Pauta Control de Lectura Nº6

1.- Cuales son las componentes de Fourier de la señal de tensión $V(t)=2\cdot\sin^2\left(40\pi t+\pi/2\right)$. Recuerda que la tensión tiene unidades.

<u>Método 1: reconocer componentes</u>

Tenemos que una función F(t) queda totalmente determinada por su serie de Fourier a través de la siguiente expresión

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos\left(2\pi n f_o t\right)+B_n\cdot\sin\left(2\pi n f_o t\right)\right)\ (*)$$

Luego, nos interesa transformar la tensión del enunciado en una expresión compuesta por puros senos y cosenos para reconocer directamente los valores para A_n y B_n.

Recordar:

- (1) $\sin^2(\theta)=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- (2) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

Luego, con (1),

$$V(t)=2\cdot\sin^2\left(40\pi t+\pi/2\right)=2\left(\frac{1-\cos(80\pi t+\pi)}{2}\right)=1-\cos(80\pi t+\pi)$$

Aplicando (2),

$$V(t)=1-\cos(80\pi t+\pi)=1-\cos(80\pi t)\cos(\pi)+\sin(80\pi t)\sin(\pi)$$

Como $\cos(\pi)=-1 \quad \wedge \quad \sin(\pi)=0$,

$$V(t)=1+\cos(80\pi t)$$

Falta encontrar la frecuencia fundamental f_0 de la tensión. Se sabe que una función sin(2πft) oscila a frecuencia f. Es fácil ver que una función $\sin^2(2\pi ft)$ oscilará al doble de la frecuencia f (semiciclos negativos pasan a ser positivos, con lo que el periodo disminuye a la mitad).

En términos de la búsqueda de la frecuencia el desfase de π/2 se puede ignorar y observamos que el seno sin elevar al cuadrado oscila a 20[Hz]. Luego, el voltaje V(t) oscila al doble, f_o=40[Hz].

La expresión encontrada para la tensión permite determinar los coeficientes directamente,

$$V(t) = 1 + \cos\left(80\pi t\right)$$

No hay función seno involucrada, luego todos los coeficientes B_n son nulos. Es importante agregar que la función entregada es una función par, luego solo quedará descrita por los términos pares de la expresión (*). Del mismo modo, si una función fuese impar, necesariamente los términos A_n. serían nulos.

Es directo que se cumple que

$$\frac{A_0}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A_0 = 2$$

Y por último, debemos reconocer a que término corresponde el cos(80πt), comparándolo con $A_n\cos(2\cdot\pi\cdot n\cdot f_0\cdot t)$. Como tenemos que f_0 es 40[Hz] e igualando se despeja el n,

$$80\pi t = 2\pi n f_0 t \quad \Rightarrow \quad 80 = 2n40 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

Con esto se sabe que A_1=1 y todos los otros A_n son nulos. Siguiendo el "hint" que se da en el enunciado, no hay que olvidarse de las unidades! Resumiendo todo,

$$\begin{aligned} A_n &= 2\left[V\right] \quad n = 0 \\ A_n &= 1\left[V\right] \quad n = 1 \\ A_n &= 0\left[V\right] \quad \forall n \neq 0,1 \\ B_n &= 0\left[V\right] \quad \forall n \end{aligned}$$

<u>Método 2: integrar</u>

En general no era muy directo a partir de la tensión entregada como seno cuadrado y para hacerlo era necesario andar claro con algunas primitivas y técnicas de integración. Si se había alcanzado la expresión

$$V(t) = 1 + \cos\left(80\pi t\right)$$

se podrían haber formado las siguientes integrales, como se indica en la guía teórica nº6, ecs. (16) y (17),

$$(3)\ A_n = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1+\cos\left(80\pi t\right)\right)\cos\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

$$(4)\ B_n = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1+\cos\left(80\pi t\right)\right)\sin\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

Trabajando un poco la expresión (3), se obtiene,

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(2\pi n f_0 t\right) dt + \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(80\pi t\right)\cos\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

Sabemos que f_o=1/T, T=1/40 [s].

- Veamos el caso n=0.

$$A_o = \frac{2}{T}\int_0^T 1\, dt + \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(80\pi t\right) dt = \frac{2}{T}T + \frac{2}{T}\cdot 0 = 2$$

- Veamos el caso n=1.

$$A_1 = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(80\pi t\right) dt + \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(80\pi t\right)\cos\left(80\pi t\right) dt$$

En la expresión anterior la primera integral es nula (coseno sobre el periodo integra cero). Para la segunda expresión uno le podía echar mano a la ecuación (16) de la guía teórica:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(2\pi n f_0 t\right)\cos\left(2\pi m f_0 t\right) dt = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad n = m$$

Con lo anterior, se obtiene que

$$A_1 = \frac{2}{T}\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

- Veamos el caso n>1

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(2\pi n f_0 t\right) dt + \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(80\pi t\right)\cos\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

La primera integral es nula para cualquier n, dado que se integran n ciclos completos. Para la segunda integral se puede hacer uso de la ecuación (11) de la guía teórica.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(2\pi n f_0 t\right)\cos\left(2\pi m f_0 t\right) dt = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m$$

Con ello,

$$A_n = 0 \quad \forall n>1$$

Observamos con lo anterior que se encontró el valor de todos los coeficientes A_n y que estos coinciden con los del método por inspección. El cálculo de los B_n es muy similar y queda propuesto, básicamente es demostrar que son nulos para todo n.

Sebastián Püschel L.
s_puschel@hotmail.com