Universidad de Chile

fcfm
Ingeniería
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Métodos Experimentales

FI2003

Semestre Primavera 2009

Clase #10

Nicolás Mujica

nmujica@dfi.uchile.cl

Clase #10

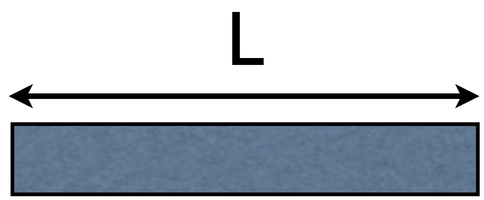
- Fundamentos de elasticidad
- Propagación de ondas y vibraciones
- Técnicas acústicas de caracterización de materiales
  - ➡ Técnicas estáticas
  - ➡ Técnicas dinámicas: Mediciones de velocidad de sonido y resonancias

Elasticidad lineal

- Un sólido rígido es una aproximación
- Los sólidos reales se deforman al ser sometidos a una fuerza externa.
- Elasticidad lineal: las (pequeñas) deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas (ley de Hooke).
- Lo más simple es considerar un sólido homogéneo e isótropo (sus propiedades no dependen del espacio ni su orientación).

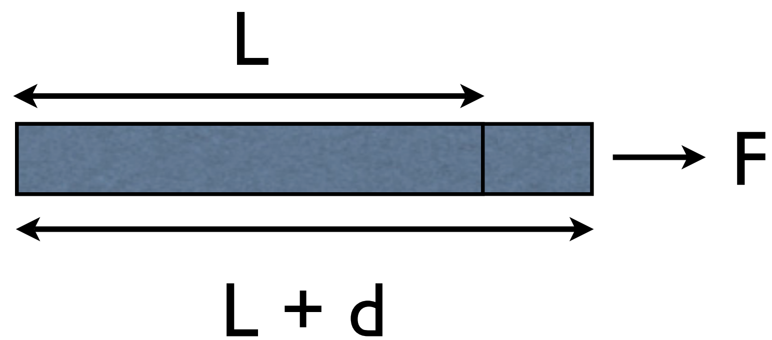
Elasticidad lineal

- Elasticidad lineal: las (pequeñas) deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas (ley de Hooke).



Elasticidad lineal

- Elasticidad lineal: las (pequeñas) deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas (ley de Hooke).



Ley de Hooke para solidos: F es proporcional a d

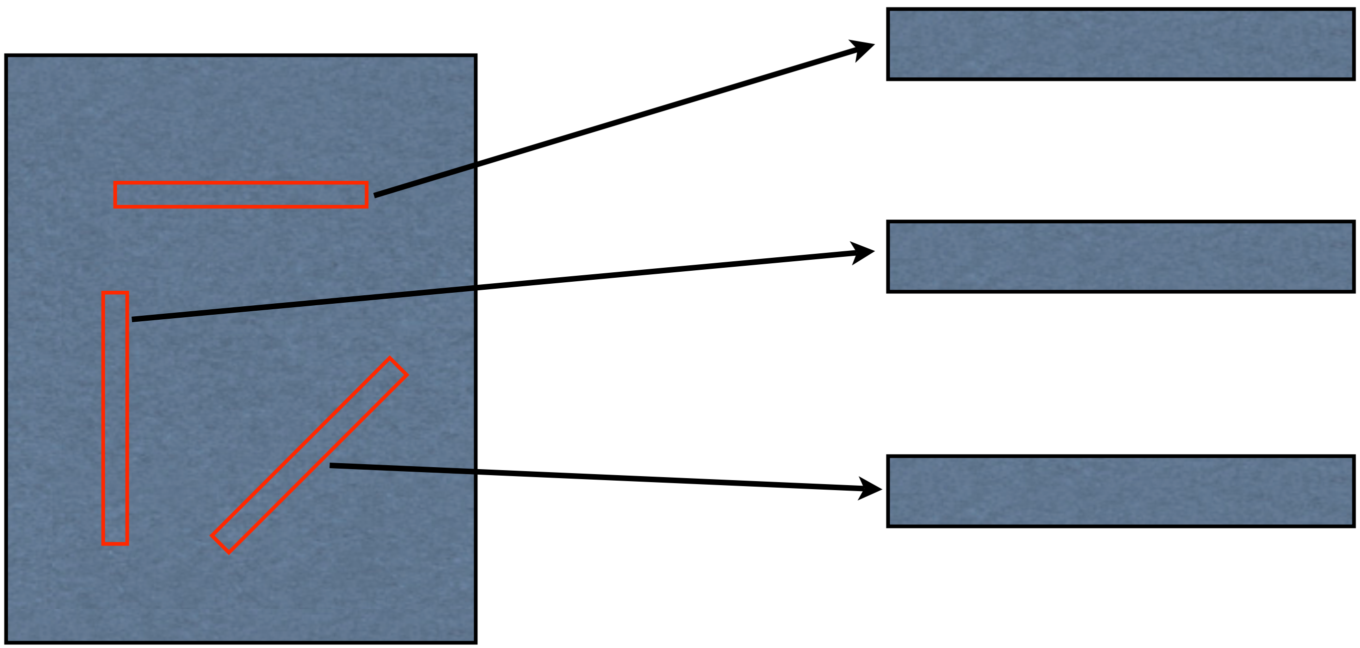
$$\boxed{F = K \cdot d}$$

Elasticidad lineal

- Lo más simple es considerar un sólido homogéneo e isótropo (sus propiedades no dependen del espacio ni su orientación).

