadas de este punto con respecto al sistema s son (t_p, x_p) . La relación entre ambas coordenadas está dada por la transformación de Lorentz (donde hemos suprimido el subíndice p)

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x).\end{aligned}$$

Por definición

$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$, la velocidad P con respecto al sistema S' . Por otra parte:

$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, la velocidad de P c/r al sistema S

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}}$$

Despejando u de esta ecuación

$$u' \left(1 - \frac{v \cdot u}{c^2}\right) = u - v,$$

$$\left(1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}\right)u = u' + v,$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$$

Esta es la ley de composición de velocidades. Es directo comprobar que si $u' = c$, $v = c \Rightarrow u = c$.

No es posible lograr velocidades mayores que la velocidad de la luz sumando velocidades con esta ecuación relativista.

Velocidades Perpendiculares

Supongamos que el observador en S' se mueve en un eje perpendicular a la dirección de desplazamiento de los dos sistemas de referencia, digamos el eje y . La velocidad relativa, de acuerdo a un observador en S es:

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \left[\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2}\right]},$$

dividiendo ambos factores por Δt y definiendo

$$v'_y \equiv \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, y$$

$$v_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t}, \text{ obtenemos:}$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]} = \gamma v_y$$

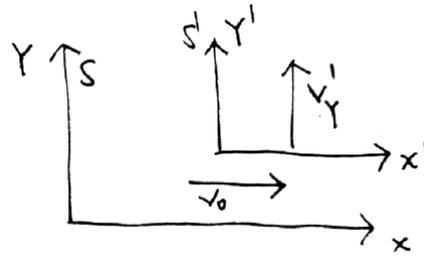


Figure V.42: .

Esta es la fórmula que relaciona una velocidad perpendicular a la dirección de movimiento en el sistema S' , con la velocidad medida desde el sistema de referencia en reposo.

El objetivo del siguiente ejemplo es recordar que cuando las mediciones se realizan en el mismo sistema de referencia, toda la cinemática y la geometría de un curso de Introducción a la Física son válidas. Sólo cuando queremos relacionar medidas en sistemas de referencia inerciales diferentes es necesario recurrir a las transformaciones de Lorentz y a la geometría del espaciotiempo.

Ejemplo

Un sistema S' está en movimiento uniforme con respecto a otro, S . En S' se ubica una barra que forma un ángulo θ' con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuál es la dirección de la barra medida por un observador en S .

Solución: De la figura se obtiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \cot \theta'$$

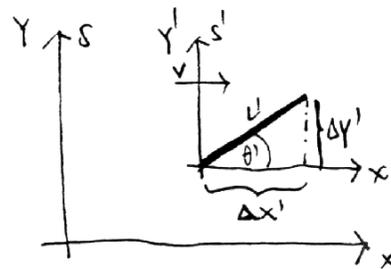


Figure V.43: .

Usamos esta relación porque $\Delta y'$ es perpendicular al movimiento y por el Postulado # 5 : $\Delta y' = \Delta y$.

Cualquier diferencia en el valor del ángulo que aparezca en S proviene de la relación entre $\Delta x'$ y Δx . Gráficamente lo que mide S se ve en la figura V.43:

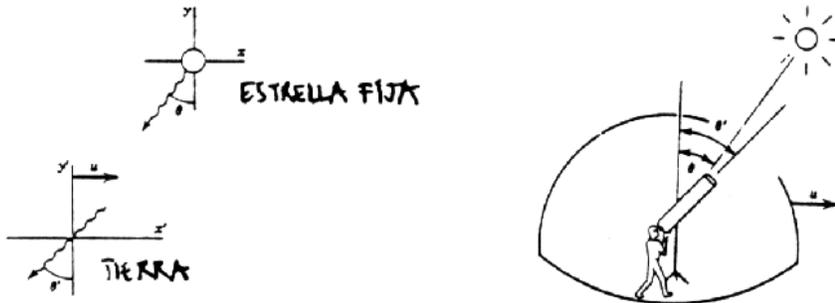


Figure V.45: A la izquierda aparecen los dos sistemas de referencia que están en movimiento relativo. A la derecha se da una idea del cambio de dirección que se le debe dar al telescopio para enfocar la estrella fija (sin movimiento propio).

En forma no-relativista las velocidades se suman en forma usual.

Como la luz - de acuerdo a la figura - va al encuentro del sistema de referencia, la velocidad relativa aumenta.

$$v'_x = -c \cos \theta$$

$$v'_y = -(u + c \operatorname{sen} \theta)$$

b) Ahora procedemos con el formalismo relativista.

De acuerdo a las fórmulas dadas

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left[1 - \frac{u v_x}{c^2} \right]}$$

$$v_x = -c \operatorname{sen} \theta \quad v_y = -c \cos \theta$$

$$v'_x = -\frac{[c \operatorname{sen} \theta + u]}{1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c}} \quad v'_y = -\frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c} \right]}$$

$$\tan \theta' = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c}} \times \frac{1}{\left\{ \frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{u \operatorname{sen} \theta}{c} \right]} \right\}}$$

$$\tan \theta' = \gamma \frac{u + c \operatorname{sen} \theta}{c \cos \theta} = \gamma \left[\tan \theta + \frac{u}{c \cos \theta} \right]$$

La diferencia con el tratamiento no-relativista es un factor γ en frente de toda la expresión.

Ejercicio

Explique si la figura que se acompaña es correcta o no. Justifique su respuesta.

Un par de comentarios finales con respecto al tiempo. Es la variable que se puede determinar con mayor precisión. Esta es una ventaja técnica, que nos permite hacer experimentos y confrontarlos con predicciones bien precisas, como ya lo describimos anteriormente.

Por otra parte, utilizando las palabras de Penrose [10]: "...la relatividad especial nos enseña algo profundo acerca de la realidad física, en relación a la naturaleza del tiempo".

Una de estas enseñanzas —como hemos visto—, se refiere al cambio en el concepto de simultaneidad, dos fenómenos A y B que ocurren al mismo tiempo en un sistema de referencia, de acuerdo a otro observador que viaja con una velocidad v , constante, con respecto al anterior, A ocurre antes que B . El concepto de simultaneidad deja de ser absoluto.

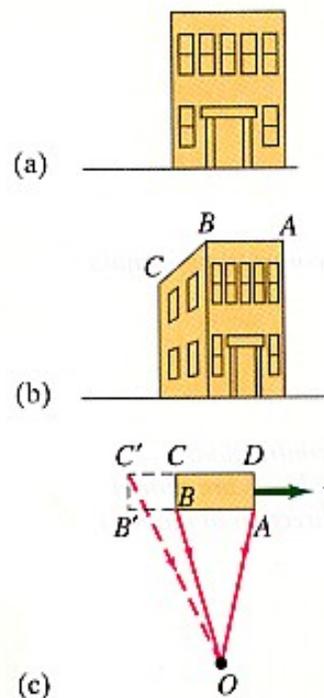


Figure V.46:

Composición de velocidades usando el factor k del efecto Doppler.

Usaremos el álgebra de las funciones k para encontrar la composición de velocidades.

Los tres sistemas de coordenadas están relacionados mediante las transformaciones siguientes, el sistema A con B: $T' \xrightarrow{u} k_{AB} T$, el sistema B con C: $T'' \xrightarrow{v} k_{BC} T'$. A partir de estas relaciones podemos conocer T en función de T'' : $T'' \xrightarrow{V} k_{AB} k_{BC} T$. Si $V \equiv V_{AC}$, es la velocidad relativa del sistema C con respecto a A entonces se debe cumplir que $k_{AC} = k_{BC} k_{AB}$. Reemplazando cada uno de los k por sus respectivas velocidades tenemos:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{k_{AC}^2 - 1}{k_{AC}^2 + 1} = \frac{k_{AB}^2 k_{BC}^2 - 1}{k_{AB}^2 k_{BC}^2 + 1}$$

De aquí, haciendo el álgebra correspondiente, obtenemos la Ley de Composición de velocidades.

$$V_{AC} = \frac{(u + v)}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Para poner a prueba esta relación, supongamos que un carro se mueve con velocidad $c/2$ con respecto a la tierra. Sobre el mismo carro un atleta, super-lenteja corre con una rapidez $c/2$ en el mismo sentido que el movimiento del carro. ¿Cuál es la velocidad de este super atleta con respecto a la tierra?

Reemplazando en la fórmula anterior, tenemos:

$$V_{AC} = \frac{(c/2 + c/2)}{1 + \frac{c^2}{4c^2}} = \frac{4c}{5}$$

La velocidad resultante es menor que la velocidad de la luz. La suma de velocidades relativistas es una expresión no-lineal, a diferencia del caso no-relativista.

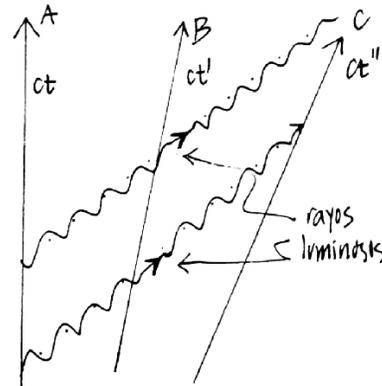


Figure V.47: .

