Universidad de Chile

fcfm Ingeniería

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Métodos Experimentales
FI2003
Semestre primavera 2009
Clase #11

Nicolás Mujica
nmujica@dfi.uchile.cl

Clase #12

- Análisis de Fourier
  - ➡ Teorema de Fourier
  - ➡ Ejemplo con cálculo explícito de coeficientes
  - ➡ Equivalencia con descripcion de cursos matemáticos
  - ➡ Aplicación numérica

Análisis de Fourier

Teorema de Fourier

Señal periódica F(t+T) = F(t)

$$\boxed{F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_o t) + B_n \sin(2\pi n f_o t)}$$

Donde $f_o = 1/T$ es la frecuencia más baja

Consistente con la definición

$$\boxed{F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_o t) + b_n \sin(2\pi n f_o t)}$$

Donde $A_n = a_n + a_{-n} \; ; \; B_n = b_n - b_{-n}$

Análisis de Fourier

¿Cómo se obtienen los coeficientes An y Bn?

Se define un producto interno (o escalar)

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t) f_2(t) dt$$

Las funciones sinudoidales conforman una base ortogonal.
Si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt &= 0, \\
\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt &= 0, \\
\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt &= 0. \qquad \forall\, m,\, n\,!
\end{aligned}$$

Análisis de Fourier

¿Cómo se obtienen los coeficientes An y Bn?

y para $m = n$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\pi n f_o t)\cdot\cos(2\pi m f_o t)dt = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\pi n f_o t)\cdot\sin(2\pi m f_o t)dt = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cdot\cos(2\pi n f_o t)dt,$$
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cdot\sin(2\pi n f_o t)dt.$$

y...

$$\frac{A_o}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$$

Análisis de Fourier

¿Cómo se obtienen los coeficientes An y Bn?

En la práctica

$$\boxed{F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n f_o t}}$$

Si F(t) es real, entonces $C_n = {C_{-n}}^*$

Luego

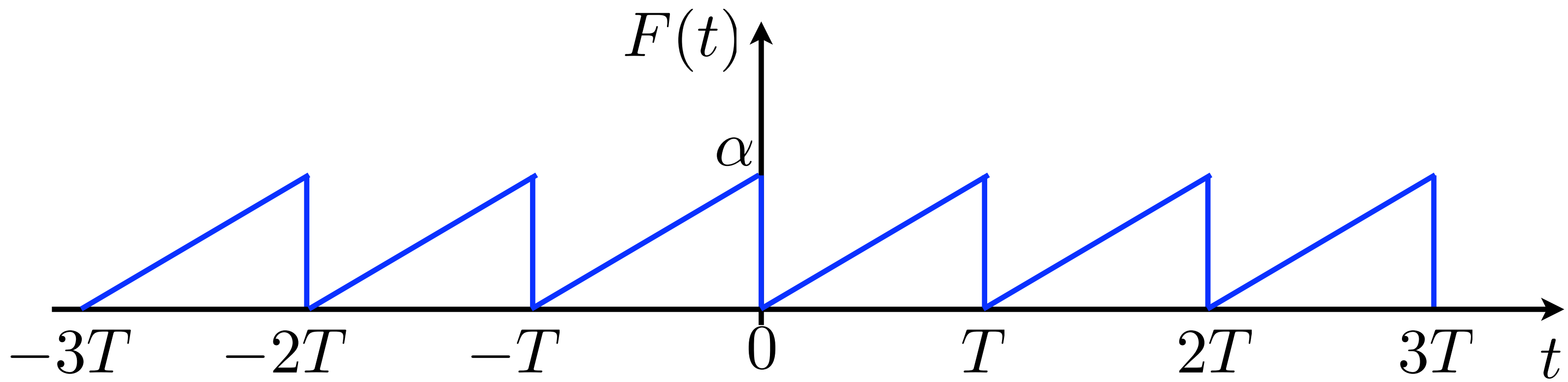
$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\cdot e^{-2\pi i n f_o t}dt}$$

Análisis de Fourier

Ejemplo con cálculo de coeficientes:

$$F(t) = \alpha \cdot \frac{t}{T},\ 0 < t < T$$

$$F(t+T) = F(t),\ t < 0\ \ o\ \ T < t$$



Análisis de Fourier

Ejemplo con cálculo de coeficientes:

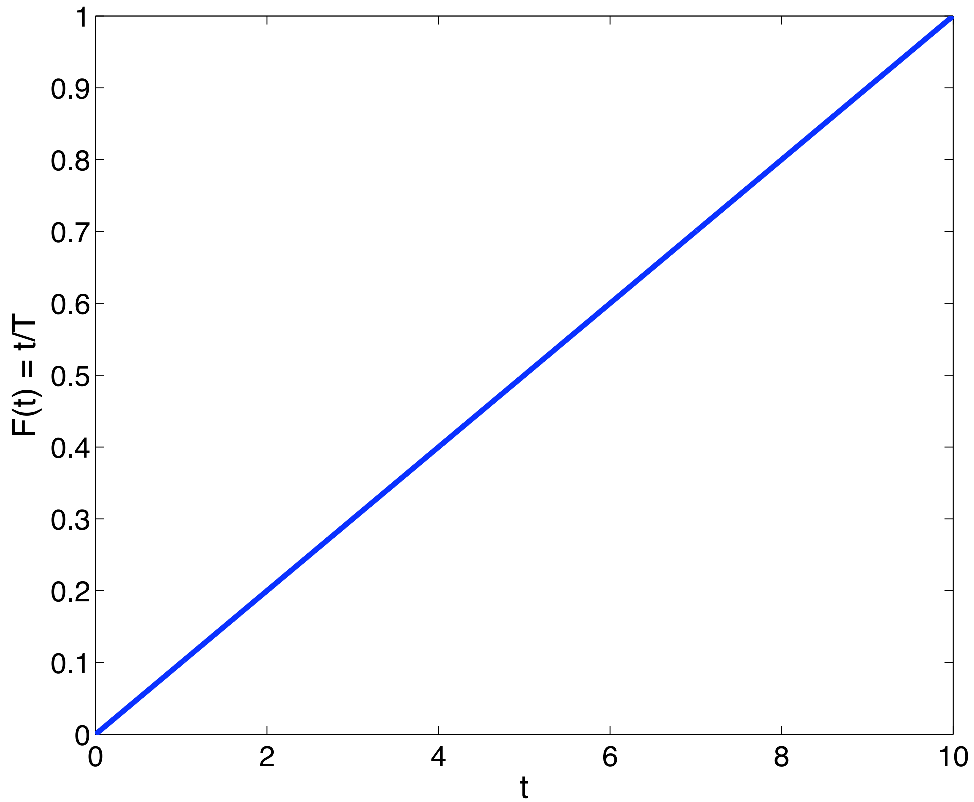
$$F(t) = \alpha \cdot \frac{t}{T}, \; 0 < t < T$$