pedazo original

muestras 1, 2 y 3



$$F = K_1 \cdot d_1$$

$$F = K_2 \cdot d_2$$

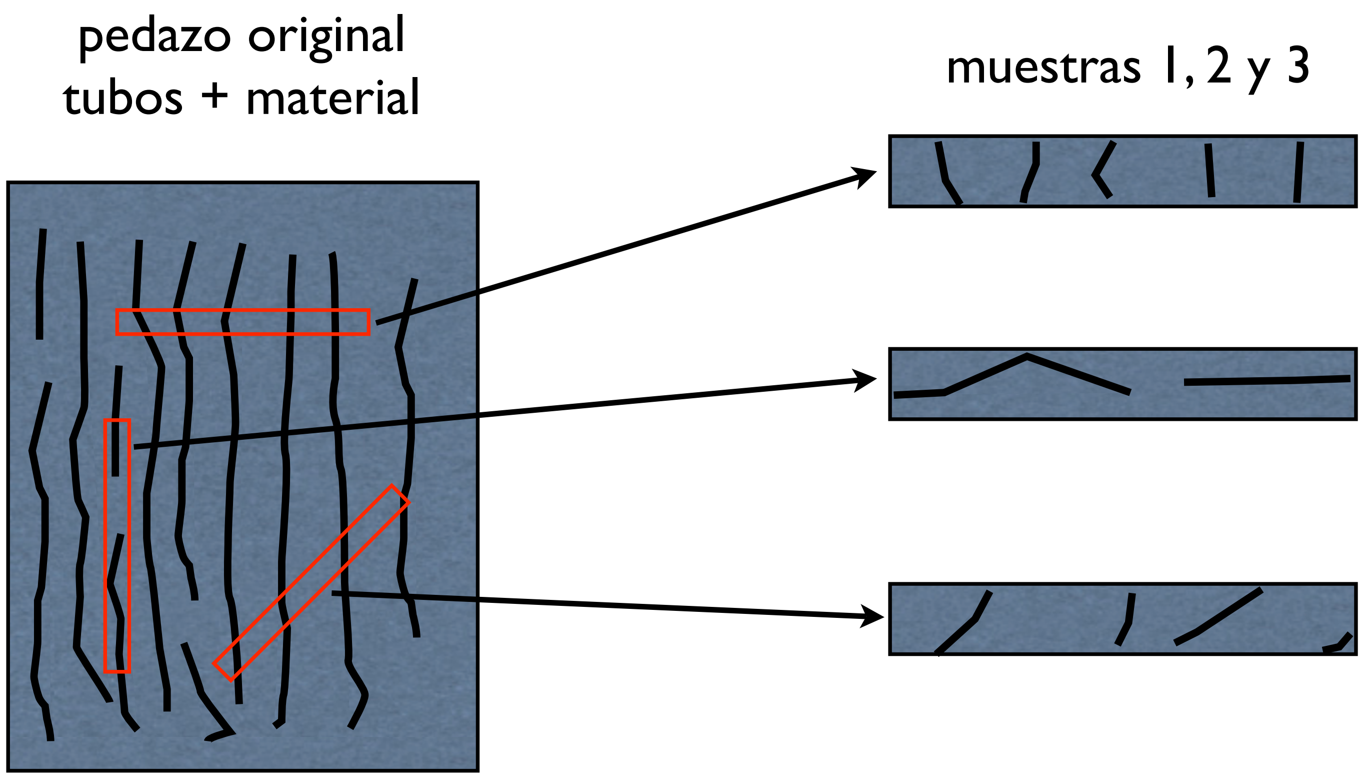
$$F = K_3 \cdot d_3$$

El material es isótropo si la constante K es independiente de la orientacion de la muestra respecto al pedazo original

$$K_1 = K_2 = K_3 \qquad\qquad (d_1 = d_2 = d_3)$$

Elasticidad lineal

- Algo que no es isótropo... tubos de un material embutidos un otro



$$F = K_1 \cdot d_1$$

$$F = K_2 \cdot d_2$$

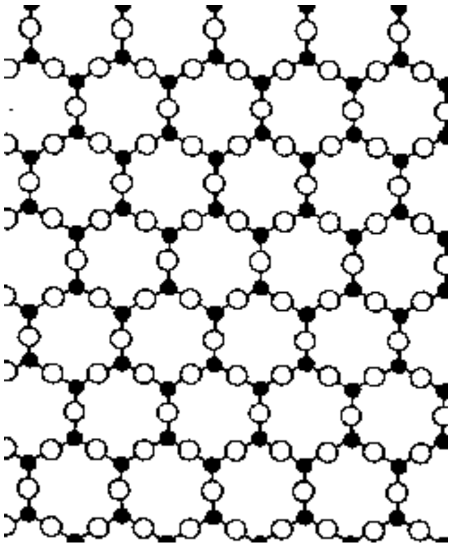
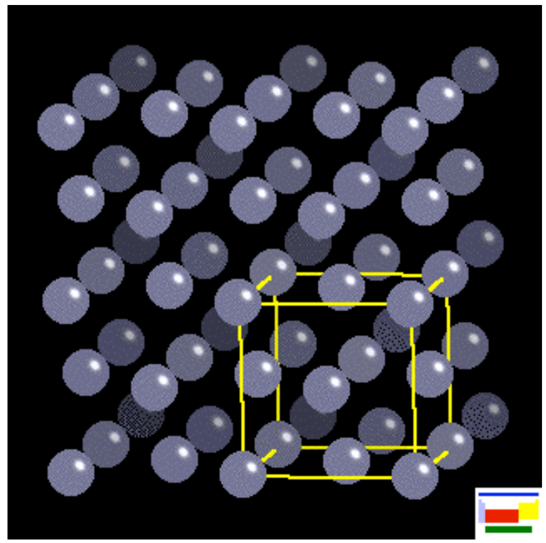
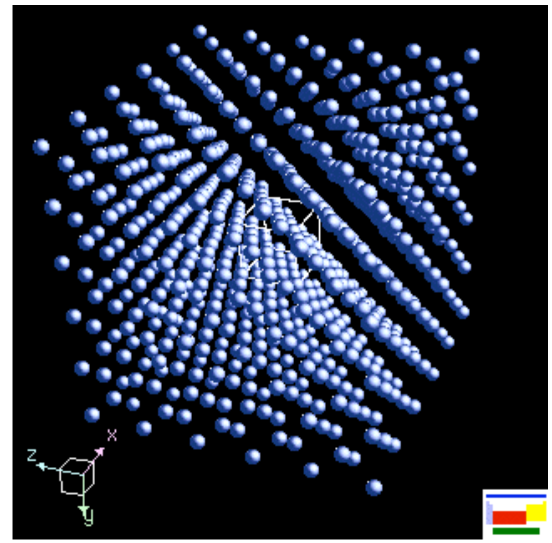
$$F = K_3 \cdot d_3$$