V.10 Ejercicios Resueltos

El siguiente ejemplo ilustra una situación que no corresponde a lo que estamos acostumbrados y que

sucedería si existieran objetos *macroscópicos* que viajaran a velocidades cercanas a las de propagación de la luz. O, a la inversa, qué sucedería si la velocidad de la luz tuviera un valor más pequeño.

Nuestra experiencia indica que si un avión (o helicóptero) se acerca a una muralla iluminándola con un foco, como se ilustra en la Figura, la zona iluminada se acerca desde infinito hacia la muralla. Mostraremos en este ejemplo, que es posible que el movimiento de la sombra proyectada por una muralla debido al foco en movimiento, puede desplazarse desde la muralla hacia infinito, si el foco (o el avión) se acerca a velocidades cercanas (pero inferiores) a la velocidad de propagación de la luz.

Ejemplo

Un avión viaja en forma rectilínea a una velocidad u , cercana a la velocidad de la luz y a una altura H sobre el suelo. Una linterna, encendida al pasar el avión, emite un rayo de luz pasando apenas sobre el muro.

Dos observadores A y B en reposo, descansan detrás del muro de altura h . B se ubica justo detrás del muro, mientras que A permanece a una distancia ℓ de B .

Al pasar sobre la muralla (punto D , en la figura) el avión enciende otra linterna que ilumina al observador B . En este ejemplo, nos interesa sólo estas dos linternas, la situada en el punto P y apuntando sobre el borde superior de la muralla y la situada en el punto D , justo sobre la muralla y apuntando en forma vertical sobre B .

a) Encuentre el valor que debe tomar la velocidad u del avión de modo que el destello (fotón) emitido desde la linterna en P , al ser encendida por el paso del avión, alcance al observador A justo en el instante en que el fotón, emitido desde la linterna situada en el punto D , alcanza al observador B .

Hallar el rango de valores del ángulo ϕ para el cual ocurre esta situación.

b) Demuestre que si la velocidad del avión es mayor que el valor encontrado en la pregunta anterior (pero siempre menor que la velocidad de la luz), entonces la oscuridad que hay en el lado izquierdo del muro se propaga desde B , al lado de la muralla, hacia A . Justo lo opuesto a lo que dicta el sentido común.

Este es un ejercicio de cinemática no-relativista.

Solución

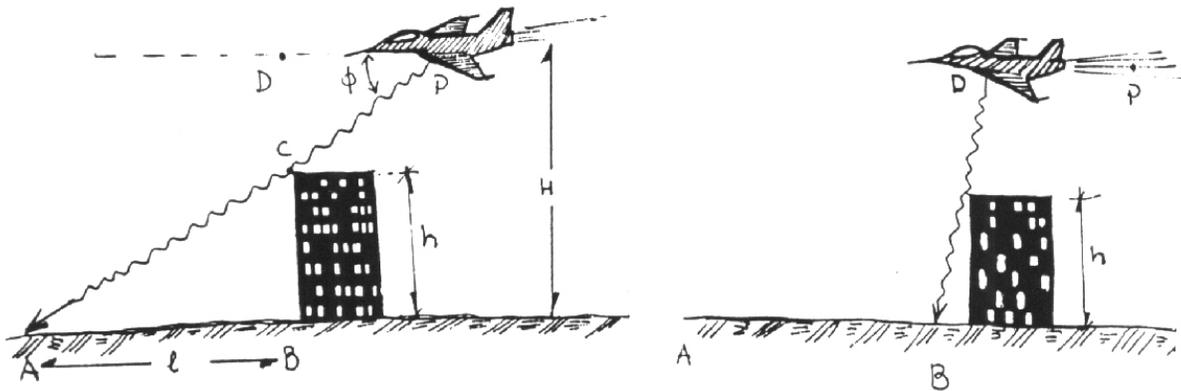


Figure V.48: Al pasar por los puntos **P** y **D** el avión enciende una linterna ubicada en cada uno de dichos puntos y que apunta en la forma indicada.

a) Para encontrar el valor buscado para u , calcularemos el tiempo que tarda el rayo de luz en recorrer los dos caminos propuestos en el enunciado (ver Figura):

$$T(P \rightarrow C \rightarrow A) \equiv T_A,$$

$$T(P \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B) \equiv T_B.$$

Calculemos T_A .

Como los triángulos rectángulos $\triangle CDP \sim \triangle CBA$, entonces

$$\frac{\bar{AP}}{\bar{AC}} = \frac{H}{h}, \quad \text{de aquí se obtiene } \bar{AP} = \frac{H}{h} \bar{AC} = \frac{H}{h} \sqrt{\ell^2 + h^2},$$

donde hemos usado $\bar{CA} = \sqrt{h^2 + \ell^2}$.

Pero T_A es el tiempo que el fotón demora en recorrer la distancia \bar{PA} , de modo que:

$$T_A = \frac{H}{h} \sqrt{h^2 + \ell^2} \cdot \frac{1}{c}. \quad (\text{V.21})$$

Para calcular la velocidad u de modo que el destello emitido en D llegue a B simultáneamente con el fotón que salió desde P y alcanza A , debo considerar el tramo PD que recorrió el avión.

$$T_B = T(P \rightarrow D) + T(D \rightarrow C \rightarrow B).$$

El tiempo que transcurrió entre $P \rightarrow D$ es

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\bar{P}D}{u}.$$

De la Figura se tiene:

$$\frac{\bar{P}D}{\bar{D}C} = \frac{\ell}{h},$$

de modo que

$$\bar{P}D = \frac{\ell}{h} \bar{D}C = \frac{\ell}{h} (H - h), \quad (\text{V.22})$$

de esta forma

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\ell(H - h)}{h u}.$$

El tiempo de viaje del destello entre D y B es:

$$T(D \rightarrow B) = \frac{H}{c}$$

de donde se puede obtener el tiempo que tarda el rayo en alcanzar el punto B , contando el instante desde que el avión encendió la linterna en el punto P :

$$T_B \equiv T(P \rightarrow B) = \frac{\ell(H - h)}{h u} + \frac{H}{c}.$$

Si imponemos la condición que A y B reciban los destellos simultáneamente, se debe cumplir que $T_A = T_B$, y de esta ecuación obtenemos la condición buscada:

$$\frac{\ell(H - h)}{h u} + \frac{H}{c} = \frac{H}{c} \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2}}{h},$$

despejando u/c , obtenemos:

$$\frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} - \frac{h}{\ell}}$$

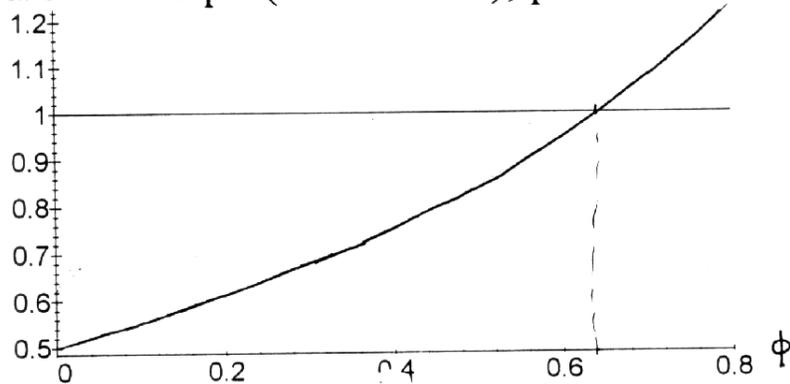
$$\text{como } \frac{h}{\ell} \equiv \tan \phi, \quad \text{entonces: } \frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\left[\frac{1}{\cos \phi} - \tan \phi\right]}. \quad (\text{V.23})$$

El ángulo ϕ debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{u}{c} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{\cos \phi} > \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

En el gráfico que se acompaña se puede estimar el rango de valores posibles que puede tomar ϕ .

u/c versus ϕ (en radianes), para $h/H=0.5$



b) Es claro que si la velocidad del avión u aumenta, entonces el destello emitido en P , llega a A después que el emitido desde C , puesto que el avión viaja más rápido y el tiempo T_{PD} se acorta.

Si el avión viaja con una velocidad $u = u(\phi)$ que se ajusta a la ecuación V.23, la región \bar{AB} se ilumina en forma instantánea.

Si

$$1 > \frac{u}{c} > \left(\frac{1 - \frac{h}{H}}{1 - \operatorname{sen} \phi}\right) \cos \phi.$$

entonces la zona \bar{AB} se ilumina desde B hacia A , siempre que no emita destellos cuando $\phi < 0,6$. Para $\phi > 0.6$ no se cumple que $\frac{u}{c} < 1$.