$$F(t+T) = F(t), \; t < 0 \;\; o \;\; T < t$$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{A_o}{2} = \frac{\alpha}{2} \\[2ex] A_n = 0 \;\; \forall \; n \\[2ex] B_n = -\frac{\alpha}{n\pi} \;\; \forall \; n \end{gathered}}$$

Análisis de Fourier

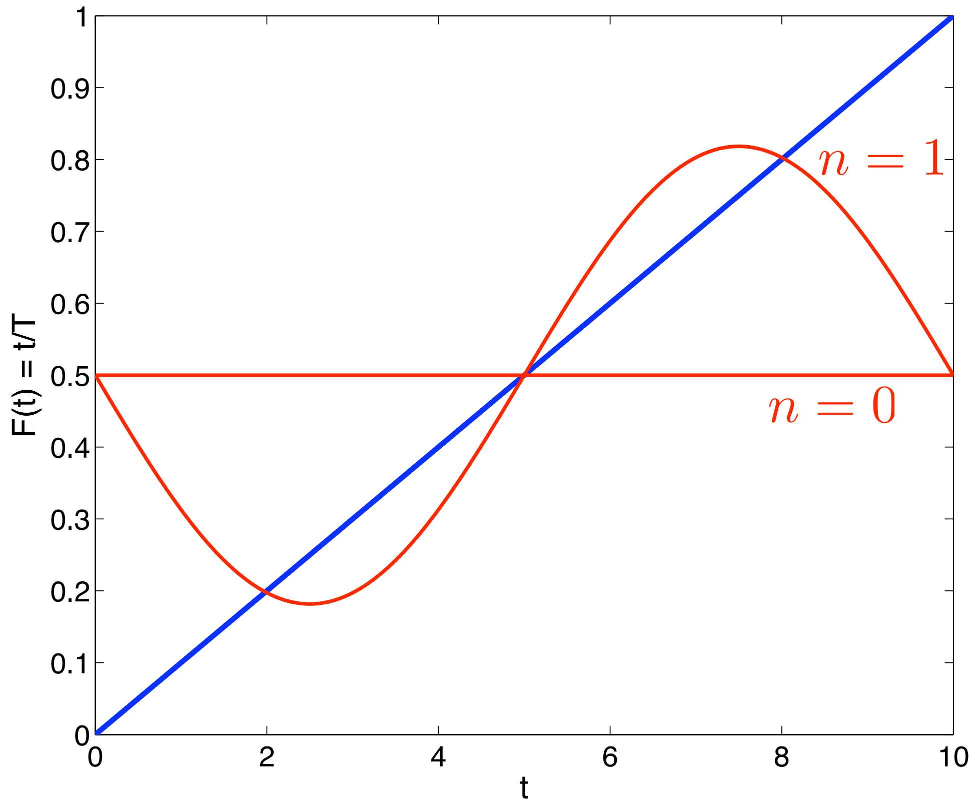
$$\alpha = 1; \quad T = 10;$$



http://www.falstad.com/fourier/

Análisis de Fourier

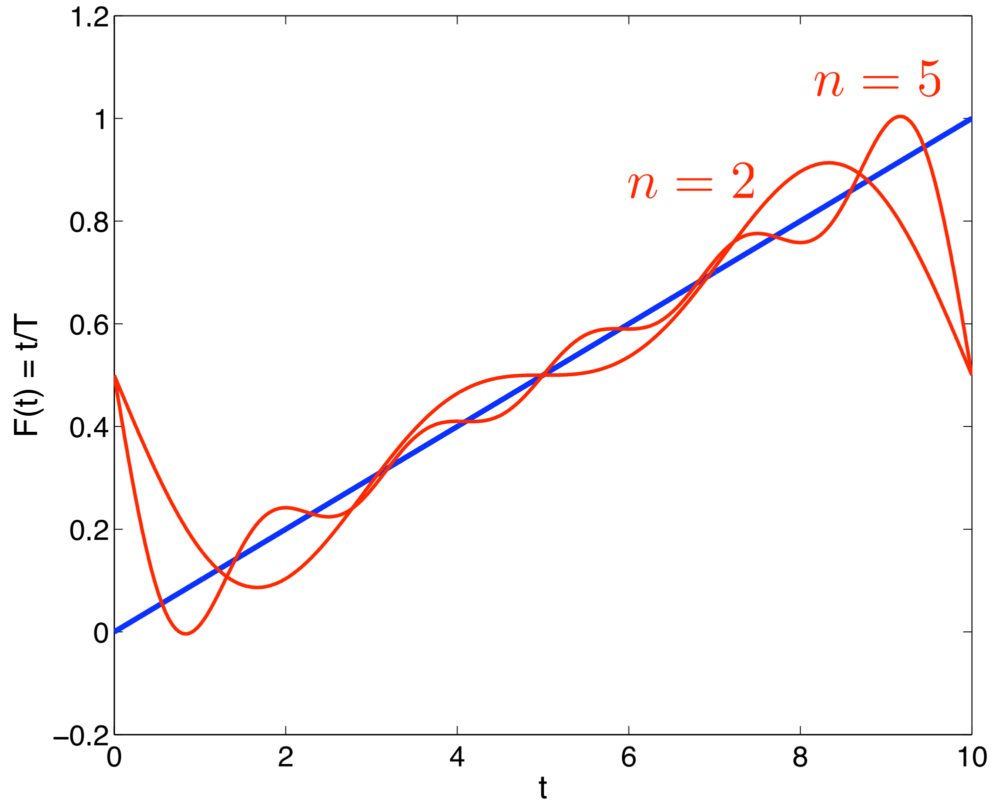
$$\alpha = 1; \quad T = 10;$$



