Cátedra III: Transformaciones de Lorentz

En esta clase deduciremos y estudiaremos las celebres transformaciones de Lorentz, relacionando sistemas de referencia inerciales para observadores en movimiento relativo uniforme.

3.1 Tiempo propio

Antes de deducir las transformaciones de Lorentz, resulta útil introducir un concepto fundamental en el estudio de la cinemática relativista. Supongamos un observador inercial O junto a su sistema de referencia K. Por definición, este observador verá partículas libres en movimiento uniforme y rectilíneo. Supongamos en particular una partícula con velocidad $\vec{v}$ con respecto a O. Ya sabemos que si dicha partícula es física (real), entonces $v < c$ y su línea de mundo debe ser tipo tiempo. Es decir, cualquier par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo deben estar separados por un intervalo espacio-temporal tal que

$$\Delta s^2 - c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < 0. \tag{3.1}$$

Más aún, dado que el movimiento es rectilíneo, tendremos que la la velocidad de la partícula satisface

$$v^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2. \tag{3.2}$$

Por otro lado, debe existir un sistema inercial K' donde dicha partícula se registra en reposo. Esto significa que para el mismo par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo éstos estarán caracterizados en K' por $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$ y $\Delta z' = 0$. Tendremos por lo tanto la relación

$$-c^2(\Delta t')^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{3.3}$$

Noten que t' es la coordenada utilizada para medir el tiempo en el sistema de referencia en reposo con respecto a la partícula en cuestión y por lo tanto corresponde al tiempo percibido por la partícula. Es más, si reemplazásemos a la partícula por un reloj, este sería precisamente el tiempo indicado por dicho reloj, al ser observado por O. Por lo tanto, nos referiremos a este tiempo como el *tiempo propio* τ de la partícula. Notemos que un cierto periodo *propio* $\Delta\tau = \Delta t'$ viene relacionado con un periodo de tiempo medido por un reloj en K de la siguiente forma

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta t)^2}{c^2}\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right], \tag{3.4}$$

y por lo tanto, podemos escribir $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Esto quiere decir que el tiempo de un reloj en movimiento es percibido por un observador O pasando en forma más lenta que aquel registrado por su reloj

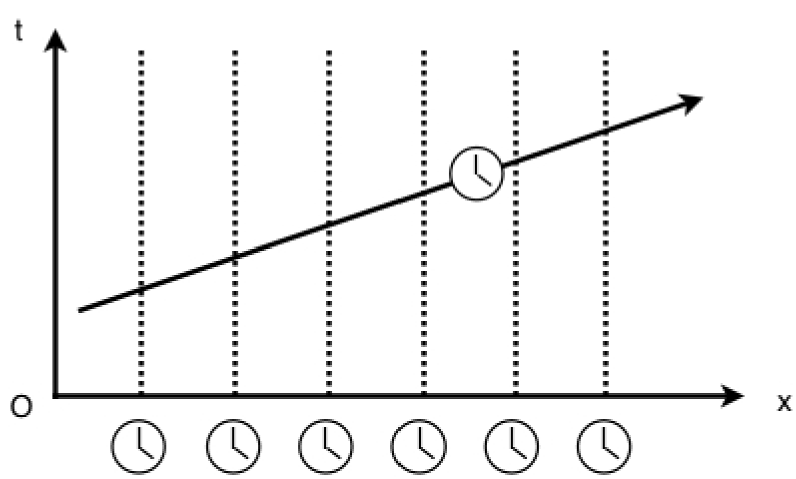
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.5}$$

3.2 Sobre el concepto de medición

Hay algo que a primera vista resulta extraño en la conclusión anterior. Supongamos que en vez de una partícula en movimiento rectilíneo uniforme tenemos un observador O' con un reloj. Este, al observar O moviéndose a una velocidad $-\vec{v}$ con respecto a si mismo habría deducido, correctamente, que el tiempo propio de O transcurre de forma más lenta que aquel que marca su reloj. De hecho el constataría que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.6}$$

donde Δt es ahora el intervalo de tiempo propio de O. En otras palabras, ambos observadores perciben que el reloj del observador contrario marca el tiempo a intervalos regulares mas lentos que el suyo. ¿Cómo podemos explicar esta aparente contradicción? Para responder a esta pregunta debemos aclarar el concepto de medición. De hecho, hay cierta asimetría en la labor de medir y comparar relojes. Para ser más precisos, y volviendo al caso anterior de la Sección 3.1, si el observador O deseara medir el tiempo propio de un reloj en movimiento rectilíneo y uniforme, estará obligado a construir un arreglo de relojes, todos calibrados, y ubicados en distintos puntos espaciales de su sistema de referencia (ver figura). En otras palabras, el observador requiere construir un



arreglo de relojes consistente con su sistema de referencia para comparar el tiempo con el reloj en movimiento. Hay por lo tanto una asimetría inevitable al momento de intentar comparar relojes. Lo mismo ocurre si ahora reemplazamos al reloj por un obsevador O' y éste desease comparar como evoluciona el tiempo marcado por el reloj de O con sus sistema de referencia.