Ejemplo

La Paradoja del Granero

Considere un atleta corriendo con una garrocha de largo propio 20 m. (La velocidad del atleta con respecto al granero es de $\sqrt{3} \frac{c}{2}$). Éste sostiene la garrocha de modo que se mantiene paralela a

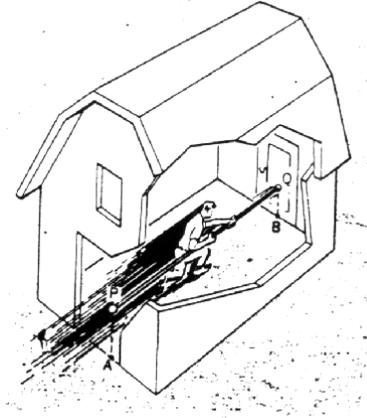


Figure V.49:

la dirección de movimiento del atleta. En su carrera, el deportista pasa por un granero de longitud propia = 10 m. ¿ Sería posible cerrar los dos extremos del cobertizo de manera que el atleta y la garrocha queden atrapados en su interior?

Analice su respuesta desde el punto de vista del atleta y del observador en el interior del granero.

Solución

La paradoja del granero.

Solución:

Sea $L_g \equiv$ longitud propia del granero, $L_g = 10$ m.

$L \equiv$ longitud propia de la garrocha, $L = 20$ m.

i) Análisis con respecto al atleta:

El atleta opina que L_g sufre una contracción puesto que ve aproximarse al granero con velocidad $\sqrt{3}\frac{c}{2}$

$$\text{luego } L_g^{(A)} = L_g \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{c^2}} = \frac{L_g}{2} = \frac{10}{2} = 5m$$

y como la longitud de su garrocha es L (largo propio)

⇒ para el atleta es imposible quedar atrapado en el interior del granero puesto que: $L > L_g/2$

ii) Análisis con respecto al observador parado en el granero.

El observador B ve aproximarse al atleta con $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, por lo tanto, la contracción de la garrocha es:

$$L^{(B)} = L \sqrt{1 - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{c^2}} = \frac{L}{2} = \frac{20}{2} = 10m$$

y como $L_g = 10m$ (largo propio del granero) entonces para observador B es perfectamente posible que el atleta (A) quede atrapado en el granero, ya que:

$$L^{(B)} = L_g \quad L^{(B)} \equiv \text{long. medida por } B \text{ de la garrocha de } A$$

Alternativa # 2: Uso directo de las Transformaciones de Lorentz.

$$\begin{aligned} \text{sea } \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \end{aligned}$$

donde **1** y **2** eventos que indican la entrada y salida del granero para análisis (i) y el fin y comienzo de la garrocha en análisis (ii)

Las transformaciones de Lorentz son:

$$\begin{aligned} (*) \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ (**) \Delta t &= \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \end{aligned}$$

i) s' desea medir la longitud del granero ⇒ $\Delta t' = 0$ en (*) ⇒ $\Delta x = \gamma\Delta x'$

$$\begin{aligned} \Delta x &\equiv \text{longitud granero medido por } s \\ \Delta x' &\equiv \text{longitud granero medido por } s' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta x' = L_g^{(A)} = \frac{L_g}{\gamma} = \frac{L_g}{2} < L$$

⇒ Para s' es imposible quedar atrapado

ii) Ahora

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = \text{largo garrocha con respecto } s \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = \text{largo garrocha con respecto } s' \end{aligned}$$

S desea medir la longitud de la garrocha $\Rightarrow \Delta t = 0$

$$\text{de(**)} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$$

$$\text{en(*)} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

$$L^{(B)} = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} = L_g$$

\Rightarrow Para S es posible quedar atrapado

V.11 Apéndice A: Las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS

Incluimos a continuación las ecuaciones de Maxwell en el sistema MKS a modo de información.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad c^2 \nabla \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Este conjunto de ecuaciones se puede resolver en forma general. Las integrales son:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dv_2$$

$$A(1, t) = \int \frac{\vec{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dv_2$$

Note que aparece un término $t' = t - r_{12}/c$ en el argumento de la densidad de carga y la densidad de corriente. Esta variable t' se denomina el tiempo retardado y señala que el efecto en el instante t y en \vec{r}_2 corresponde al efecto de la carga debido a su posición $|\vec{r}_{12}|/c$ segundos antes. esto hace las ecuaciones no-lineales y difíciles de resolver.

V.12 Apéndice B: ¿Qué es el tiempo?

El tiempo se define en forma tal que la descripción del movimiento resulte simple [9]. De hecho, uno de los logros de Galileo en 1583, fue el convertir un péndulo en una máquina confiable para registrar el paso del tiempo. Otro de los aciertos de Galileo fue utilizar un reloj de agua para tabular el tiempo durante la caída libre de los cuerpos. Éste fue también el origen de la utilización de planos inclinados y poleas, que surgieron como una forma de hacer la caída libre más lenta y por tanto más fácil de tabular. Es también, el origen de los ejercicios propuestos en los libros introductorios de mecánica.

Como lo señala Penrose [10], los griegos lograron un entendimiento aceptable de los fenómenos estáticos, pero no así de los dinámicos. Este hecho proviene, en parte, por la falta de una forma adecuada de cuantificar el cambio de posición de un objeto.

El número que se asocia a la duración de un fenómeno es lo que designamos tiempo. Este número se obtiene contando la cantidad de ciclos de otro fenómeno que consideramos periódico hasta que no se demuestre lo contrario.

Así es que ya antes de la aparición de la relatividad especial no existía un tiempo absoluto. El período del sol fue considerado por Aristóteles como un buen reloj. De acuerdo a la física Aristotélica la trayectoria del sol en el espacio está descrita por una circunferencia perfecta, que es el único movimiento que no se frena (como un bloque en una mesa) o que no se acelera (como es el movimiento natural, la caída de un objeto hacia el centro de la tierra). Además es eterno. Era entonces un buen reloj. Ahora sabemos que el sol no gira entorno a la tierra y que además la rotación de la tierra sufre alteraciones [16] debido a diversos fenómenos físicos. Si uno necesita mejorar la precisión debe comparar con otro fenómeno.

V.12.1 La medición del tiempo

En la antigüedad, en una travesía marítima la latitud de un barco se puede medir comparando la posición del sol en el cenit (un ángulo) con la del lugar de origen u otro tomado como referencia (otro ángulo). Sin embargo la longitud, en aquellos tiempos sólo podía medirse por el desfase de, por ejemplo, el tiempo que marca un reloj al alcanzaer el cenit el sol con aquel que marcaba (en la misma posición del sol) en su punto de partida. En el barco un reloj era el único medio por el cual podía ubicar su longitud mar adentro.

En este contexto podemos mencionar a Hooke, quien alrededor del siglo XVII reemplazó el reloj de péndulo que utilizaban los barcos por uno con un resorte helicoidal. De este modo se aminoraba el efecto de los vaivenes del barco sobre el funcionamiento del reloj y la imprecisión en la determinación de la longitud. Otro relojero John Harrison (1693–1776) utilizó un resorte



Figure V.50: Este es un diagrama muy exagerado de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. La órbita de la Tierra es muy cercana a una circunferencia. Se encuentra más cerca del Sol durante el verano del hemisferio Sur.

bimetálico para disminuir los efectos debido a los cambios de temperatura y logró construir un reloj que sólo se atrasaba 54 segundos después de una travesía marítima de 156 días [13].

El más antiguo de los relojes lo constituye el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. A medida que aumentó la precisión de los instrumentos utilizados, comenzaron a surgir dificultades debido a que la tierra describe una elipse alrededor del sol y, por la conservación del momento angular, hay tramos en los cuales viaja más rápido (ver Figura V.50) y el día solar, considerado como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones consecutivas del sol en el cenit de un mismo lugar, se alarga en aproximadamente 4,7 segundos con respecto al día promedio.

¿Es posible detectar estos cambios?

En 1900 los relojes se ajustaban de acuerdo al tránsito de las estrellas más luminosas a través de los meridianos de los observatorios terrestres. Esto se define como un día sideral.

En 1936 la construcción de relojes de péndulo era técnicamente tan sofisticada que en el instituto BIH (Bureau International de l'Heure) se logró alcanzar una precisión suficiente para poder comparar la duración del día en dos fechas diferentes y asegurar que el largo de un día de Enero de dicho año excedió a uno de Julio en aproximadamente 2 milisegundos [16].

En 1955 la precisión de los relojes atómicos permitían medir el tiempo con una exactitud de una parte en 10^{11} y su tamaño y peso permitían hacer comparaciones entre dos puntos separados.

Universidad de Chile

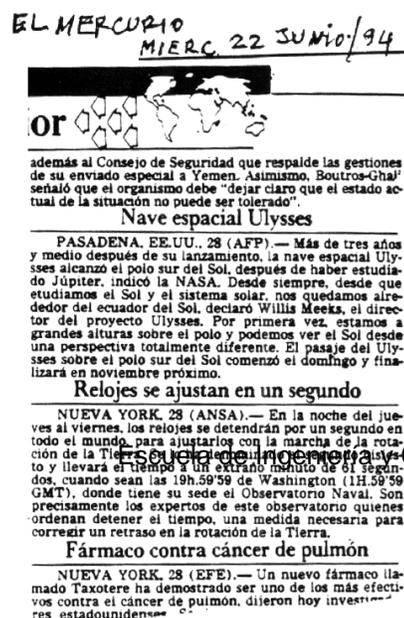


Figure V.51: .