http://www.falstad.com/fourier/

Análisis de Fourier

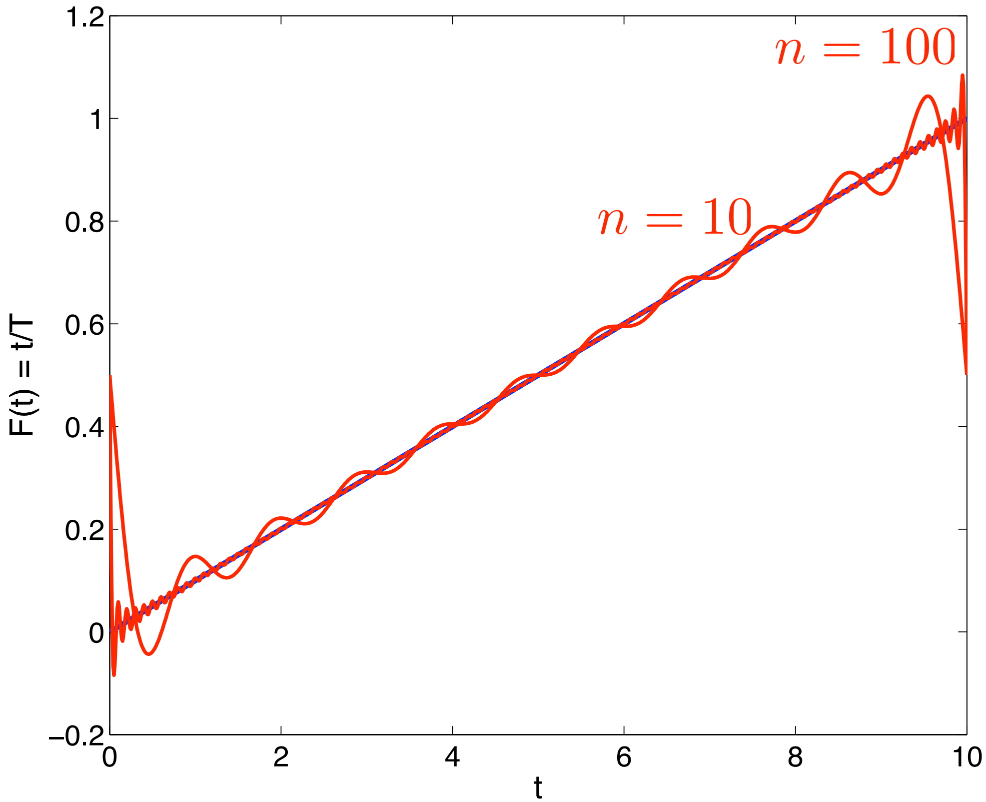
$$\alpha = 1; \quad T = 10;$$



http://www.falstad.com/fourier/

Análisis de Fourier

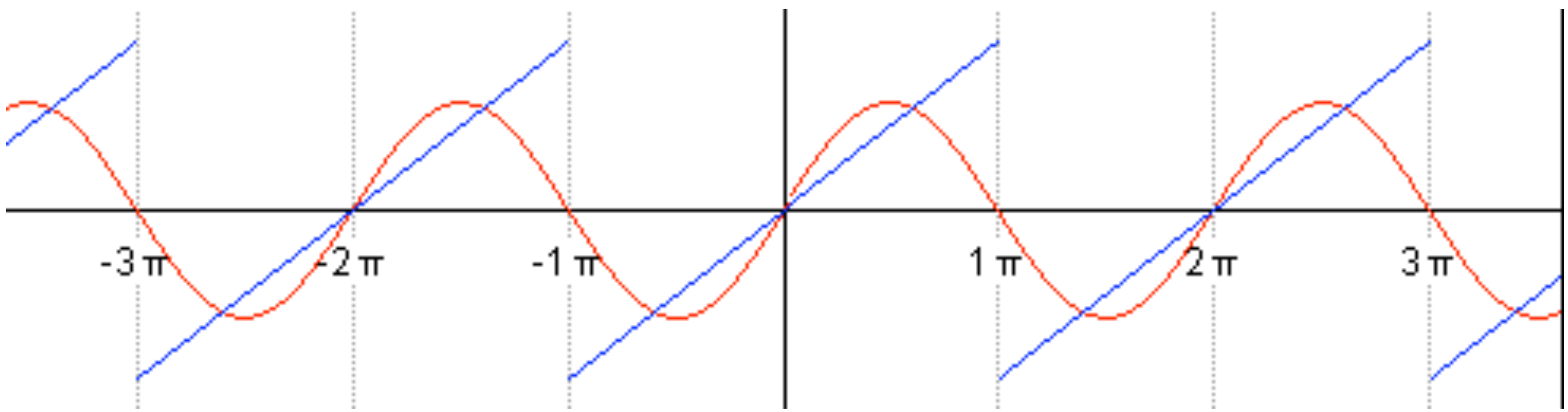
$$\alpha = 1; \quad T = 10;$$



http://www.falstad.com/fourier/

Análisis de Fourier

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{\alpha t}{T} \\
t &= \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]
\end{aligned}
$$