3.3 Transformaciones de Lorentz

Supongamos dos observadores O y O' con una velocidad relativa entre ambos dada por v. Ambos observadores estarán tentados en utilizar sus propios diagramas espacio-temporales (sistemas de referencia) para ubicar eventos. Por dicho motivo distinguimos entre los sistemas de referencias K y K' caracterizados por coordenadas (t, x, y, z) y (t', x', y', z') respectivamente. En la clase anterior vimos que, sin importar la orientación de los ejes, o desplazamiento del origen de dichos sistemas, dado dos eventos arbitrarios P_1 y P_2, existe una cantidad invariante, denominada el intervalo espacio-temporal Δs^2, dada por

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

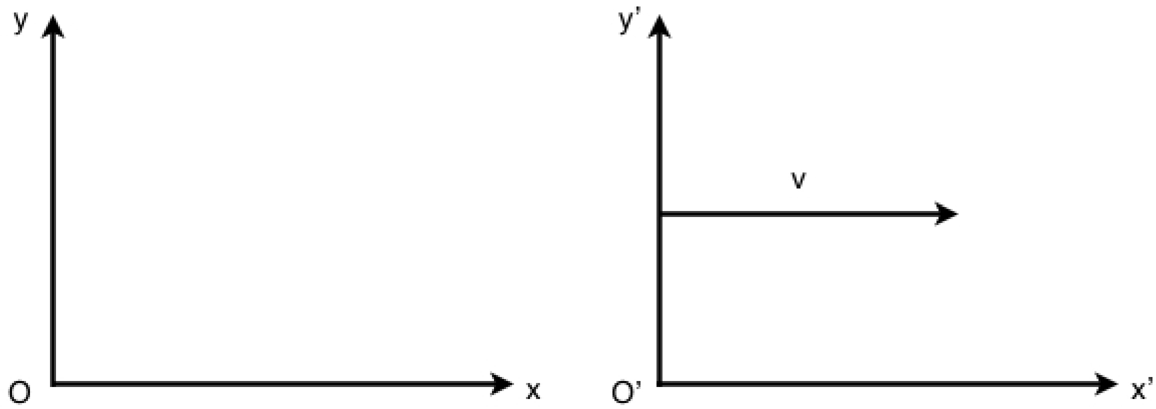
donde $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, etc... Es deseable contar con una transformación matemática relacionando directamente a las coordenadas de ambos sistemas que cumplan con la propiedad de mantener $(\Delta s)^2$. Al igual que con las rotaciones que vimos en la Sección **??**, estas transformaciones deben ser relaciones lineales entre las diferencias $(\Delta t, \Delta\vec{x})$ y $(\Delta t', \Delta\vec{x}')$. Esto es evidente, pues buscamos mantener invariante una cantidad que es cuadrática en la diferencia de coordenadas.

En general estas transformaciones son complicadas (las deduciremos en su forma general un poco más adelante) pero podemos simplificar el problema de deducirlas si acordamos que ambos observadores tienen sus sistemas de referencia con los ejes espaciales alineados y que el movimiento relativo es a lo largo del eje x, tal como lo muestra la figura. Partamos considerando la existencia de dos eventos P_1 y P_2 ubicados en el plano (t, x) de K. Estos eventos están caracterizados por un intervalo $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$. Evidentemente estos eventos continuarán siendo registrados en el plano (t', x') en K', por lo que sólo debemos considerar la invariancia del intervalo $(\Delta s')^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2$. Tenemos pues

$$-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2. \tag{3.8}$$

Para deducir las transformaciones lineales teniendo lugar entre las coordenadas de ambos sistemas usemos el siguiente truco. Notemos que al escribir $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$, la expresión anterior puede ser reexpresada de la forma

$$(\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 = (\Delta\eta')^2 + (\Delta x')^2. \tag{3.9}$$