En la décimotercera Conferencia General de Pesas y Medidas, se adoptó una nueva definición de la unidad de medida del tiempo. Se reemplazó la definición existente -basada en el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, como se detalla en la siguiente sección -, por la medida atómica del tiempo. La nueva definición es: El segundo se define de la siguiente forma : un átomo de Cesio 133, que al sufrir una transición (hiperfina) entre dos estados posibles, emite una onda; 9.192.631.770 ciclos (oscilaciones) de esta onda, corresponden a un segundo [8]. Los diez dígitos que aparecen en la definición fueron escogidos de manera que esta definición coincidiera con la del segundo efemérico.

Hoy, la precisión y estabilidad de los relojes atómicos permite una exactitud en su medida de 2 partes en 10^{14} . Este número da una idea de la complejidad tecnológica involucrada en el proceso de medición [17].

Escalas de tiempo

El *tiempo solar medio* es la escala de tiempo obtenida mediante dos posiciones sucesivas del Sol, después de aplicar diversas correcciones para lograr una escala más uniforme.

El *tiempo universal* UTO, es el tiempo solar medio referido al meridiano de Greenwich (Greenwich Mean Time o GMT).

Pequeñas correcciones adicionales de la uniformidad del movimiento de la Tierra debido a fluctuaciones en la dirección del eje polar y otros movimientos periódicos asociados a la atmósfera, las corrientes oceánicas , ...etc. lleva a otras escalas aún más uniformes: UT1 y UT2.

Numerosos laboratorios han cooperado para generar lo que se denomina *el tiempo coordinado universal* (UTC), que es un promedio de las escalas de tiempo atómico de cada uno de los laboratorios.

Para mantener la equivalencia entre el UTC y el largo del día, es necesario añadir o quitar, en forma ocasional, un segundo a la escala atómica. Este es el *segundo bisiesto* que se menciona en el recorte de un periódico que se acompaña. Esta armonía entre estas dos escalas es probable que llegue a su fin. No es fácil ajustar los relojes atómicos del GPS. Además es interesante señalar que si se hubiese cambiado el 770 que aparece al final de la definición del segundo atómico en base al Cs, por 990, sólo hubiese sido necesario ajustar estos relojes sólo 3 veces en lugar de las 23 en que se ha debido realizar desde 1967 [17].

Por un acuerdo internacional, la UTC es mantenida en coincidencia con la escala del navegante UT1, dentro de un margen de 0.7 segundos.

V.13 Apéndice C: El Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

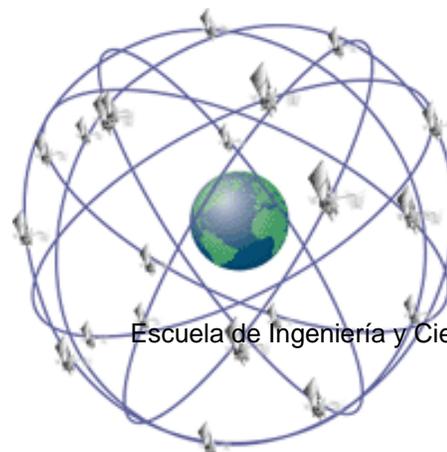
Resumen de un artículo de Neil Ashby, Universidad de Colorado.

El artículo aparece en [http : //www.phys.lsu.edu/mog/mog9/node9.html](http://www.phys.lsu.edu/mog/mog9/node9.html)

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) consiste de 24 satélites que orbitan la Tierra, V.52, cada uno llevando un reloj atómico estable y de gran exactitud. Cuatro satélites están en cada uno de los seis planos orbitales diferentes, cada uno con una inclinación de 55° con respecto al Ecuador de la Tierra. El período orbital son 12 horas (siderales, tiempo medido con respecto a las estrellas fijas), así que la posición aparente de un satélite con el escenario de las estrellas se repite cada 12 horas. Transmisores activados por los relojes envían señales de tiempo sincrónicas, con la información de la posición y el tiempo de transmisión. De esta forma el receptor en la Tierra puede determinar su posición y tiempo mediante la decodificación del mensaje enviado por cuatro satélites diferentes. El satélite también lleva detectores de rayos gamma. Los satélites pueden determinar las coordenadas espacio tiempo de un evento nuclear midiendo los tiempos de arrivo de la señal y resolviendo de nuevo cuatro ecuaciones de propagación simultáneas.

Sin considerar los aceleradores de alta energía, no hay otro sistema de ingeniería en existencia hoy día en el cual la relatividad general y la especial tengan tantas aplicaciones. El Sistema se basa en el principio de la constancia de la velocidad de la luz en un sistema de referencia inercial: el sistema inercial centrado en la Tierra o como lo denominaremos: sistema ECI (Earth Centered Inertial). La dilatación del tiempo, el fenómeno de la relatividad especial, es significativa para los relojes en movimiento tanto para los relojes ubicados en los satélites como para los relojes en reposo en la Tierra. El principio de equivalencia encuentra su expresión en la presencia de varias fuentes de corrimientos de las frecuencias de las señales debido al campo gravitacional. También, debido a que la Tierra y sus satélites están en caída libre en el campo gravitacional del Sol, se generan corrimientos en la frecuencia de origen gravitacional nacen debido al potencial gravitacional de la Luna y el Sol, sin embargo éstos afectan en una pocas partes en 10^{16} y por tanto pueden ser despreciados.

El efecto Sagnac tiene una gran influencia en este sistema de medición. Ya que la mayoría de los usuarios de GPS están en reposo (o casi) sobre la superficie de la Tierra, sería altamente deseable sincronizar los relojes en un sistema de referencia que estuviera rotando fijo a la Tierra (un sistema fijo Earth Fixed, Earth Center Frame o sistema ECEF). Sin embargo, debido a que la Tierra rota, esta sin-



Escuela de Ingeniería y Ciencias

cronización no es posible. Este es el efecto Sagnac. Es suficientemente importante en los GPS para que deba ser considerado. Inconsistencias que ocurrirían en procesos de sincronización realizados en la superficie de la Tierra mediante rayos de luz, o con relojes portables que se muevan lentamente, dependen del camino recorrido y pueden llegar a ser del orden de varias docenas de nanosegundos, (una mil millonésima de segundo: 10^{-9} segundos) demasiado grandes para ser tolerados en el sistema del GPS. De esta forma el efecto Sagnac obliga a diseñar una convención diferente para la sincronización de los relojes. También, el campo de una señal en el ECEF no es una línea recta. En el GPS, la sincronización es realizada en el sistema ECI; esto soluciona el problema de la inconsistencia debido a la dependencia del camino.

Varias fuentes de efectos relativistas se introducen al determinar la unidad de tiempo, el segundo SI (Sistema Internacional) está definido por el Observatorio Naval de Estados Unidos (USNO). Para un reloj que permanece fijo sobre la Tierra, la dilatación del tiempo generada por el movimiento de rotación de la Tierra puede ser visto alternativamente como una contribución, en el sistema ECEF, al potencial efectivo gravitacional el cual incluye las contribuciones provenientes de la no esfericidad de la Tierra. Relojes fijos a la Tierra ubicados en la misma superficie equipotencial de este campo gravitacional, marcan el tiempo con la misma rapidez. Considerando tiempos geológicos, la forma de la Tierra se ha distorsionado así que se acerca a una de estas figuras equipotenciales - la geodésica de la tierra al nivel promedio del mar. El segundo SI está definido por la rapidez de los relojes atómicos ubicados sobre la geodesia. Esta rapidez esta determinada con una suficiente exactitud, relativa a relojes en infinito, teniendo en consideración tres efectos:

- la dilatación del tiempo debido a la rotación de la Tierra
- los cambios de frecuencia debido al monopolio gravitacional
- y al potencial cuadrupolar debido a la deformación de la Tierra.

En relatividad general (GR), el tiempo coordinado se expresa en forma aproximada suponiendo un movimiento lento de la tierra y que el sistema solar es un campo gravitacional débil. El tiempo propio transcurrido en un reloj que está en movimiento depende de la posición de los relojes y la velocidad de los objetos masivos cercanos, y puede ser calculado si las velocidades y posiciones y la masa de estos objetos son conocidos.

Los efectos relativistas en los relojes de los satélites pueden ser combinados de forma tal que solo dos correcciones necesitan ser consideradas. Primera, el corrimiento, en promedio de la frecuencia de los relojes en órbita es corregido en frecuencia por algo así como 446, 47 partes en

10^{12} . Esta es una combinación de 5 fuentes distintas de efectos relativistas: corrimiento gravitacional de la frecuencia de los relojes en la Tierra debido al monopolo de la Tierra y a su momentum cuadrupolar, corrimiento de la frecuencia de origen gravitacional del reloj del satélite, y corrimientos del tipo del efecto Doppler de segundo orden debido al movimiento del satélite y los relojes fijos en la Tierra.