Equivalencia con descripción de cursos matemáticos

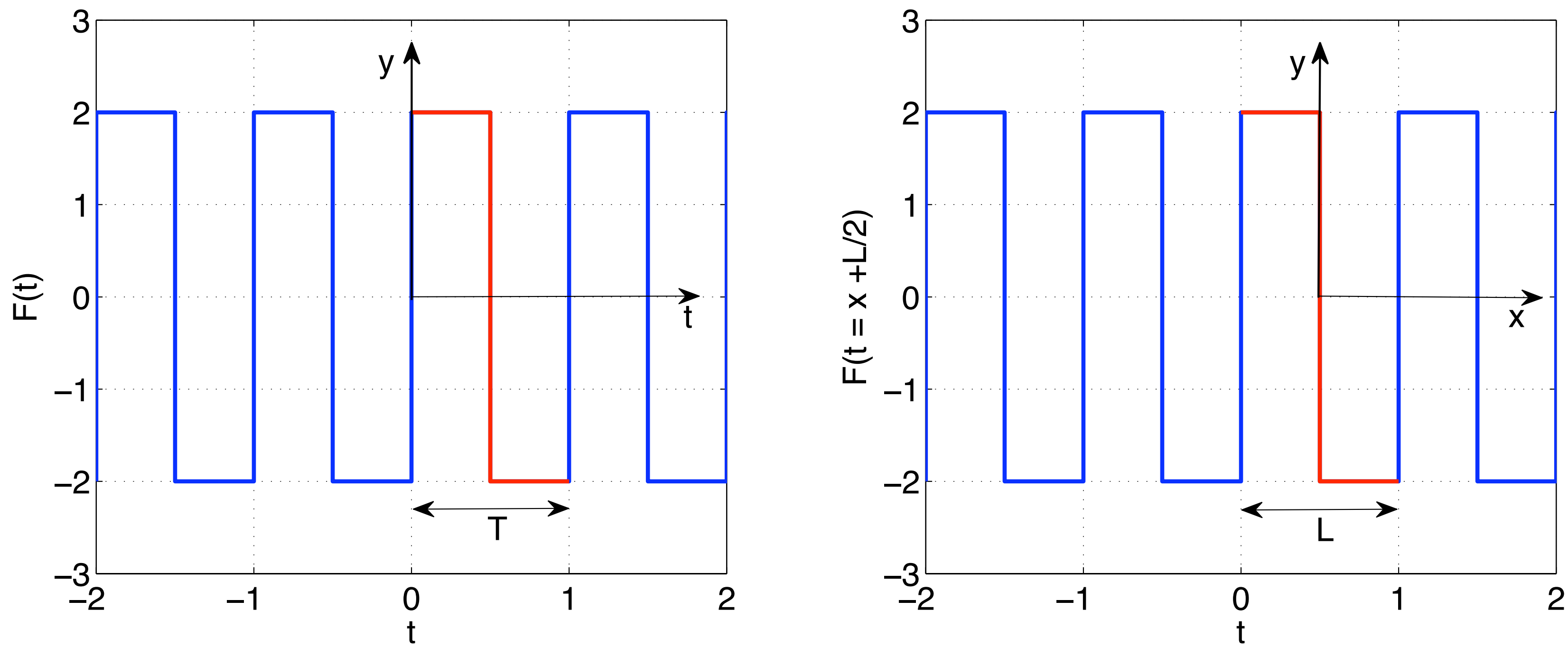
En el ejemplo anterior

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\alpha t}{T} \\ t &= \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right] \end{aligned}$$

En forma más general

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x+L) \\ x &= \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right] \end{aligned}$$

Equivalencia con descripción de cursos matemáticos



Cambio de variable

$$
\begin{aligned}
x &= t - \frac{L}{2} \\
L &= T
\end{aligned}
$$

Equivalencia con descripción de cursos matemáticos

Cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= t - \frac{L}{2} \\ L &= T \end{aligned}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi nx/L) + B_n \sin(2\pi nx/L)) \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) \cdot \cos(2\pi nx/L) dx \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) \cdot \sin(2\pi nx/L) dx \end{aligned}$$

Análisis de Fourier

Implementación numérica

Primera observación:

Por definición, una serie de datos numéricos se ha obtenido a una cierta frecuencia de adquisición y es además finita.

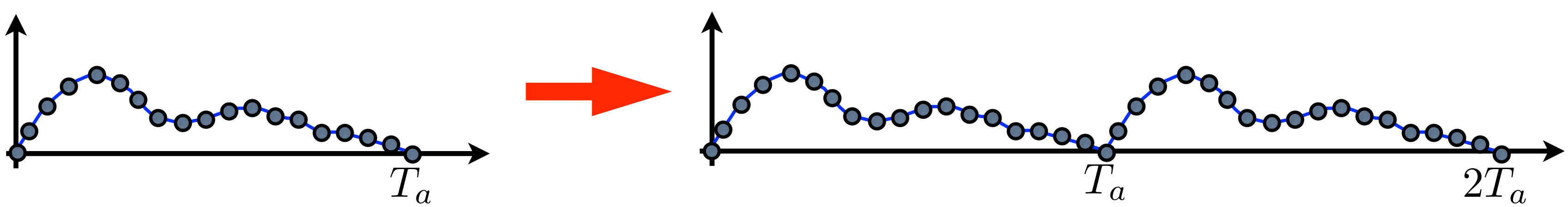
frecuencia de adquisición: f_s

Número de datos: $N+1$

Tiempo de adquisición: $T_a = N\Delta t = N/f_s$

A continuación se asume que la señal tiene una periodicidad

$$T = T_a$$



Análisis de Fourier

Implementación numérica

Las frecuencias están dadas entonces por la serie

$$f_0 = 0$$

Componente contínua

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{N}$$

frecuencia mínima

$$f_2 = \frac{2}{T} = \frac{2f_s}{N}$$

$$\ldots$$

$$\boxed{f_k = \frac{k}{T} = \frac{kf_s}{N}}$$

¿Existe una frecuencia máxima?