En este caso el material no es isótropo

$$K_1 \neq K_2 \neq K_3 \qquad\qquad (d_1 \neq d_2 \neq d_3)$$

Elasticidad lineal

- Un sólido esta compuesto por átomos o moléculas en una red periódica (ordenada): estructura cristalina

Tamaño atómico $\sim 1 - 5\,\text{Å} = 0.1 - 0.5\,\text{nm} = 0.1 - 0.5\ \times 10^{-9}\,\text{m}$

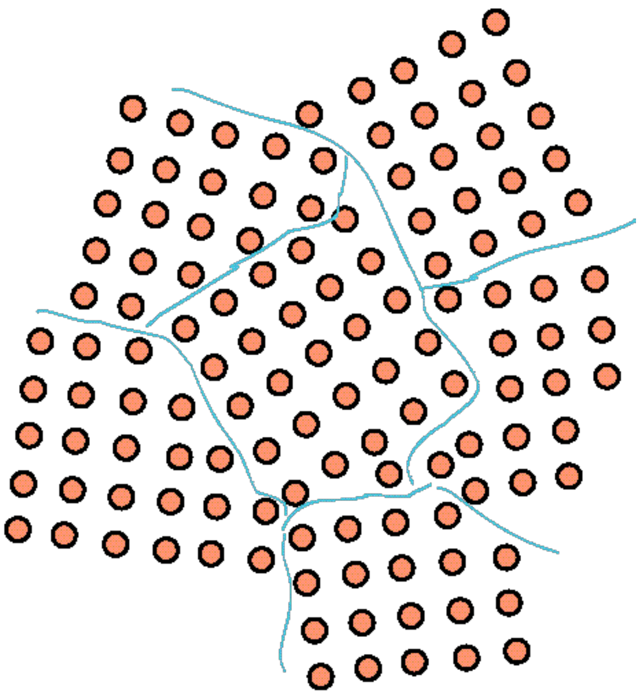
Ejemplos:

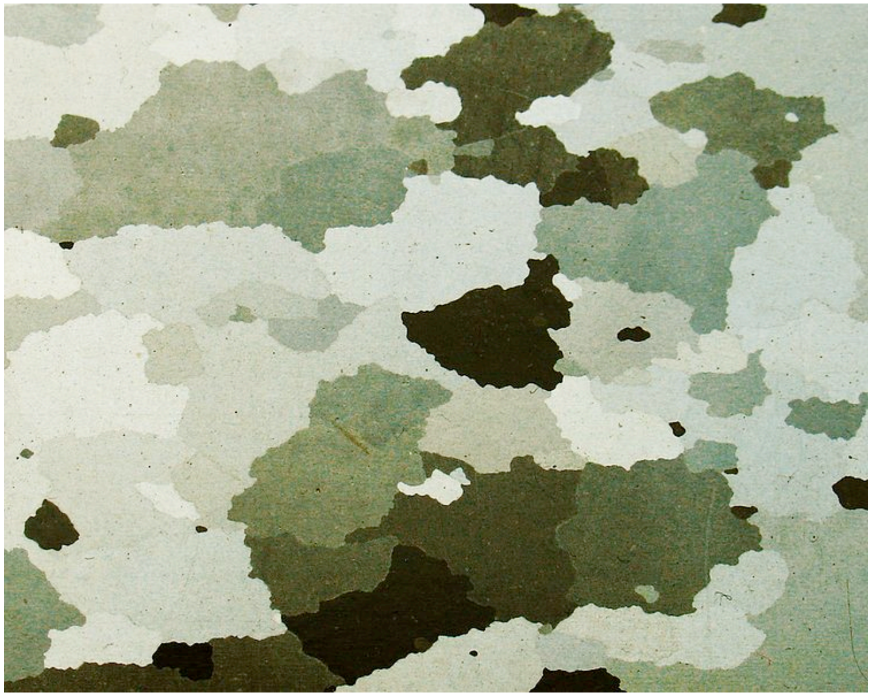
Atom	Radius
Hydrogen	0.12nm
Oxygen	0.14nm
Nitrogen	0.15nm
Carbon	0.16nm
Sulphur	0.185nm
Phosphorus	0.19nm

Distancia entre átomos
$\approx$ Tamaño atómico

Elasticidad lineal

- Muchos materiales se presentan en forma policristalina: compuesto por muchos pequeños cristales (granos), unos al lado de otros con orientaciones diferentes en forma aleatoria.