Segundo, si la órbita es excéntrica, una corrección adicional aparece de las combinaciones del campo gravitacional que varía y el corrimiento de la frecuencia debido al movimiento debido a que las distancias del satélite con respecto a la Tierra cambia. Esta corrección es periódica y es proporcional a la excentricidad de la órbita. Para una excentricidad de .01 la amplitud de este término es del orden de 23 nanosegundos. Debido a una falta de computadores en los satélites en los primeros días del GPS, se decidió que esta última corrección era de responsabilidad del software en los GPS de los receptores (aquellos ubicados en la Tierra).

Para el lanzamiento del primer satélite NTS-2 (Junio de 1977), el cual transportaba el primer reloj de cesio que se pondría en órbita, había algunos que dudaban que los efectos relativistas fueran efectivos. Se construyó un sintetizador de frecuencia en el sistema de relojería del satélite de forma que después del lanzamiento, si llegara a ocurrir que la rapidez del reloj en su órbita final era la que efectivamente predecía la relatividad general, entonces el sintetizador debería ser activado para poner al reloj coordinado con la rapidez necesaria para una operación efectiva del instrumento.

El reloj atómico funcionó por alrededor de 20 días para poder medir su rapidez antes de iniciar el sintetizador. La frecuencia medida durante esos 20 días, fue de 442,5 partes en 10^{12} , más rápido que los relojes en el piso; si esta señal permaneciera sin corregirse habría resultado en errores en los tiempos de alrededor de 38.000 nanosegundos por día. La diferencia entre la predicción de la relatividad general acerca de la frecuencia y la observada en el satélite en órbita distaba solamente en 3,97 partes en 10^{12} de lo que se observó. Un valor adecuado a la precisión del reloj que está en órbita. Esto entonces dio una aproximación al 1% considerando el movimiento combinado y los corrimientos gravitacionales para un reloj que orbita alrededor de la tierra en un radio de 4,2 veces el radios de la Tierra.

Varios efectos relativistas son demasiados pequeños para afectar el sistema a la precisión actual de este, pero pueden llegar a ser importantes a medida que el sistema es mejorado; estos incluyen retardos del tiempo de origen gravitacional, cambio de la frecuencia de los relojes en satélites debido al momentum cuadrupolar de la tierra y curvatura especial. Este sistema fue conseguido inicialmente para algún uso de navegación militar teniendo acceso a transmisiones codificadas de los satélites las cuales no están disponibles para los usuarios civiles. La incertidumbre en la oposición en tiempo real usando el código de posicionamiento preciso es ahora del orden de 2,4 metros. Promediando sobre el tiempo y sobre muchos satélites reduce esta incertidumbre al punto donde algunos usuarios están actualmente interesados modelar muchos efectos hasta el nivel del

milímetro. Aún sin estos ímpetus, el GPS provee una fuente muy fértil para las aplicaciones del concepto de relatividad.

Nuevas y sorprendentes aplicaciones de la determinación de la posición y en la transferencia del tiempo basada en sistemas GPS están siendo continuamente inventadas. Aplicaciones civiles incluye por ejemplo: registro del movimiento de los elefantes en África, estudio de los movimientos de las placas, exploración, mapeo, salvamentos en el océano abierto, bitácora de vehículos de flete, falla en línea de alto poder y sincronización de los nodos telecomunicacionales. Alrededor de 60 fábricas producen sobre 350 aparatos comerciales **GPS**. Millones de receptores son hechos cada año, el precio del receptor local debe ser de alrededor de US\$ 200.

Ejemplo: Esquema del funcionamiento de un GPS

Para formarse una idea del funcionamiento del GPS (Global Positioning System), considere el siguiente ejemplo simplificado.

Dos satélites, con sus respectivos relojes atómicos, viajan a una altura H sobre el nivel del piso. Estos relojes están sincronizados en el sistema de referencia en que ambos están en reposo. Su separación, medida en este mismo sistema de referencia es L' . Estos satélites envían señales periódicamente a Tierra. Esta señal trae codificado el instante en que fue enviada, de acuerdo al reloj de la nave y la posición con respecto a la Tierra de dicho reloj. Si el observador en Tierra recibe simultáneamente una señal de ambos satélites, se pide:

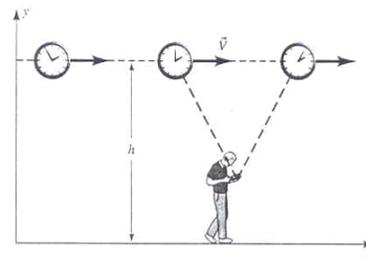


Figure V.53:

a.- Utilizando un diagrama de espacio - tiempo, muestre que el observador debe encontrarse ubicado entre los dos satélites.

b.- De acuerdo al observador en Tierra, de cuál de los relojes salió la señal antes que la otra. ¿Cuál es la diferencia Δt , que tarda cada uno de los satélites en enviar la señal un extremo a otro?.

c.- ¿Cuál es la posición (coordenada x) del observador en tierra con respecto a las posiciones de ambos satélites? (En otras palabras, qué se debe calcular para encontrar la posición x del observador).

d.- Si en el espacio existen 24 satélites orbitando a 27.000 km de altura, muestre que las correcciones relativistas calculadas aquí, son relevantes si queremos una precisión de 2 - 5 metros.

- a) Observador en Tierra
- b) Dado que ambos relojes emiten la señal simultáneamente en su sistema de referencia, tenemos que:

$$t'_B - t'_A \equiv \Delta t' = 0 = \gamma[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)] = \gamma[\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x]. \text{ ec.1}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A \equiv L' &= \gamma[(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)] \\ &= \gamma[\Delta x - v\Delta t] \text{ ec.2} \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones para dos incógnitas Δt y Δx . Despejando, obtenemos

De la ecuación [ec.1]

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$$

De la ecuación [ec.2],

$$\Delta x = \frac{L'}{\gamma} = v \cdot \Delta t.$$

Reemplazando Δx en la ecuación, tenemos

$$\Delta x = \frac{c^2\Delta t}{v} = \frac{L'}{\gamma} + v\Delta t, \text{ obtenemos}$$

$$(c^2 - v^2)\Delta t = L'\sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{L'\gamma}{c^2}.$$

También: $\Delta x = \frac{L'\gamma}{v}$.

Vemos que $t_B - t_A = \frac{\gamma L'}{c^2}$, $t_B = t_A + \frac{\gamma L'}{c^2}$.

De acuerdo al observador en Tierra, el reloj A disparó primero.

- c) Para calcular la coordenada x_P del observador todo esto referido al sistema del observador tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (x_P - x_B)^2 + H^2 &= c^2(t_P - t_B)^2 \\ (x_P - x_A)^2 + H^2 &= c^2(t_P - t_A)^2, \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones indican que el evento A (y B) están en el cono de luz del evento P que corresponde al instante en que el observador recibe los pulsos de A y B . Note que estas ecuaciones³

³no distinguen el presente del pasado, por tanto en algún momento debemos escoger el signo correcto de la variable.

Tenemos 6 incógnitas $x_P, t_P, x_B, x_A, t_B, t_A$. Se requieren 4 ecuaciones adicionales. Éstas son:

$$\begin{aligned}x_B - x_A &= \gamma L', \\t_B - t_A &= \gamma \frac{v}{c^2} L', \\x_P &= 0, \\t_A &= 0.\end{aligned}$$

En las dos últimas ecuaciones, instalamos el origen del sistema de coordenadas junto al observador P . En la última ecuación $t_A = 0$, los relojes parten cuando el satélite A emite el destello que alcanza al observador P . Estas coordenadas hacen más fácil los cálculos. Sería más físico poner $x_A = t_A = 0$, establecer el origen de coordenadas espaciales junto con el destello que alcanza a P , pero las ecuaciones son un poco más complejas.

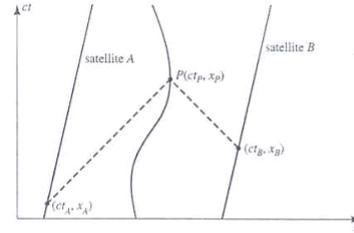


Figure V.54:

Con esta elección, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}x_B^2 + H^2 &= (ct_P - \gamma \frac{v}{c} L')^2 \\x_A^2 + H^2 &= (ct_P)^2 \\x_B &= x_A - \gamma L'\end{aligned}$$

La ecuación para x_A es

$$(\gamma L' + x_A)^2 + H^2 = [(x_A^2 + H^2)^{1/2} - \gamma \frac{v}{c} L']^2$$

La ecuación para t_P es:

$$[((ct_P)^2 - H^2)^{1/2} + \gamma L']^2 + H^2 = (ct_P - \gamma \frac{v}{c} L')^2$$

Las dos soluciones que aparecen se deben a la ecuación del como la luz que no distingue el presente del pasado.