Análisis de Fourier

Implementación numérica

Las frecuencias están dadas entonces por la serie

$$f_0 = 0$$ Componente contínua

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{N}$$ frecuencia mínima

$$f_2 = \frac{2}{T} = \frac{2f_s}{N}$$

$$\ldots$$

$$\boxed{f_k = \frac{k}{T} = \frac{kf_s}{N}}$$

¿Existe una frecuencia máxima?

Si: $$f_{k_{\max}} = \frac{k_{\max}}{T} = \frac{k_{\max} f_s}{N} = \frac{f_s}{2} \Rightarrow k_{\max} = \frac{N}{2}$$

Análisis de Fourier

Implementación numérica

Resumen:

Si la serie temporal tiene $N+1$ datos, entonces hay $N/2+1$ frecuencias!

Frecuencia cero

$$\boxed{f_k = \frac{k}{T} = \frac{kf_s}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, ..., \frac{N}{2}$$

Análisis de Fourier

Implementación numérica

Ejemplo: Uso de función fft() con Matlab $\quad N+1=129$ y $f_s = 100\text{ Hz}$

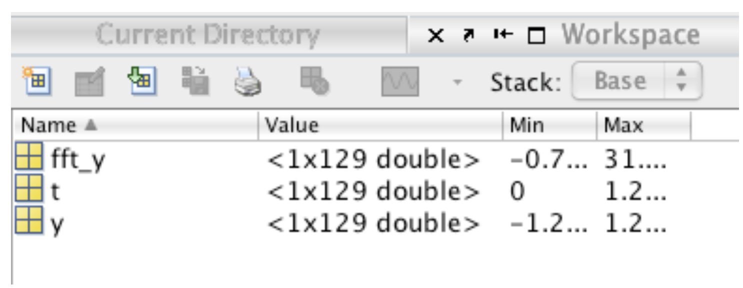
```
>> t = linspace(0,128,129)*0.01
t =
  Columns 1 through 8
         0    0.0100    0.0200    0.0300    0.0400    0.0500    0.0600    0.0700
  Columns 9 through 16
    0.0800    0.0900    0.1000    0.1100    0.1200    0.1300    0.1400    0.1500
  Columns 17 through 24
    0.1600    0.1700    0.1800    0.1900    0.2000    0.2100    0.2200    0.2300
```

$\vdots$

```
 Columns 121 through 128
   1.2000    1.2100    1.2200    1.2300    1.2400    1.2500    1.2600    1.2700
 Column 129
   1.2800

>> y = sin(2*pi*4*t)+0.5*sin(2*pi*8*t);
>> fft_y = fft(y);
>> |
```