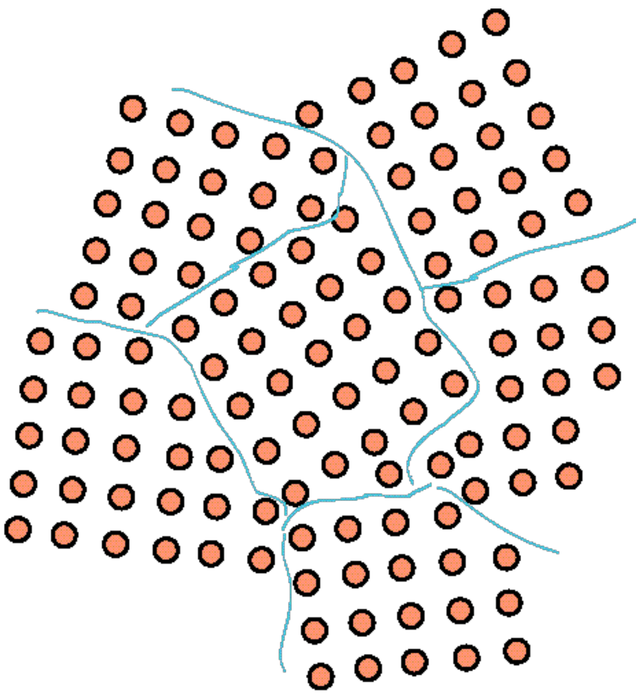


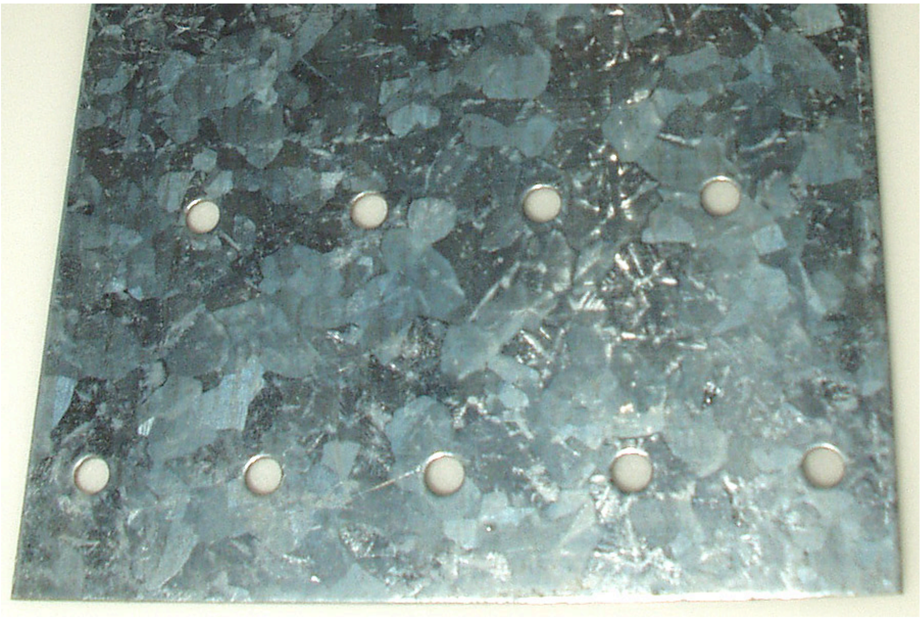


Tamaño de un grano $\sim 1\,\mu\mathrm{m} - 1\,\mathrm{mm}$

Elasticidad lineal

- Muchos materiales se presentan en forma policristalina: compuesto por muchos pequeños cristales (granos), unos al lado de otros con orientaciones diferentes en forma aleatoria.

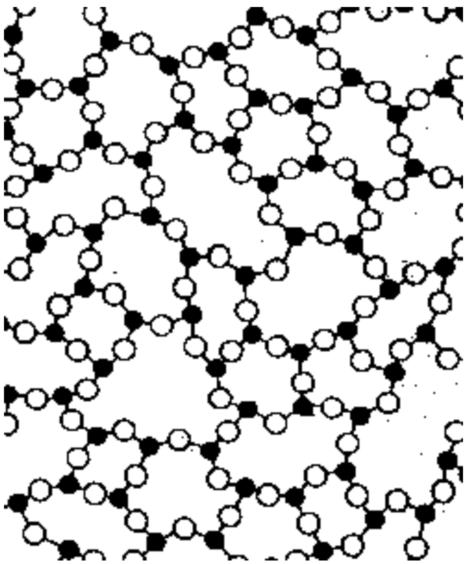


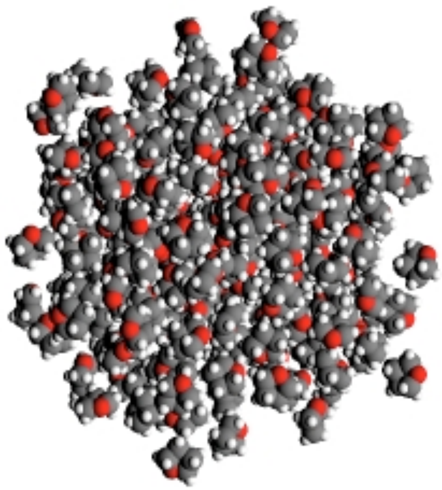


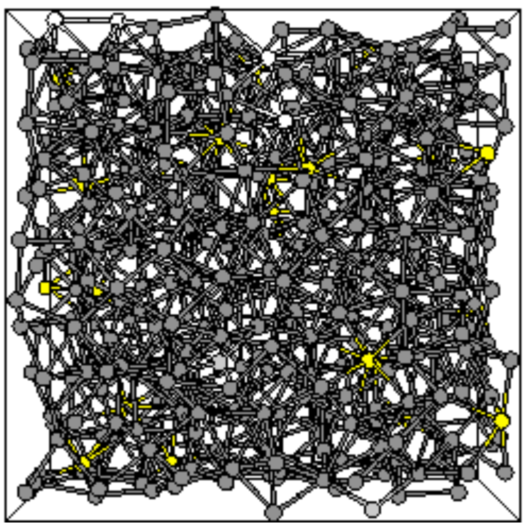
superficie galvanizada con
cristalitos de zinc de ≈ 5 mm

Elasticidad lineal

- Otros materiales "solidos" son amorfos: no presentan estructura local ordenada pero son "duros" (ejemplo: vidrio)







Prácticamente no hay diferencia en la estructura de un vidrio y un líquido...(¿¿¿???)

Elasticidad lineal

- Tanto los materiales amorfos como policristalinos se pueden considerar como sólidos homogéneos e isótropos.

  Sus propiedades mecánicas (rigidez) son iguales en todas partes y no dependen de la orientación de un tipo de deformación en particular

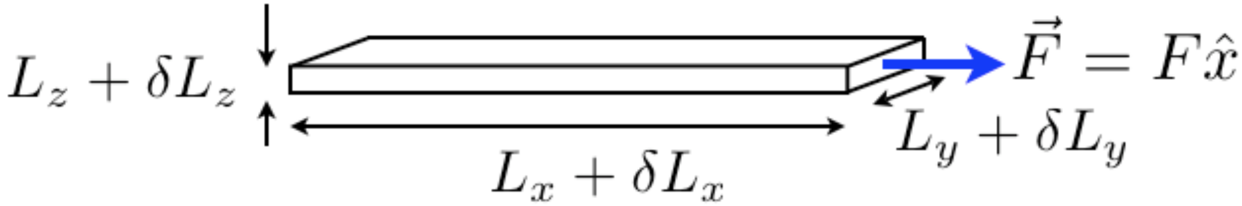
- Las deformaciones son a escalas de longitud muy largas comparadas con el tamaño de los granos cristalinos

- Se caracteriza a estos materiales por dos propiedades mecánicas:

➡ Módulo de Young: E

➡ Coeficiente de Poisson: ν

Elongación homogénea de una barra



$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L_x}{L_x} &= \frac{1}{E}\frac{F}{A}, \\
\frac{\delta L_y}{L_y} &= -\nu\frac{\delta L_x}{L_x}, \\
\frac{\delta L_z}{L_z} &= -\nu\frac{\delta L_x}{L_x}.
\end{aligned}
$$

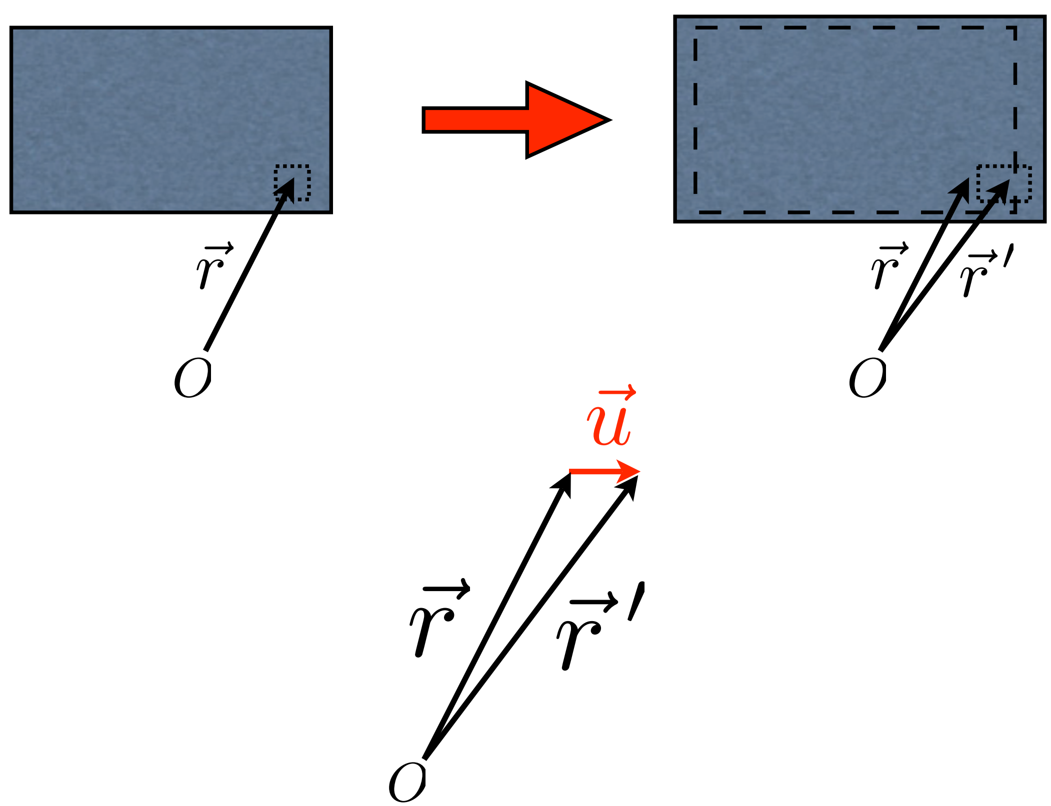
Equivalente a Ley de Hooke

Propagación de ondas y vibraciones

Se define el vector de deformación

$$\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r}$$

$$\vec{u} = u_x(\vec{r})\hat{x} + u_y(\vec{r})\hat{y} + u_z(\vec{r})\hat{z}$$

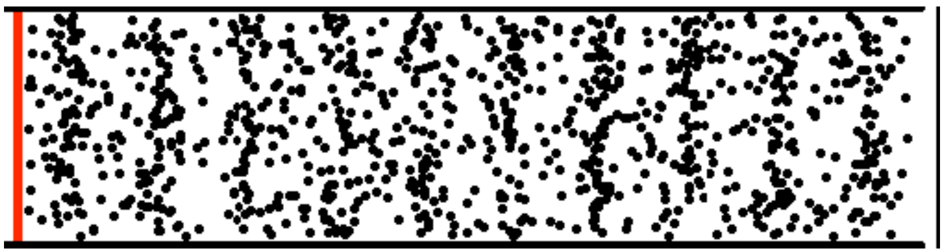


Propagación de ondas y vibraciones

Modos de propagación longitudinal y transverso

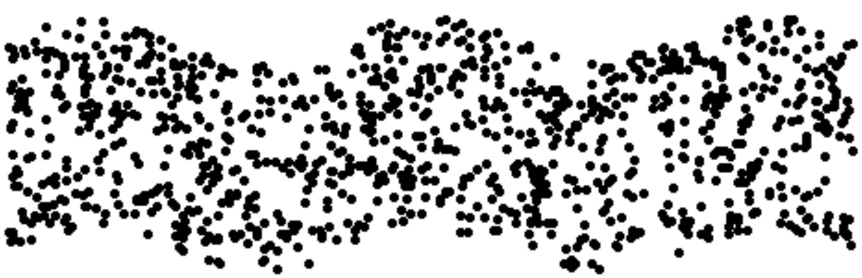
$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$$

Longitudinal: deformación es paralelo a la dirección de propagación de la onda



$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_l = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l \neq 0$$

Transverso: deformación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_t \neq 0$$

Propagación de ondas y vibraciones

Modos de propagación longitudinal y transversal

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$$

Longitudinal: deformación es paralelo a la dirección de propagación de la onda
Transversal: deformación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda

Ecuaciones de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \nabla^2 \vec{u}_l = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \vec{u}_t = 0}$$

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \qquad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$$

Estas ecuaciones admiten soluciones armónicas y por lo tanto según las condiciones de borde se puede tener ondas estacionarias