Esta expresión es de hecho conocida. Corresponde ni más ni menos que al invariante bajo rotaciones en el plano (η, x) examinado en la Sección **??**. Para tal situación sabemos bien cuales son las transformaciones entre coordenadas. Estas son

$$\Delta\eta' = -\Delta\eta \sin\theta + \Delta x \cos\theta, \qquad \Delta x' = \Delta x \cos\theta + \Delta\eta \sin\theta, \tag{3.10}$$

mientras que sus inversas vienen dadas por

$$\Delta\eta = \Delta\eta' \sin\theta + \Delta x' \cos\theta, \qquad \Delta x = \Delta x' \cos\theta - \Delta\eta' \sin\theta. \tag{3.11}$$

Para entender el significado de θ en este caso, consideremos la linea de mundo de una partícula en reposo en el sistema K'. Desde la perspectiva de O, esta partícula se mueve a una velocidad v y sigue un movimiento rectilíneo. Supongamos que los eventos P_1 y P_2 interceptan el paso de esta partícula. Luego, tendremos $\Delta x/\Delta t = v$. Desde la perspectiva de O', los dos eventos P_1 y P_2 están caracterizaos por $\Delta x' = 0$, dado que la partícula no se desplaza en su sistema de coordenadas. Por lo tanto, tenemos

$$\Delta\eta = \Delta\eta' \sin\theta, \qquad \Delta x = -\Delta\eta' \sin\theta. \tag{3.12}$$

Dividiendo la segunda relación por la primera, tenemos

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -ic \tan\theta. \tag{3.13}$$

Es decir, θ esta directamente relacionado con la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En virtud de esta última relación, podemos escribir

$$\sin\theta = \frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.14}$$

Volviendo a las ecuaciones (3.11), y reescribiendo $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$ deducimos finalmente las transformaciones de Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.15}$$

Para deducir las relaciones inversas, podemos invertir directamente las relaciones lineales anteriores, o alternativamente, recordar que ellas son deducidas del mismo razonamiento anterior pero con v reemplazado por $-v$. Estas vienen dadas por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.16}$$

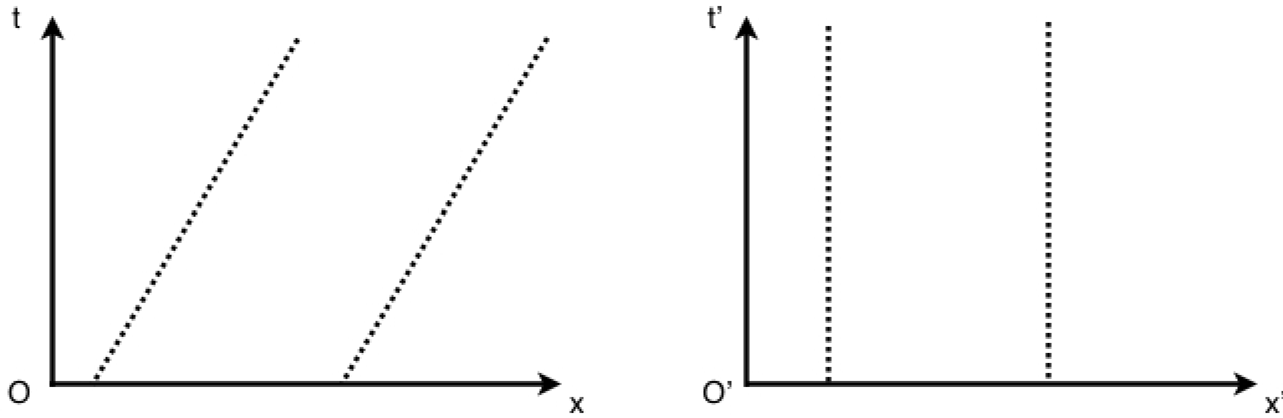
Es fácil comprobar que en efecto $(\Delta s)^2$ es un invariante bajo estas transformaciones. Terminemos esta sección señalando que si los eventos P_1 y P_2 están adicionalmente separados por componentes Δy y Δz perpendiculares al eje x, donde el movimiento relativo entre los observadores se realiza, entonces éstas no sufrirán cambios bajo las transformaciones. En otras palabras

$$\Delta y = \Delta y', \qquad \Delta z = \Delta z'. \tag{3.17}$$

Para convencerse de esto podemos volver a la notación auxiliar mediante la cual escribimos $ic\Delta t = \Delta\eta$. En tal caso tenemos $(\Delta s)^2 = (\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Este intervalo es invariante bajo rotaciones en un espacio de cuatro dimensiones. Sin embargo, ya vimos que si el movimiento entre los sistemas de referencia es a lo largo del eje x, la transformación entre ambos sistemas equivale a una rotación en el plano (η, x). Tal rotación en efecto deja sin modificación a las cantidades Δy y Δz.