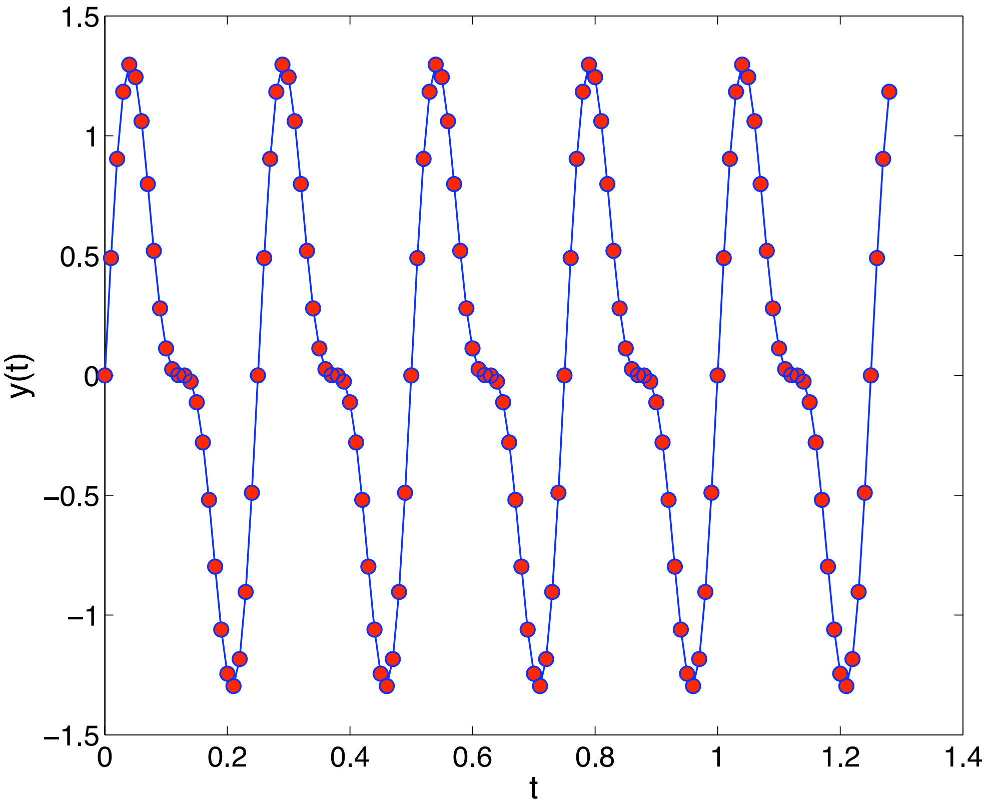
$\longrightarrow$



Análisis de Fourier

Implementación numérica

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.5\sin(2\pi 8t)$$



$$N + 1 = 129$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

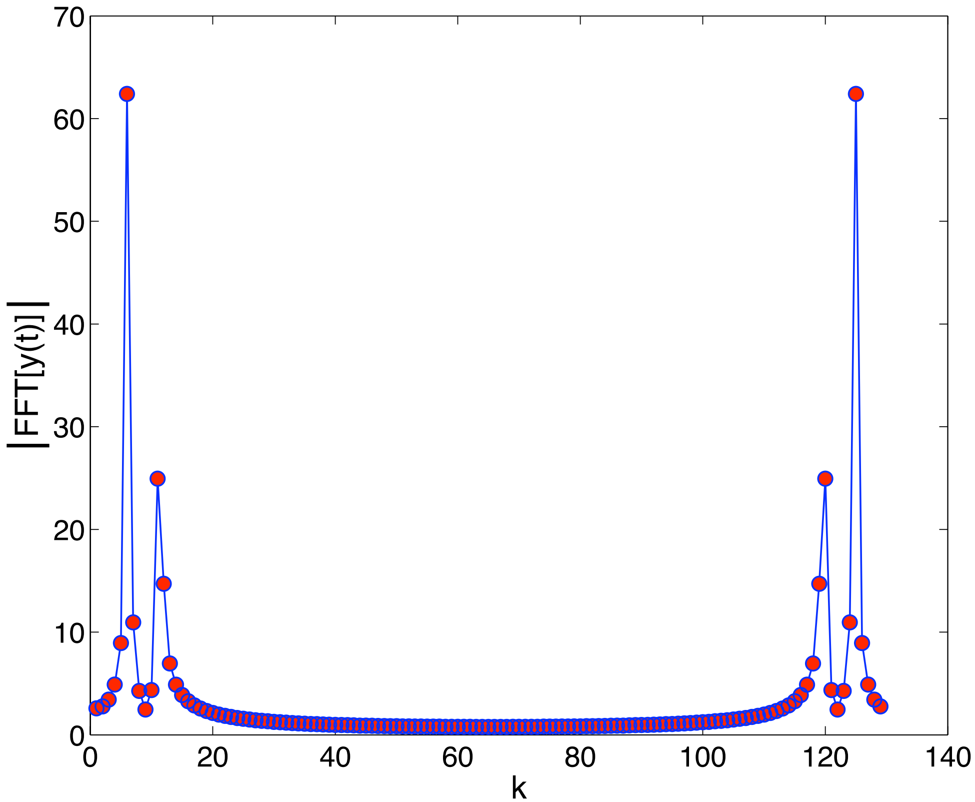
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$

Análisis de Fourier

Implementación numérica

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.5\sin(2\pi 8t)$$



$$N + 1 = 129$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

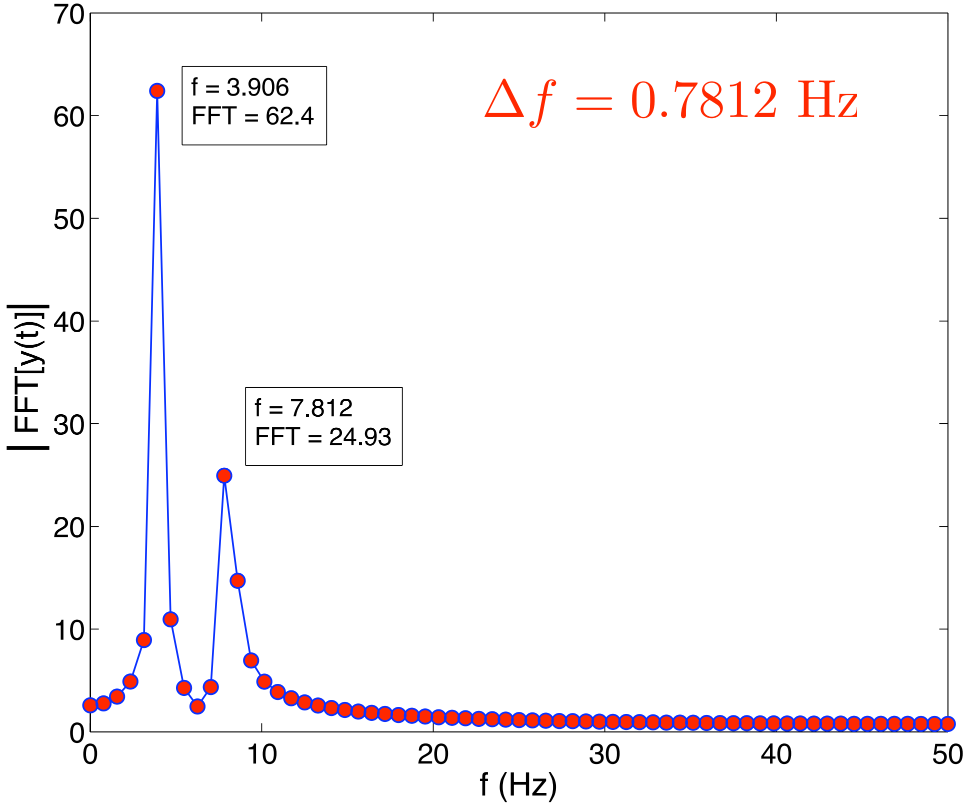
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$