Repaso: Ecuación de onda en 1 dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Solución general

$$u(x,t) = f(x - c \cdot t) + g(x + c \cdot t)$$

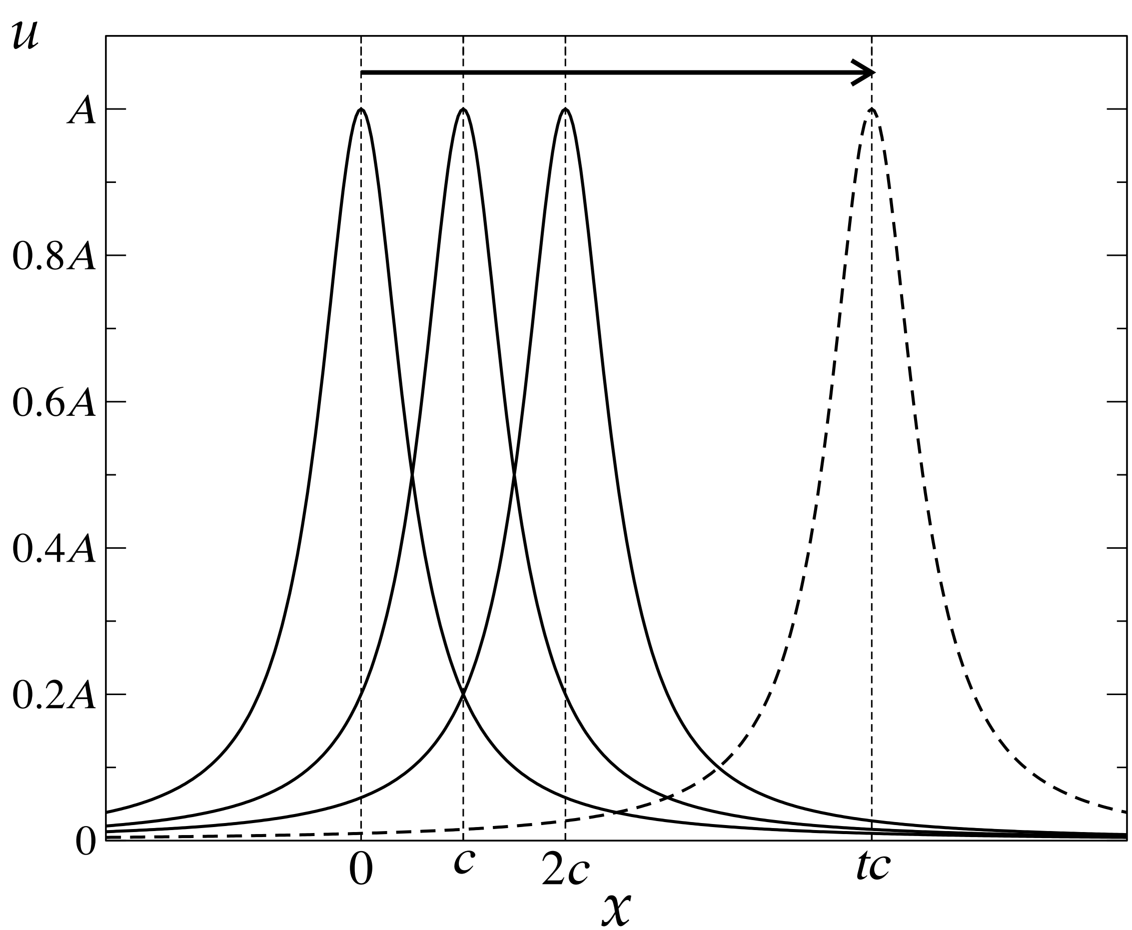
Viaja a la "derecha" (hacia x>0) — Viaja a la "izquierda" (hacia x<0)

Los pulsos se mueven sin deformación y con velocidad constante "c"

Cuando los pulsos se superponen, la solución es la simple suma....
no se modifican los pulsos!

Consideremos la solución de D'Alembert

$$u(x,t) = f(x - c \cdot t) = \frac{A}{((x - c \cdot t)/x_o)^2 + 1}$$



Que pasa si sumamos dos ondas armónicas?

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx)$$

usando

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Entonces

0

$$\begin{aligned} y(x,t) = {} & A\sin(\omega t)\cos(kx) \cancel{- A\sin(kx)\cos(\omega t)} \\ & + A\sin(\omega t)\cos(kx) \cancel{+ A\sin(kx)\cos(\omega t)} \end{aligned}$$

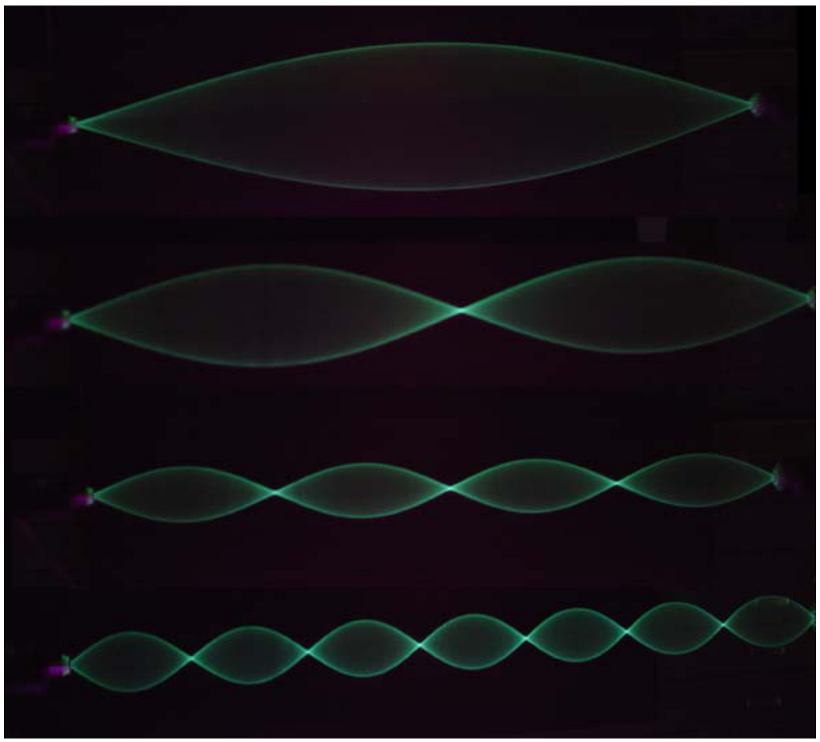
$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin(\omega t)\cos(kx)}$$