3.4 Longitud propia

Como primera aplicación de las transformaciones de Lorentz, discutamos la medición del largo de un objeto extendido en movimiento, por ejemplo una barra. Supongamos que contamos con una barra *rígida* que en reposo mide ℓ_0. Dado que este es el largo medido en un sistema de referencia donde la barra está en reposo, nos referiremos a éste como el *largo propio* de la barra. Supongamos ahora que la misma barra está en movimiento, con una velocidad constante v con respecto a un observador O, y en una dirección que coincide con el largo de la barra. Como es costumbre, alineemos la dirección del movimiento (y del largo) con el eje x del sistema de referencia K utilizado por O para registrar eventos. En dicho sistema de referencia, O podrá constatar que la barra cubre una región de dos dimensiones en el plano (x, t) delimitada por dos *líneas mundo* denotando los extremos de la barra (ver siguiente figura). Es usual denominar a tal región como *sabana mundo*. Es conveniente pensar en los extremos de la barra como partículas. Dado que la barra



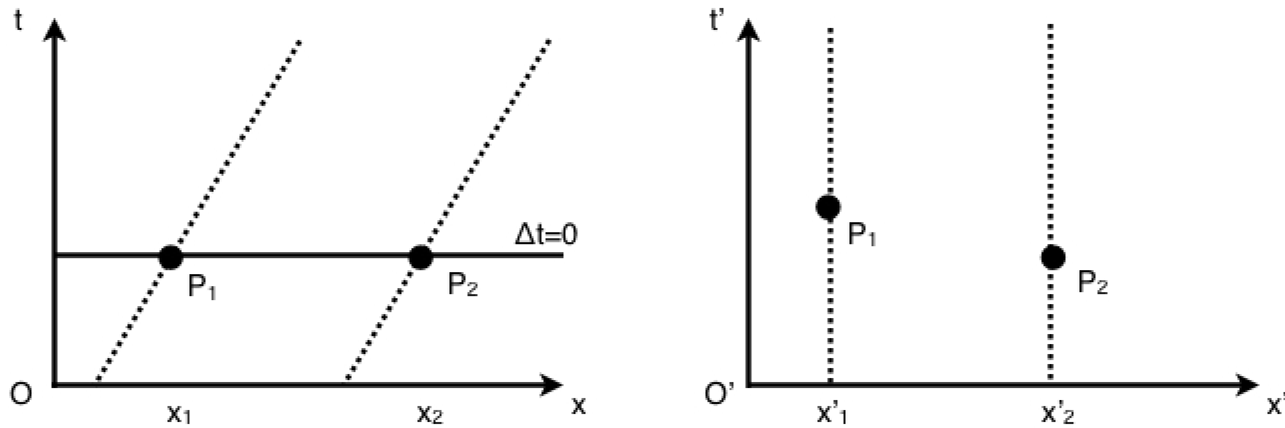
pretende ser un objeto físico, los extremos de la barra deben seguir lineas de mundo tipo tiempo (recuerden la discusión de la Sección **??**). En el presente caso, el observador O claramente verá los extremos de la barra en movimiento rectilíneo uniforme, a velocidad v. Por otro lado un observador O' en reposo con respecto a la barra, pero a velocidad v con respecto a O, verá que los extremos de la barras corresponden a líneas mundo completamente verticales en el plano (x', t') de su sistema de referencia, la primera en x'_1 y la segunda en x'_2. Para el observador O', la diferencia de las coordenadas corresponde a ℓ_0, es decir

