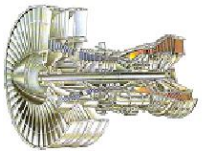
Profesor: Nelson Zamorano

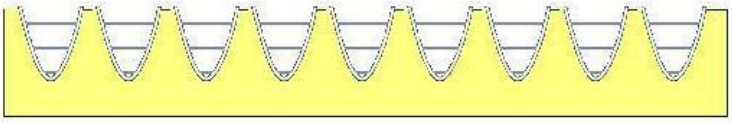
Profesores Auxiliares:
Alejandro Jara
Priscilla Nowajewski



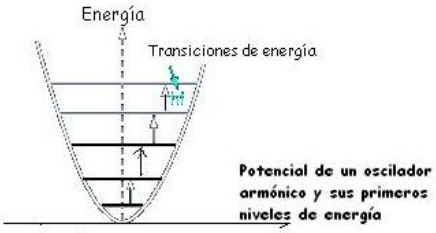
TERMODINÁMICA FI-2004-02
Guía # 7

Problema # 1

El movimiento armónico que ocurre al perturbar un resorte de constante k y una masa m en su extremo, tiene una frecuencia natural $\omega = \sqrt{k/m}$. Un oscilador cuántico tiene -por definición-, sus niveles de energía cuantizadas. Esto es, la energía es un múltiplo de una unidad fija igual a $\hbar\omega$. $\hbar$ es la constante de Plank y su valor es $\hbar = 1{,}1 \times 10^{-34}$J-s. Puede ganar o perder energía solamente en esta unidades ($\hbar\omega$) o un número entero de estas unidades. Es más extraño aún, no puede estar en reposo, su energía mínima NO es cero sino $\hbar\omega/2$. Esto último está relacionado con el principio de incertidumbre: no se puede medir el momentum y la posición de un objeto con una precisión MENOR que $\hbar$. Como es fácil de ver, para un objeto macroscópico esta incertidumbre es la nada misma. No así para una partícula subatómica.



Cada potencial representa un átomo de la red cristalina. En cada posición existen 3 osciladores cuánticos: uno en cada dirección espacial. No interactúan entre ellos de acuerdo al modemo de Einstein.



En 1907 Einstein, sin otra base más que su espíritu aventurero e indagador, propuso un modelo para explicar la capacidad calórica de un sólido. Hasta esa fecha, el comportamiento de la capaciad calórica a baja temperatura no tenía explicación. A temperaturas más altas era $C_V = 3Nk$ que era correspondía a lo observado en los sólidos. Einstein propuso un modelo basado en las tres siguientes suposiciones:

– Cada átomo en la red cristalina es un oscilador armónico CUÁNTICO en tres dimensiones.

– Los átomos no interactúan entre ellos. Actúan en forma independiente. Consideramos cada una de las direcciones espaciales, independientes entre ellas.

– Cada oscilador y en cada una de las tres direcciones, vibra con la misma frecuencia.

En 1912 Debye modificó este modelo, eliminando la última suposición y obteniendo un resultado que se ajusta a lo observado.
resolveremos el problema de Einstein.

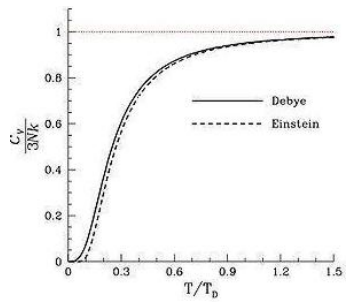
a.- Calcule la entropía del cristal en el modelo de Einstein.
En el problema # 5 de la Guía # 4 , Ud. resolvió parte de este problema. Se pedía encontrar las configuraciones posibles trataba de resolver. Con ese resultado la entropía está a la mano. (Recuerde que cada oscilador tiene

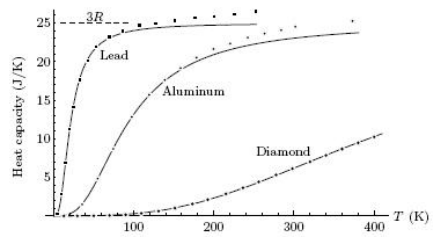
una energía dada por $E_n = \hbar\,\omega\,(n + 1/2)$

b.- Use la aproximación de Stirling, y encuentre la expresión para la energía interna de este sólido. Respuesta $U = 3N\,\epsilon/2 + n\,\epsilon$.

c.- A partir del resultado anterior, encuentre la expresión general de la capacidad calórica a volumen constante de un sólido, en función de la temperatura, el salto de energía típico de cada material ϵ y el número total de partículas en el cristal N.

d.- Demuestre que a temperaturas mucho mayores que ϵ, es decir $\epsilon/(k_B\,T) << 1$, se obtiene la expresión que aparece en el gráfico, conocida como Dulong-Petit.





Debemos ajustar el valor de ϵ para cada elemento

e.- Encuentre la expresión para temperaturas muy bajas $\epsilon/(k_B\,T) >> 1$.