Como ejemplo, Ud., puede resolver el caso $H = 0$ y obtener

$$-ct_P = x_A \quad (t_P > 0)$$

V.14 Ejercicios Propuestos

- 1.– Un vagón de tren se mueve sobre una vía a velocidad constante v . A y B están en los extremos del vagón y los observadores C y D están de pie junto a la vía. Definimos el evento AC como ocurrencia de A al pasar frente a C, y los otros similarmente.
 - (a) De los cuatro eventos BD, BC, AD, AC, ¿cuáles sirven para que los observadores que están sobre la vía midan el paso de un reloj llevado por A?
 - (b) Sea Δt el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?
 - (c) Supóngase que los eventos BC y AD son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón?. Si no, ¿cuál es primero?
- 2.– Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Å del Hidrógeno H_α , emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de $10^{-3}c$, $10^{-2}c$, y $10^{-1}c$. ¿Es una buena aproximación el resultado a primer orden?
- 3.– Un aeroplano de 40 m de longitud en su sistema de reposo se mueve a velocidad uniforme de $630 \frac{m}{seg}$, con respecto a la Tierra.
 - (a) ¿Qué fracción de su longitud de reposo parecerá acortarse, con respecto a un observador sobre la Tierra?
 - (b) ¿Cuánto tiempo tardará, según los relojes en tierra, para que el reloj del aeroplano se retrase un microsegundo? (Suponga que únicamente es válida la relatividad especial).
- 4.– El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, por el movimiento orbital de aquella?
- 5.– Se mide la longitud de una nave espacial y se encuentra un valor exactamente igual a la mitad de su longitud propia.
 - (a) ¿Cuál es la velocidad de la nave con respecto al sistema del observador? ¿Cuál es la dilatación del tiempo unitario de la nave?
- 6.– Dos naves espaciales tienen una longitud de 100 m cada una, medidos en su sistema propio. Se desplazan en sentidos opuestos, cruzándose en el vuelo. El astronauta que va en la nariz de una nave, que la designamos por A, mide el tiempo que transcurre entre el paso de la nariz

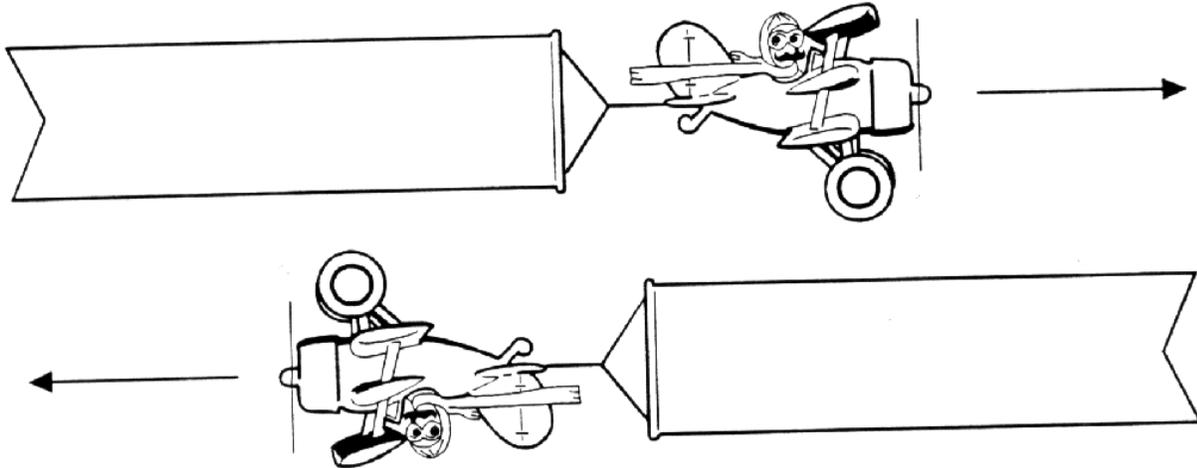


Figure V.55:

y la cola de la otra nave (B) desde su puesto de observación. Encuentra que este intervalo es $2,50 \times 10^{-6}$ segundos. A partir de este dato, encuentre:

(a) ¿Cuál es la velocidad relativa de las naves?

(b) ¿Cuál sería el intervalo medido en la primera nave (A), si ahora registrara el intervalo que transcurre entre que la nariz de la nave (B) pasa frente a la nariz de (A) y la cola de (B) pasa frente a la cola de (A)?

Acompañe ambas respuestas con un gráfico espacio-tiempo.

7.– (a) Si la vida (propia) promedio de un mesón μ es 2.3×10^{-6} segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de $0.00c$, $0.60c$, $0.90c$, y $0.99c$ respectivamente.

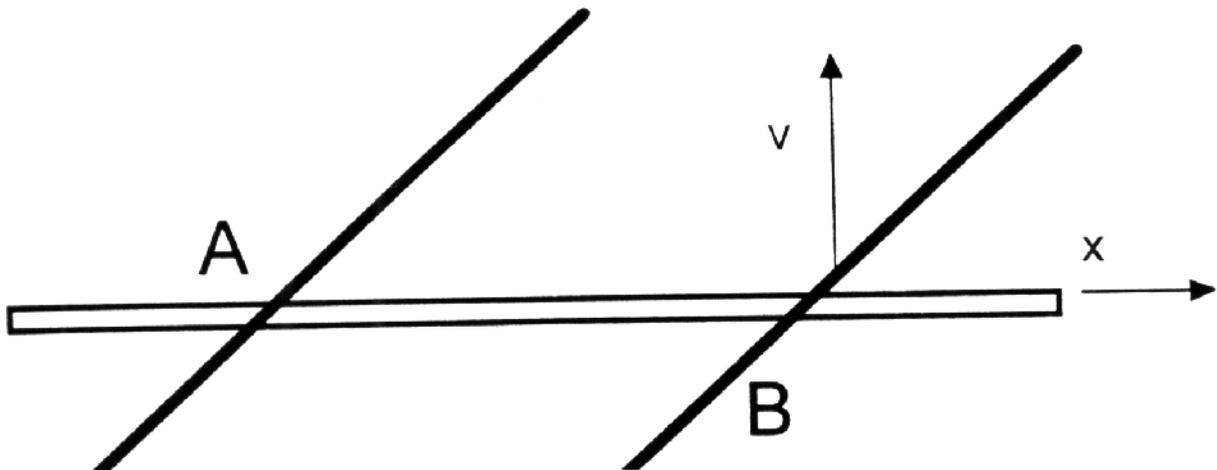
(b) Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.

8.– A 200 km sobre el nivel del mar, una partícula de rayo cósmico primario choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón π^+ , el cual desciende verticalmente a una velocidad de $0.99c$ y, en su sistema propio, se desintegra $2.5 \times 10^{-8} \text{seg}$ después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?

9.- En la Figura, A y B son los puntos de intersección del eje \underline{x} (varilla estacionaria) con una varilla inclinada (varilla en movimiento) en dos instantes diferentes. La varilla inclinada se está moviendo en la dirección $+\underline{y}$ (sin cambiar de inclinación) a una velocidad \underline{v} .

(a) Demuestre que el punto de intersección de las varillas tiene una velocidad $u = v \cot \theta$ hacia la izquierda.

(b) Sea $\theta = 30^\circ$ y $v = \frac{2}{3}c$. Demuestre que, en este caso, \underline{u} excede a \underline{c} y explique porqué no existe ninguna contradicción con la relatividad.



10.- Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, paralelamente uno respecto del otro; el primero a una velocidad de $0,9 c$ y el segundo a una velocidad de $0,7 c$. Encuentre la velocidad de un proyectil con respecto al otro.

11.- Un observador sobre la Tierra que llamamos A, manda una señal con una linterna cada seis minutos. Otro observador, B está en una estación espacial estacionaria con respecto a la Tierra. Designamos con C a un astronauta que viaja en un cohete de A a B, con una velocidad constante de $0,6 c$, con respecto a A.

(a) ¿A qué intervalos recibe B las señales de A?

(b) ¿A qué intervalos recibe C las señales de A?

(c) ¿A qué intervalos recibe B los destellos de C?

12.- Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_o \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

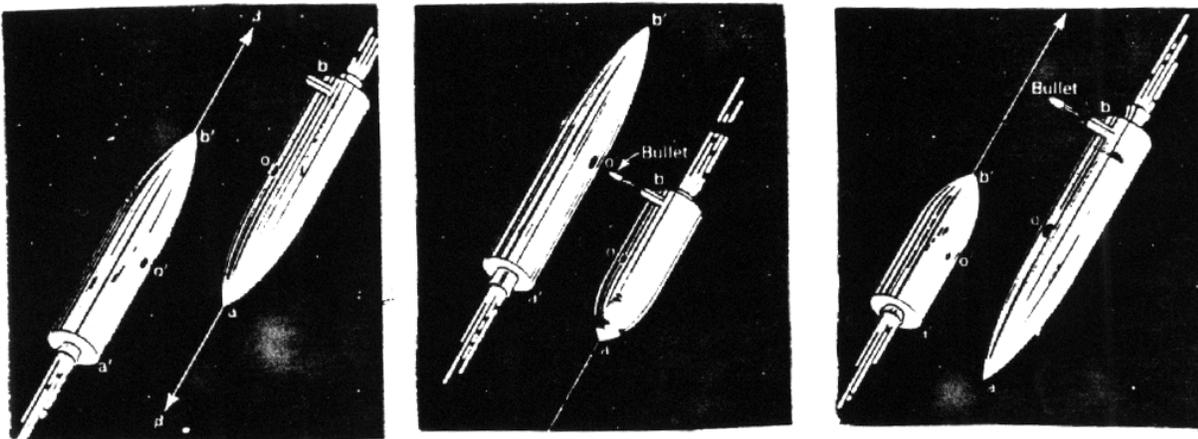
Siendo N_o el número de partículas que existen en $t = 0$ y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_o, \quad N(\tau) = \frac{N_o}{2}.$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_o = 2,6 \times 10^{-8}$ s. Suponiendo que N_o mesones π^+ se han formado a la altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez $0.9999 c$ llegando solamente el 1 %:

(i) Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.