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \ell_0. \tag{3.18}$$

Para establecer la medición del largo de la barra que hace O, debemos primero acordar que para éste, la medición del largo de un objeto extendido se hace en forma simultánea. Es decir, el observador O debe registrar la posición de los extremos de la barra a tiempos iguales. Por lo tanto, para él, el largo de la barra consistirá a la distancia espacial entre dos eventos P_1 y P_2 caracterizados por $\Delta t = 0$ (ver siguiente figura). Utilizando (3.18) y la segunda ecuación de (3.16), vemos pues que

$$\Delta x = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3.19}$$

Dado que $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, vemos que el largo medido por O es menor que el largo propio de la barra. A esto se le denomina contracción de Lorentz. Notemos que la forma en que hemos deducido este resultado fue asociando a los extremos de la barra lineas de mundo, y asociando dos eventos P_1 y P_2 a la intersección de estas líneas de mundo con una curva a t =constante. Para O, estos eventos son simultáneos, que es la única forma que el o ella puede medir longitudes (piensen bien esto!). Por otra parte, estos eventos no serán simultáneos para un observador O' en reposo con respecto a la barra (ver figura anterior). De hecho la primera ecuación (3.16) nos dice que si bien P_1 y P_2 están separados por una



distancia $\Delta x' = \ell_0$ en K', también son registrados por O' a destiempo:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\frac{v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -v\ell_0/c^2, \tag{3.20}$$

donde hemos usado (3.19) en la segunda igualdad. Este es quizás el aspecto más característico de la relatividad especial, es decir, el que no exista una forma absoluta de definir simultaneidad. Aquellos eventos que ocurren en forma simultánea para un observador inercial O no serán observados como simultáneos para un observador O' en movimiento con respecto a O.

Para terminar, observen que en el cálculo anterior necesitamos especificar si el origen de ambos sistemas de referenca coinciden o no. Es decir, no fue necesario acordar que los relojes utilizados en ambos sistemas de referencia están sincronizados de tal forma que para $(t, x) = (0, 0)$ uno tiene $(t, x) = (0, 0)$, lo que es utilizado en muchos textos. De hecho, en general tal convención es completamente irrelevante para resolver problemas en relatividad especial, ya que nuestro interés es típicamente describir la relación entre dos o mas eventos, en donde intervienen diferencias de coordenadas, y no la ubicación de los orígenes de los sistemas de referencia.

3.5 Notación β y γ

En ocasiones resulta útil introducir dos parámetros β y γ para simplificar la escritura de las transformaciones de Lorentz. Estos son:

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.21}$$

Teniendo en cuenta estos parámetros, las transformaciones de Lorentz pueden ser reexpresadas como

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x'), \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t'), \tag{3.22}$$

(donde hemos omitido las relaciones adicionales $\Delta y = \Delta y'$ y $\Delta z = \Delta z'$) mientras que sus inversas son

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x), \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t). \tag{3.23}$$

Noten también que por conveniencia hemos multiplicado por c en ambos lados, de modo que Δt y $\Delta t'$ siempre vienen acompañados del factor c.

3.6 Adición de velocidades

Claramente podemos repetir la deducción de las transformaciones de Lorentz para el caso en que dos eventos P_1 y P_2 están infinitesimalmente separados. En tal caso las transformaciones de Lorentz adquieren la forma

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \tag{3.24}$$

junto a las relaciones $dy = dy'$ y $dz = dz'$. Supongamos ahora que nuestro observador O constata una partícula en movimiento a velocidad u a lo largo del eje x. El movimiento de dicha partícula satisface

$$u = \frac{dx}{dt}. \tag{3.25}$$

Supongamos ahora que un segundo observador O' se mueve a velocidad v con respecto a O, también a lo largo del eje x. El observador O' observara la trayectoria de la partícula caracterizada por los infinitésimos dx' y dt' y por lo tanto observará una velocidad

$$u' = \frac{dx'}{dt'}. \tag{3.26}$$

Es posible obtener una relación de adición de velocidades involucrando las cantidades u y u'. Para obtenerla, dividamos la segunda relación en (3.24) por la primera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c\,dt'}{dt' + \beta dx'/c} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}. \tag{3.27}$$

Esta relación nos permite finalmente obtener

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \tag{3.28}$$

que es la relación deseada. También es posible invertir esta relación para obtener u' en términos de u. Es posible obtener tal relación ya sea invirtiendo directamente la relación anterior, o simplemente recordando que el mismo razonamiento para deducir la regla puede ser repetido pero invirtiendo el rol de los obsevadores mediante $v \to -v$

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \tag{3.29}$$

Comparen esta última relación con la regla Galiliana para la adición de velocidades (**??**) examinada en la primera cátedra. Noten que si la velocidad de propagación de señales fuese infinita ($c \to +\infty$) reobtendríamos la regla Galiliana, lo que es consistente con nuestra discusión sobre la instantaneidad de las interacciones.