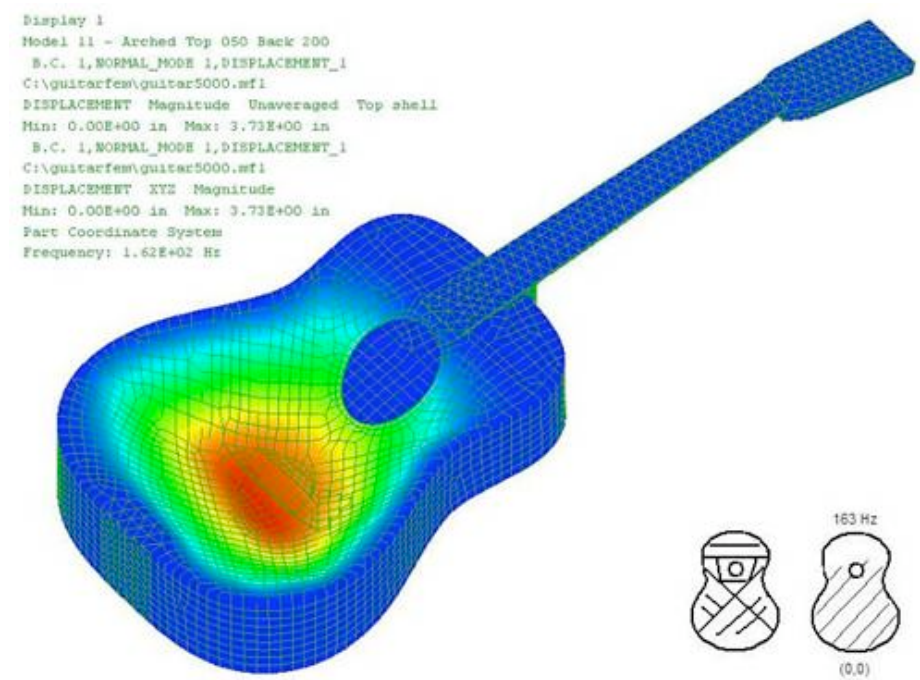
Esta onda no se mueve ni a la izquierda ni a la derecha!

Onda Estacionaria

Propagación de ondas y vibraciones

Modos de vibración en una cuerda y acoplamiento con una cavidad (guitarra)





http://www.falstad.com/loadedstring/

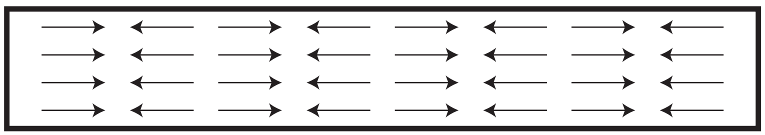
Propagación de ondas y vibraciones

Modos de vibración en un sólido 3D

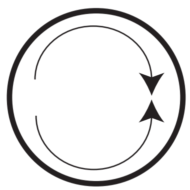
Propagación de ondas y vibraciones

Hay varios modos de vibración en una barra delgada

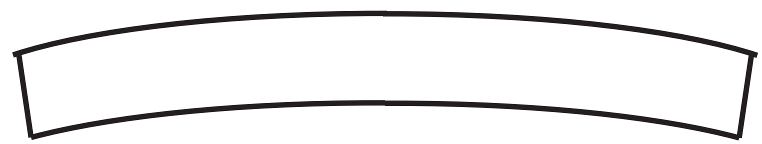
(A) Longitudinal



(B) Torsión



(C) Flexión



Condiciones de borde

- libres
- fijas
- empotradas (modos de flexión)

http://www.falstad.com/barwaves/j2/

Propagación de ondas y vibraciones

Modo de vibración longitudinal

$$L_x \gg L_y, L_z$$

$$\vec{u} = u_x(\vec{r})\hat{x} + \cancelto{0}{u_y(\vec{r})}\hat{y} + \cancelto{0}{u_z(\vec{r})}\hat{z}$$

Se puede demostrar

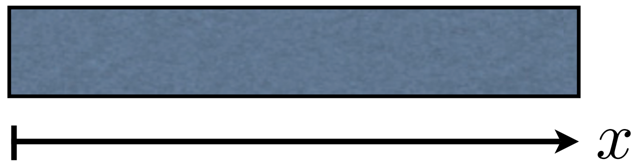
$$\boxed{\begin{gathered} \vec{u}(\vec{r}) = u_x(x)\hat{x} \\[2em] \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \end{gathered}}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$c \neq c_l \neq c_t \;\; !!!$$

Propagación de ondas y vibraciones

Modo de vibración longitudinal



$$L_x \gg L_y, L_z$$

$$u_x(x,t) = A\sin(\omega t)\cos(kx)$$

Condición de borde: $$\left.\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|_{x=0,L} = 0$$

$$\sin(kx)|_{x=0} = 0$$ por definición...

$$\sin(kx)|_{x=L} = 0$$

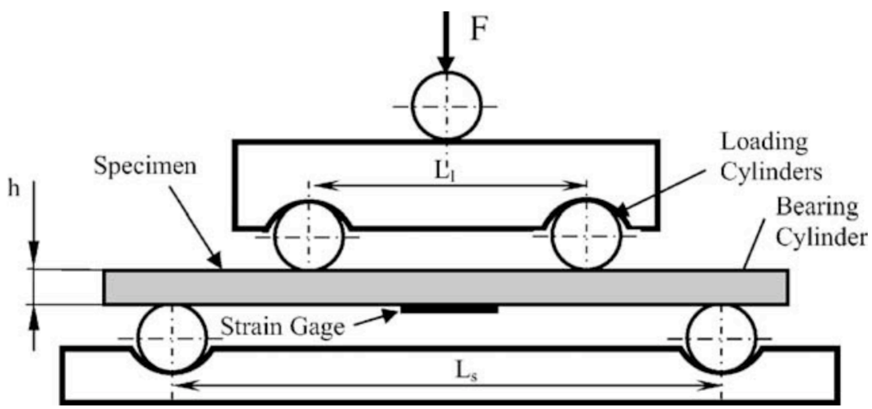
$$\boxed{\rightarrow k_n L = (\omega_n/c)L = \pi n}$$