Análisis de Fourier

Implementación numérica

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.5\sin(2\pi 8t)$$



$$N + 1 = 129$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

$$A_1 = 1$$

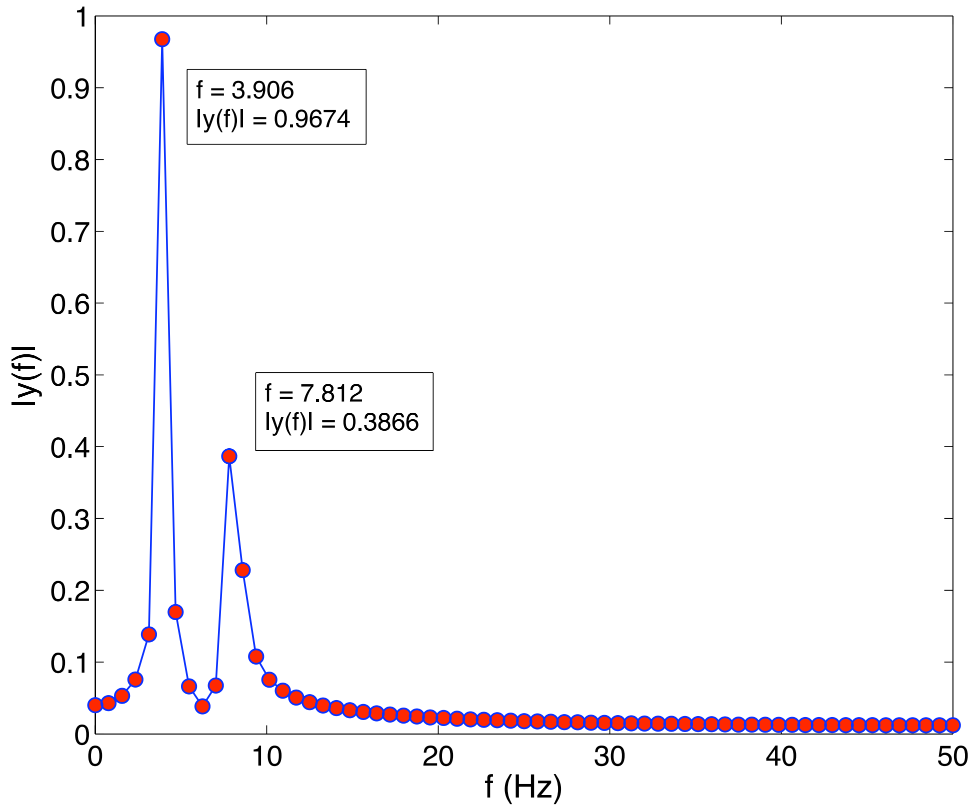
$$A_2 = 0.5$$

¿Normalización de FFT?

Análisis de Fourier

¿Normalización de FFT?

$$|y(k)| = 2|FFT[y(t)]|/(N+1)$$



$$N+1 = 129$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

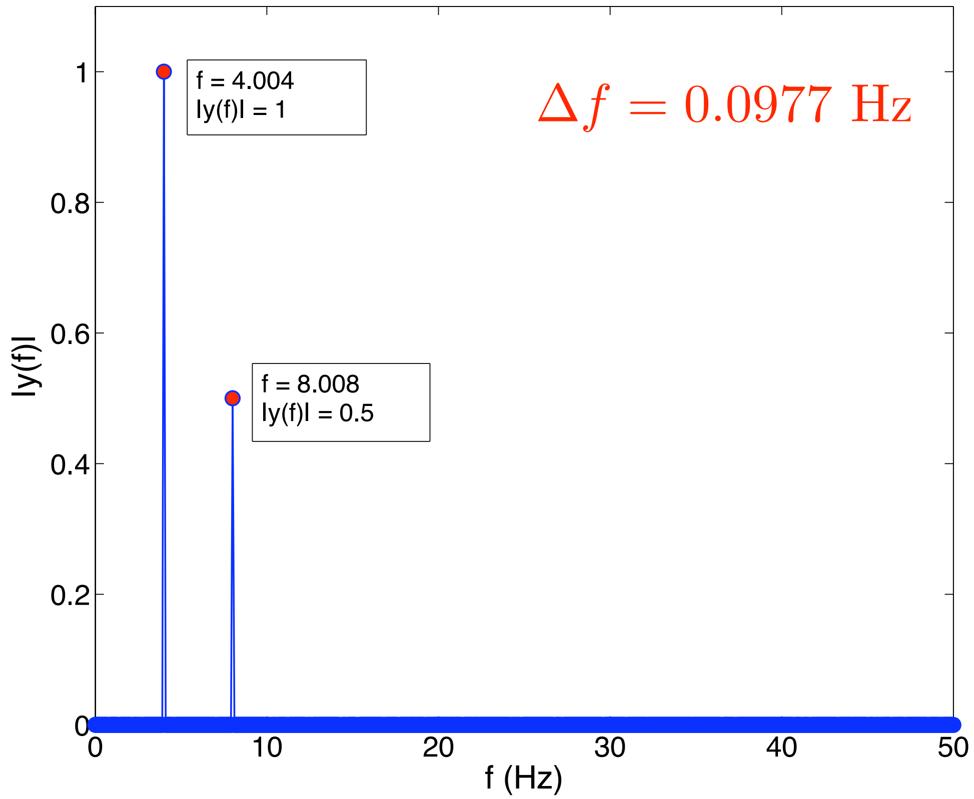
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$

Análisis de Fourier

¿Resolución de FFT?

$$|y(k)| = 2|FFT[y(t)]|/(N+1)$$



$$N+1 = 1025$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

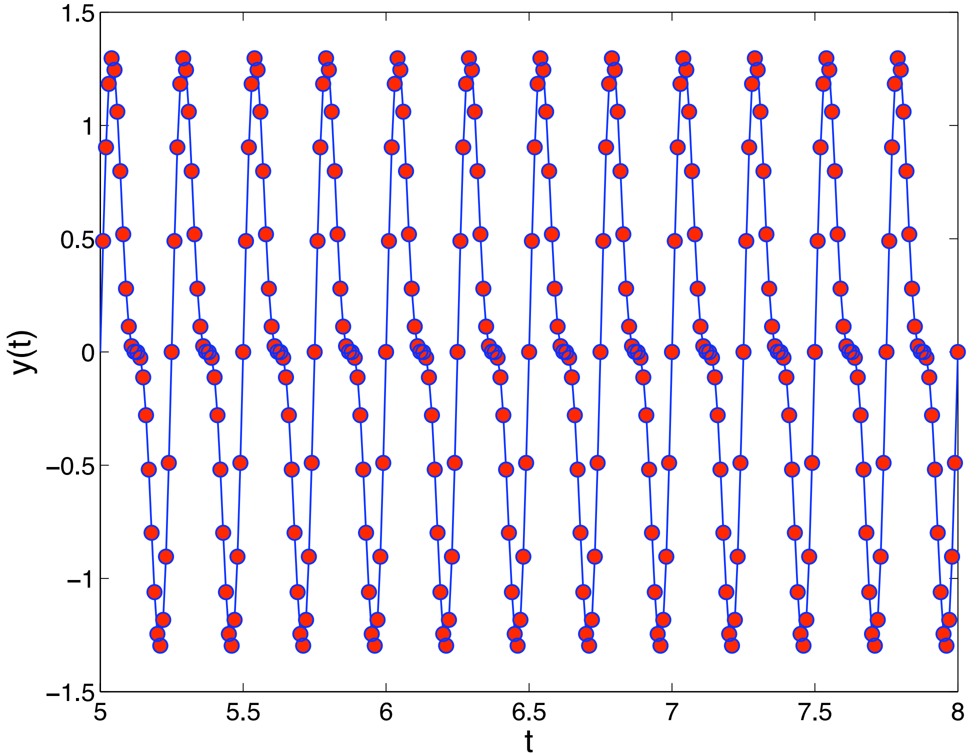
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$

Análisis de Fourier

¿Ruido en señal original?