Problema # 2

En el problema anterior considere el caso en que N y n son números muy grandes comparados con la unidad.

a.- Muestre que el potencial químico en esta aproximación es

$$\mu =', -k\,T\,\ln\left(\frac{N+n}{N}\right).$$

b.- Discuta este resultado en el límite de $N >> n$ y $N << n$, concentrándose en la entropía S y evaluando cuánto aumente cuando una partícula que no arrastra energía se incorpora al sistema original. ¿Se obtiene el resultado esperado con esta fórmula?

Problema # 3

Considere un gas monoatómico ideal que vive a una altura z sobre el nivel del mar, de modo que cada partícula tiene una energía potencial $U =', m\,g\,z$, además de su energía cinética.

a.- Demuestre que su potencial químico es el mismo que si el gas estuviera a nivel del mar, con una energía adicional $m\,g\,z$:

$$\mu = -k\,T\,\ln\left[\frac{N}{V}\left(\frac{2\,\pi\,m\,k\,T}{h^2}^{3/2}\right)\right] + m\,g\,z.$$

(Hemos usado la expresión de Sakur-Tetrode para la entropía).

b.- Suponga que ud. tiene dos pedazos de helio, uno a nivel del mar y otro a una altura z. Ambos tienen la misma temperatura y volumen. Suponiendo que se encuentra en un equilibrio de difusión , encuentre el número de moléculas que existe en el volumen superior en función del que se ubica en el volumen inferior.

Problema # 4

Calcule la variación de la entropía que ocurre al mezclar dos gases monoatómicos ideales **A** y **B**, cuya proporción relativa es arbitraria. la designamos por x, con $x \leq 1/2$.
Considere que el número total de moléculas es N. Demuestre que la variación es

$$\Delta S_{\text{mezcla}} = -N\,k\,[x\,\ln(x) + (1-x)\,\ln(1-x)].$$

Problema # 5

Considere un resorte que obedece la ley de Hooke: $x \propto F$ cuando es estirado a temperatura constante. Suponemos que la constante de proporcionalidad k es una función de la temperatura $k = k(T)$.
Determine para este sistema la energía libre F la energía interna U y la entropía S.

la expresión de la energía es $U(T,x) = U(T,0) + (k - k'\,T)\,x^2$. En cada uno de los casos hay una constante que no se determina: $F(T,0)$, $S(T,0)$ que se unifican en $U(T,0)$. Tampoco considere aquí una expansión térmica.

Problema # 6 (Divertimento)

Calcularemos en la forma más simple posible la entropía de un agujero negro, el resultado que hizo famoso a S. Hawking en 1974.
a.- Primero, compruebe que la entropía en su forma más elemental y rudimentaria (en el sentido que se pierde información acerca de varios resultados de interés físico) se puede escribir como $S = N\,k$. Puede apelar a que N es siempre mayor que $\ln N$. En palabras, la entropía en unidades es del orden del número de partículas. Puede estimar la entropía del sol usando esta expresión. Cálcule sabiendo que su masa es 2×10^{30}kg de hidrógeno ionizado.

b.- Aprovecharemos el impulso y calcularemos la entropía de un agujero negro. Definámoslo primero: es una estrella en la cual la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz.
Calculemos (en orden de magnitud solamente) primero su tamaño, el radio de un agujero negro. Físicamente deben intervenir las siguientes cantidades: la masa M de la estrella que se convirtió en agujero negro, como existe atracción gravitacional, debe aparecer la constante universal de la gravitación de newton G y el parámetro que define al agujero negro: la velocidad de escape involucrada c =la velocidad de la luz.
Construya con estas constantes una cantidad que tenga dimensiones de longitud. Ése será el radio del agujero negro.

c.- La entropía de un agujero negro involucra la constante $\hbar$, el sello de la mecánica cuántica. Esta es una de las razones por las cuales el resultado de Hawking es tan importante: hay un esbozo de unificación entre el mundo cuántico (micromundo) y la gravitación (el macromundo). Esta es una teoría incompleta, aún hoy nadie sabe cómo armar una teoría consistente que unifique ambos fenómenos, la gravitación y el comoportamiento cuántico.
El resultado de mecánica cuántica que usaremos es el siguiente: el momentum p es igual a $p = 2\,\pi\,\hbar/\lambda$ donde λ es la longitud de onda asociada a cada partícula. A un momento más grande, se le asocia un longitud de onda más pequeña. También la masa de una partícula es igual a $m = h/(\lambda\,c)$
Suponiendo que la longitud de onda es igual a la circunferencia del agujero negro, pruebe que bajo esta hipótesis de plausibilidad, la longitud de onda adopta el valor $\lambda = (4\,\pi\,G\,M)/c^2$

d.- Calcule el número N de partículas que necesito para armar este agujero negro de masa M: $N = (M\,c^2)/\{p^2/(2\,m)\}$. Esto es la energía de la estrella dividida por la energía de cada una de las partículas, da el número total de partículas.
La entropía, de acuerdo a la aproximación del punto a.- sería: $S \approx k\,N$. La temperatura T
$\mathrm{approx}\,(M\,c^2)/S$. Evalúelas. la f´rmula obtenida es muy parecida a la obtenida por Hawking.