(ii) Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.



13.- Dos misiles de igual largo propio pasan en sentido contrario a velocidades relativistas. El observador O tiene un cañón en la cola de su nave apuntando en dirección perpendicular al movimiento relativo.

Como indica la figura, O dispara cuando la punta A coincide con A'. En el sistema de referencia de O, el otro misil sufre una contracción de Lorentz. En consecuencia O sospecha

que su bala no dará en el blanco. Pero en el sistema de referencia de O' , es el misil O el que aparece contraído y por lo tanto, cuando A y A' coinciden el observador ve lo que aparece en la tercera figura.

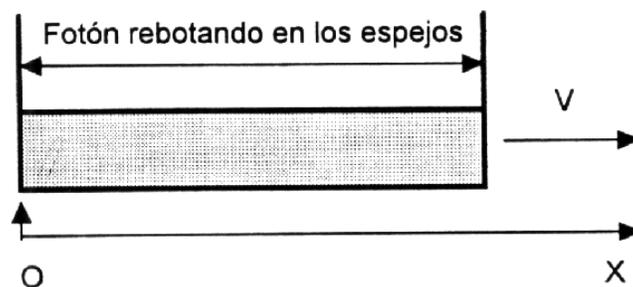
(a) Uno de los diagramas contiene un error. Descúbralo.

(b) Usando las transformaciones de Lorentz descubra lo que realmente sucede en este encuentro.

Nota: $L \equiv$ largo propio de los misiles. $u \equiv$ velocidad del misil O con respecto a O' .

(Problema extraído de la referencia Taylor and Wheeler)

- 14.– Se tiene una barra de largo L que se desplaza con velocidad v . En los extremos de esta barra se ubican dos espejos como se muestra en la figura. Suponga que un fotón se encuentra entre ellos. Si en $t = 0$ el espejo de la izquierda coincide con el punto $x = 0$ y justo en ese instante el fotón está siendo reflejado en ese mismo espejo, dibuje la trayectoria del fotón y de la barra en un diagrama espacio-tiempo $c = 1$.



- 15.– En el sistema S' , un sujeto corre en la dirección del eje y' con velocidad constante $V = \frac{L'}{T'}$, donde L' es la distancia propia con respecto a S' y T' es el tiempo que marca un reloj estático con respecto a S' .

A su vez, S' se mueve con una velocidad U con respecto a otro sistema de referencia inercial S .

- a) De acuerdo a un observador en reposo en el sistema S , calcule las dos componentes de la velocidad de este sujeto y a partir de este resultado encuentre la tangente del ángulo con que éste se aproxima.

b) Suponga que en el sistema S' hay una serie de interruptores separados por una distancia propia L' . A medida que el sujeto avanza los va encendiendo. Al ser activados, estos envían un fotón (o un pulso de luz, si Ud. lo prefiere) que *viaja directamente hacia S en la dirección del eje x del sistema S* .

Calcule la velocidad w_y con que los detectores se encienden en el sistema S , a medida que van recibiendo la señal luminosa proveniente de S' . Suponga, si le ayuda utilizar este dato, que inicialmente el sistema S' se encontraba a una altura H sobre S . Recuerde que la distancias perpendiculares al movimiento relativo no sufren alteraciones.

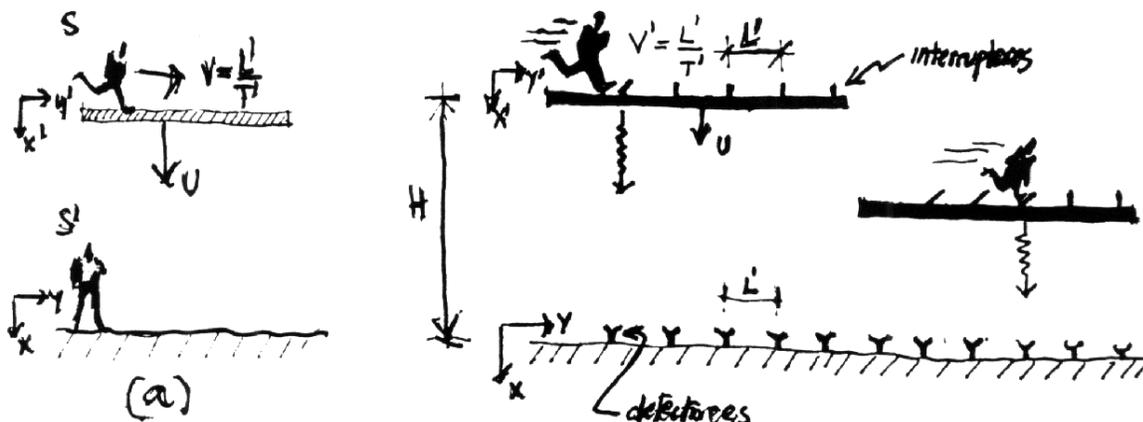


Figure V.56: Ejercicio # 19

c) Si el observador en S , $U = \bar{V} \cos \theta$, $V = \bar{V} \sin \theta$, representan las componentes de la velocidad \bar{V} con la cual se aproxima el sujeto, demuestre que la velocidad con que se encienden los detectores en el sistema S es:

$$w_y = \frac{\bar{V} \sin \theta}{1 - \frac{\bar{V} \cos \theta}{c}}$$

d) Demuestre que si $\bar{V} \approx c$ (es decir, $\beta \approx 1$) y el ángulo θ es muy pequeño, la velocidad w_y toma su máximo valor para $\theta^2 = 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$.

- 16.- Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, en forma paralela y en el mismo sentido. Si denominamos uno de los proyectiles por O_1 y le asociamos la velocidad $V_1 = 0.9c$ y al otro, O_2 la velocidad $V_2 = 0.7c$:

- a) Encuentre la velocidad de O_1 con respecto a O_2 .
- b) Si los largos propios son L_1 y L_2 respectivamente, cuál es el largo del cohete L_2 , de acuerdo a O_1 .

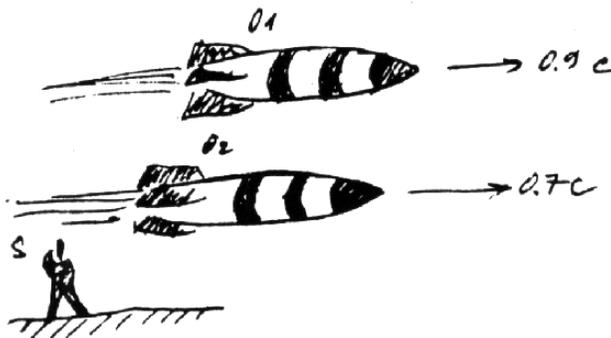
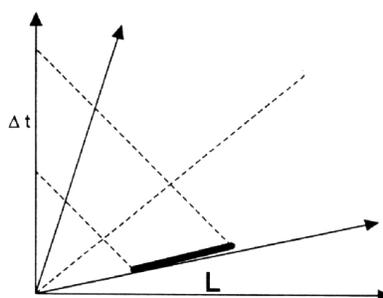
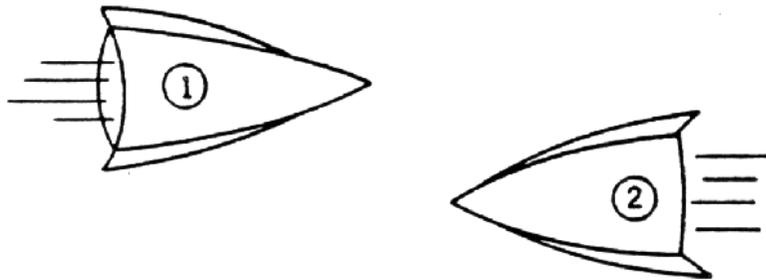


Figure V.57: Ejercicio # 20

- 17.- Una barra de largo L' con respecto a su sistema en reposo, se aleja con una velocidad V_0 de un observador en reposo. Si desde cada uno de los extremos de la barra se envían dos destellos en forma *simultánea con respecto al sistema fijo en la barra*, calcule la diferencia de tiempo Δt con la cual arriba cada uno de los destellos al observador S .