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.5\sin(2\pi 8t)$$



$$N + 1 = 1025$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

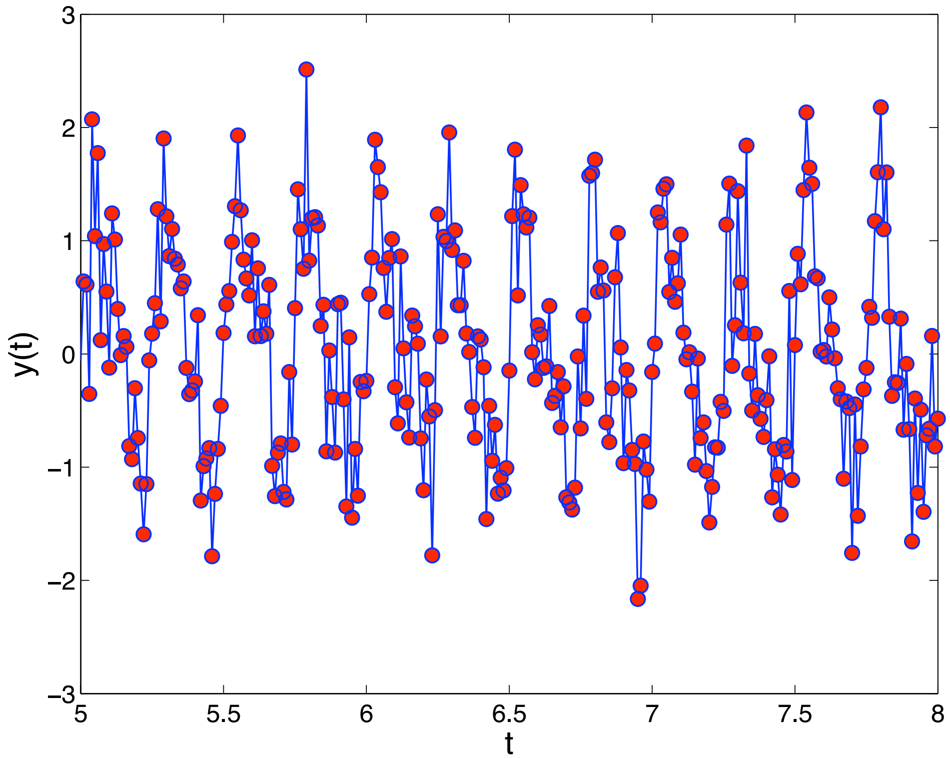
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$

Análisis de Fourier

¿Ruido en señal original?

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.5\sin(2\pi 8t) \text{ + ruido}$$



$$N + 1 = 1025$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

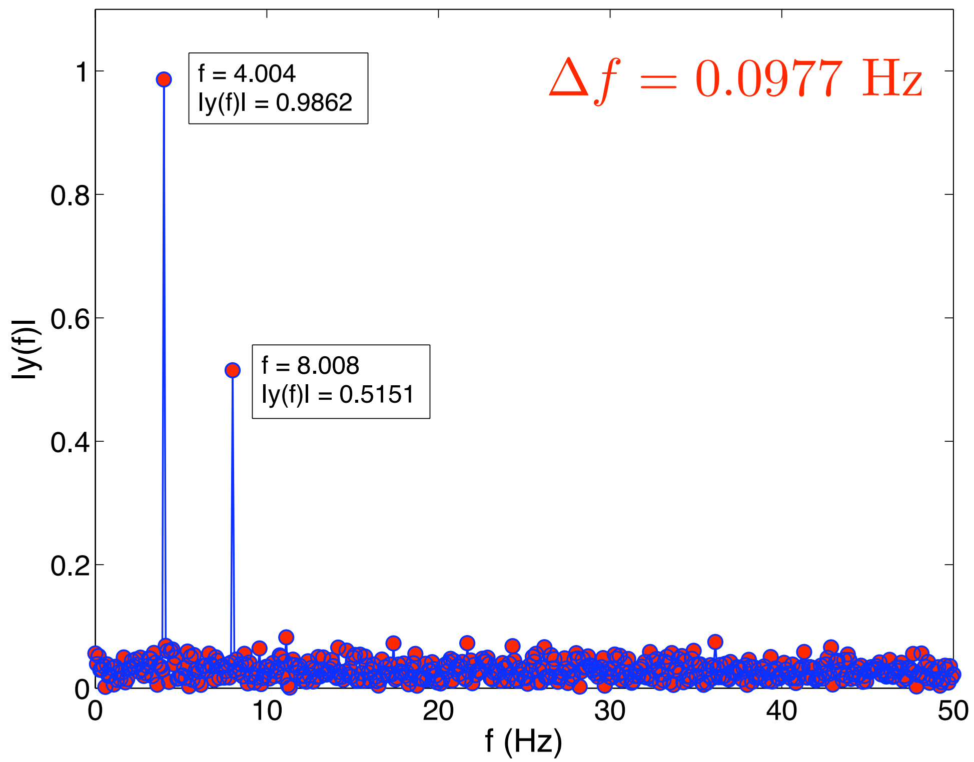
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$

Análisis de Fourier

¿Ruido en señal original?

$$y = \sin(2\pi 4t) + 0.5\sin(2\pi 8t) \text{ + ruido}$$



$$N + 1 = 1025$$

$$f_s = 100 \text{ Hz}$$

$$4 \text{ Hz y } 8 \text{ Hz}$$

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0.5$$