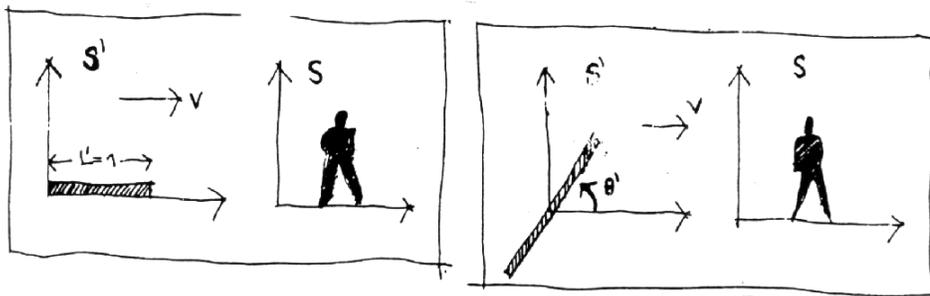
Nota: El intervalo Δt , *no* depende de la distancia a la cual se ubica la barra del origen de S . Ud. puede posicionarla donde más le acomode, respetando las condiciones impuestas en el enunciado del problema.



18.– Dos cohetes que viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto, se cruzan, como se señala en la Figura. En el sistema S , que corresponde a la Tierra, ambos cohetes tienen rapidez u y largo ℓ .

i) Calcule el intervalo –medido por un observador en Tierra–, que transcurre entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que comienzan a separarse.

ii) Calcule el intervalo medido por un pasajero de uno de las naves –sistema S' –, entre el instante que sus respectivas narices se cruzan y el instante en que las naves comienzan a separarse.



19.– Una varilla de un metro de longitud en su sistema propio, se aproxima a un observador en reposo con una velocidad $\frac{24}{25}c$, como se indica en la Figura.

a) ¿Cuál es el largo de esta varilla en el sistema del observador?

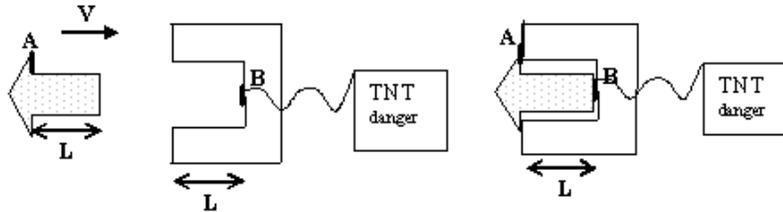
b) Suponga ahora que la varilla está inclinada en un ángulo $\theta' = \arcsin(5/6)$, en el sistema de referencia que viaja con la varilla. Calcule el ángulo de inclinación de la varilla medido en el sistema de referencia del observador fijo en tierra.

c) Calcule el largo de la varilla en el sistema de referencia del observador en reposo, para esta segunda configuración.

- 20.- La estructura de la izquierda (remache) tiene una protuberancia de largo L que al insertarse en el objeto con forma de U a la derecha alcanza justo a tocar el interruptor B ubicado al fondo de la cavidad. Esto ocurre cuando ambos objetos están en reposo (primera figura). B es un interruptor que, al ser tocado, gatilla la bomba de **TNT** señalada. Note que la cabeza del remache (por ejemplo el borde A) se apoya en los bordes del objeto en U al ser insertado.
- i.- Suponga que el mismo remache se acerca con una rapidez V , con respecto a un observador en reposo en la estructura en U, como aparece en la figura. Explique cuantitativamente qué sucede con el extremo del remache cuando A toca el borde de U: también toca B , lo tocó antes, a qué distancia se encuentra según qué observador ¿ Explota la bomba? Debe acompañar un gráfico espacio-tiempo de la situación donde se especifique qué midió y su valor.
 - ii.- Considere las mismas preguntas, pero ahora desde el punto de vista de un observador en reposo con respecto al remache que ve acercarse al objeto en U. Siendo un observador sistema inercial, opina que la estructura en U se acerca con rapidez V . ¿ Explota o no la bomba, de acuerdo a este observador?
 - iii.- En definitiva, si la bomba explota NO puede depender del observador. ¿ Cómo resuelve Ud. esta paradoja?
 - iv.- En el caso i.- suponga que se conectó un dispositivo al punto A del remache tal que si A es presionado dispara un laser que corta el cable que une B con la bomba. En este nuevo escenario: ¿ Explota ésta o no?

(Problema extraído de la referencia 2, Taylor and Wheeler)

- 21.- El diagrama representa un policía midiendo la velocidad de un auto mediante el efecto Doppler. Nos instalamos en el sistema de referencia de la autoridad. Del auto sólo indicamos la flecha del tiempo para no complicar el dibujo. Se indica la trayectoria de dos nodos separados por una longitud de onda (λ) emitida por la pistola del policía y la recibida después de reflejarse en el auto unos instantes más tarde. (recuerde que los largos, como la longitud de onda, se miden en intervalos tipo espacio).
- i.- De la figura, demuestre (no sólo afirme, explique por qué) que: $c\Delta t = v\Delta t + \lambda_{\text{reflejado}}$, y que $c\Delta t = \lambda_{\text{incidente}} - v\Delta t$, donde v es la velocidad del auto c/r al policía.
 - ii.- A partir del resultado anterior obtenga ($f \equiv$ frecuencia), $f_{\text{reflejada}} = kf_{\text{incidente}}$, con $k = \frac{1+V/c}{1-V/c}$.

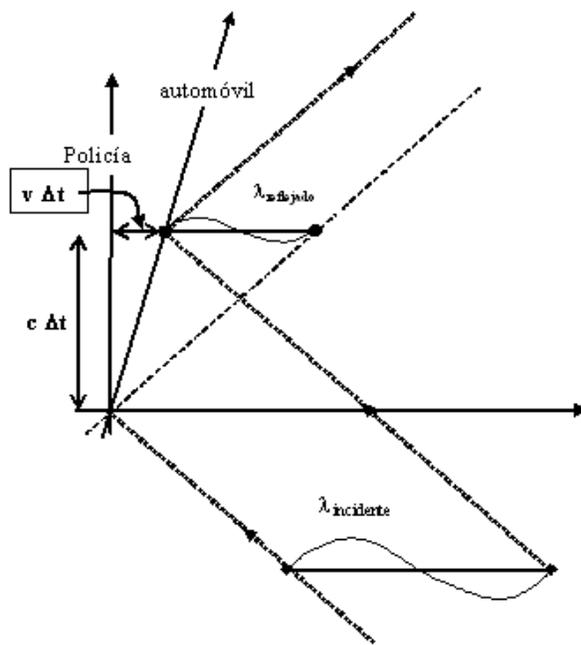


iii.- Suponiendo que el cambio de frecuencia es pequeño debido a que V/c es muy pequeño, muestre que $(\Delta f/f) \approx 2V/c$. Verifique cuán pequeño es si $V=120$ km/h.

iv.- El radar de la policía de Santiago, opera con una frecuencia de 10.525×10^9 ciclos/s. ¿Cuántos ciclos por segundo cambia el haz reflejado comparado con el incidente (o enviado)?

v.- ¿Qué resolución debe tener la maquina de la policía para poder distinguir entre un automovilista que viaja a 120 km/h y otro, infractor, que guía a 121 km/h?

(Problema extraído de la referencia 2, Taylor and Wheeler)



Bibliography

- [1] **A History of the theories of Aether and Electricity**, Sir Edmund Whittaker, 1954, Tomash Publishers, Vol VII.
- [2] **Spacetime Physics**, 1966, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.
- [3] **Introduction to the Structure of Matter**, J. J. Brehm and W. J. Mullin, John Wiley and Son, 1989.
- [4] **It's About Time**, N. David mermin, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.
- [5] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [6] **A First Course in General Relativity**, Bernard Schutz, Cambridge Press University, 2004.
- [7] **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**, James B. Hartle, Addison Wesley, 2003.
- [8] **The Quantum Beat, The physics Principles of Atomic Clocks**, F. G. Major, Springer , New York, 1998.
- [9] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
- [10] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991, Penguin Book.
- [11] **Feynman Lectures on Physics**, R. P. Feynman, R. Leighton and M. Sands, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1964, Sección 18-6.
- [12] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [13] **The illustrated Longitude**, Dava Sobel and Williams J. D. Andrews, Walker and Company, New York, 1998.

- [14] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
- [15] *Le Temps en Physique*, M. Mashaal, La Recherche, **24**,# 260, page 1412. (Contiene un resumen de los distintos aspectos del tiempo en la física).
- [16] *Variations in the rotation of earth*, W. E. Carter et al., Sci., **224**, 1 june, page 957.
- [17] *Time Too Good to Be True*, D. Kleppner, Physics ToDay, **Reference Frame**, March 2006, page 10.
- [18] *Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser*, R. F. C. Vessot et al., 1980, Phys. Rev. Lett., **45**, page 2081.
- [19] *Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains*, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.
- [20] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549.
- [21] *Improved Kennedy–Thorndike Experiment to test Special Relativity*, 1990, D. Hils and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **64**, page 1697.
- [22] *From Alchemy to Quarks: The Study of Physics as a Liberal Art*, Sheldon L. Glashow, Brooks and Cole Publishing Company, 1993.
- [23] *What is missing from Minkowski's "Raum und Zeit" lecture*, arXiv:0807.1300v1 [physics.hist-ph], 8 july2008.
- [24] *On the electrodynamics of moving bodies*, A. Einstein, June 30, 1905
- [25] *Splitting the second*, Tony Jones, IoP publishing, Bristol, 2001.
- [26] *It's About Time: Understanding Einstein's Relativity*, N. David Mermin, Princeton University Press, 2005.