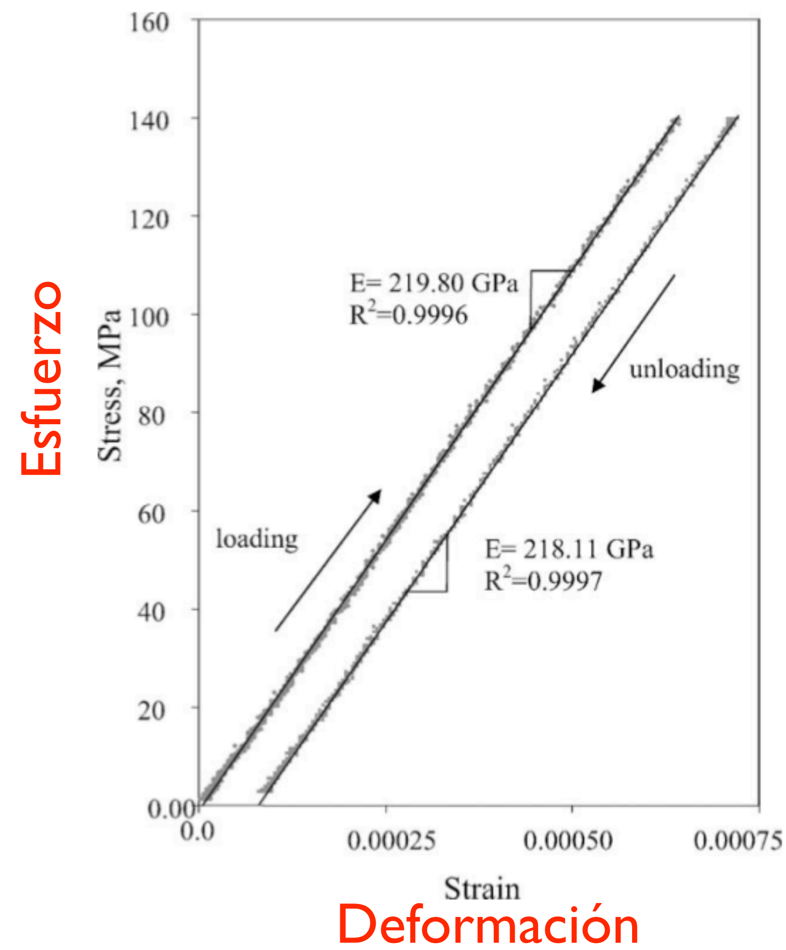
$$\boxed{\rightarrow f_n = c \cdot n/(2L)}$$

Técnicas de caracterización de materiales

Técnicas estáticas

Método de 4 puntas: se aplica una fuerza F y se mide una deformación



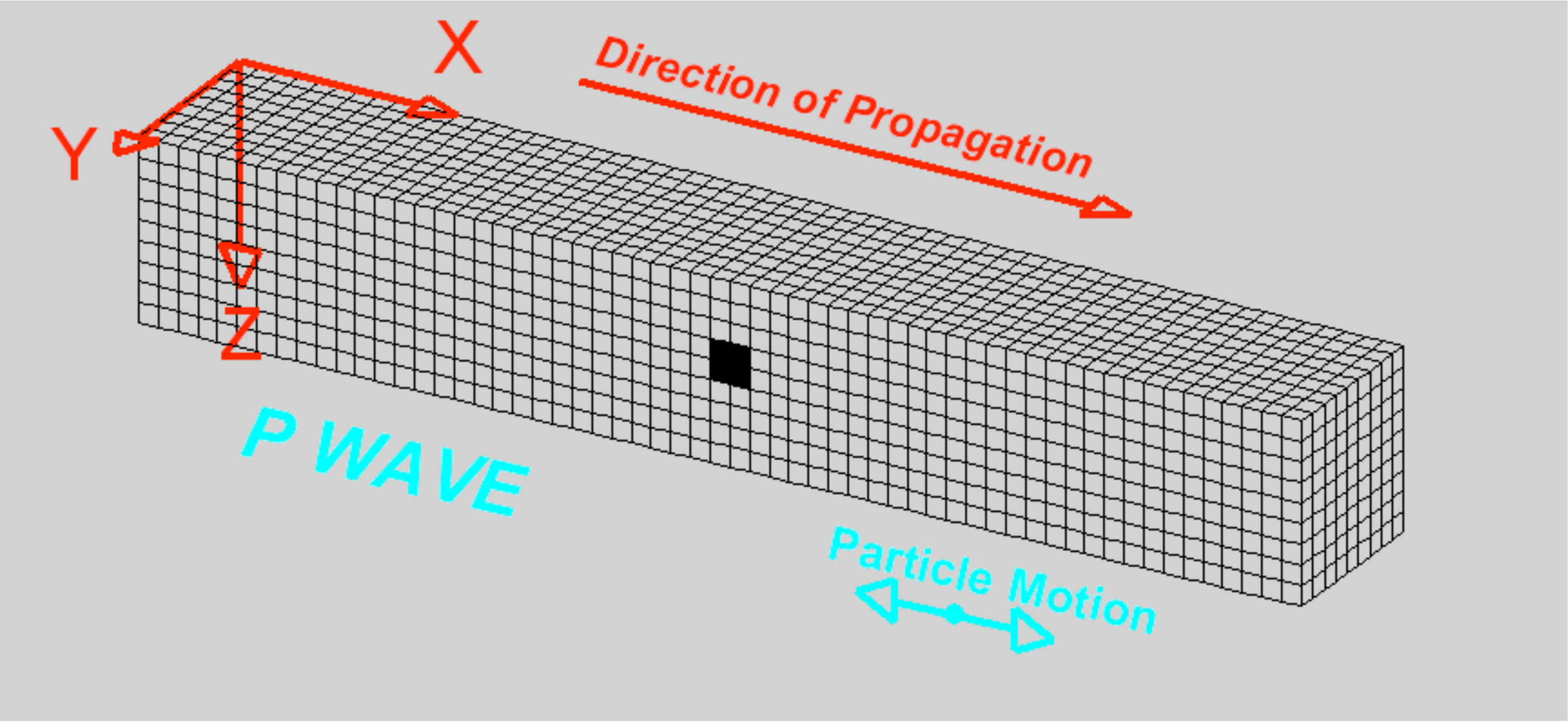


Técnicas de caracterización de materiales

Técnicas Dinámicas: medición de velocidad de un pulso

Velocidad de onda longitudinal

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

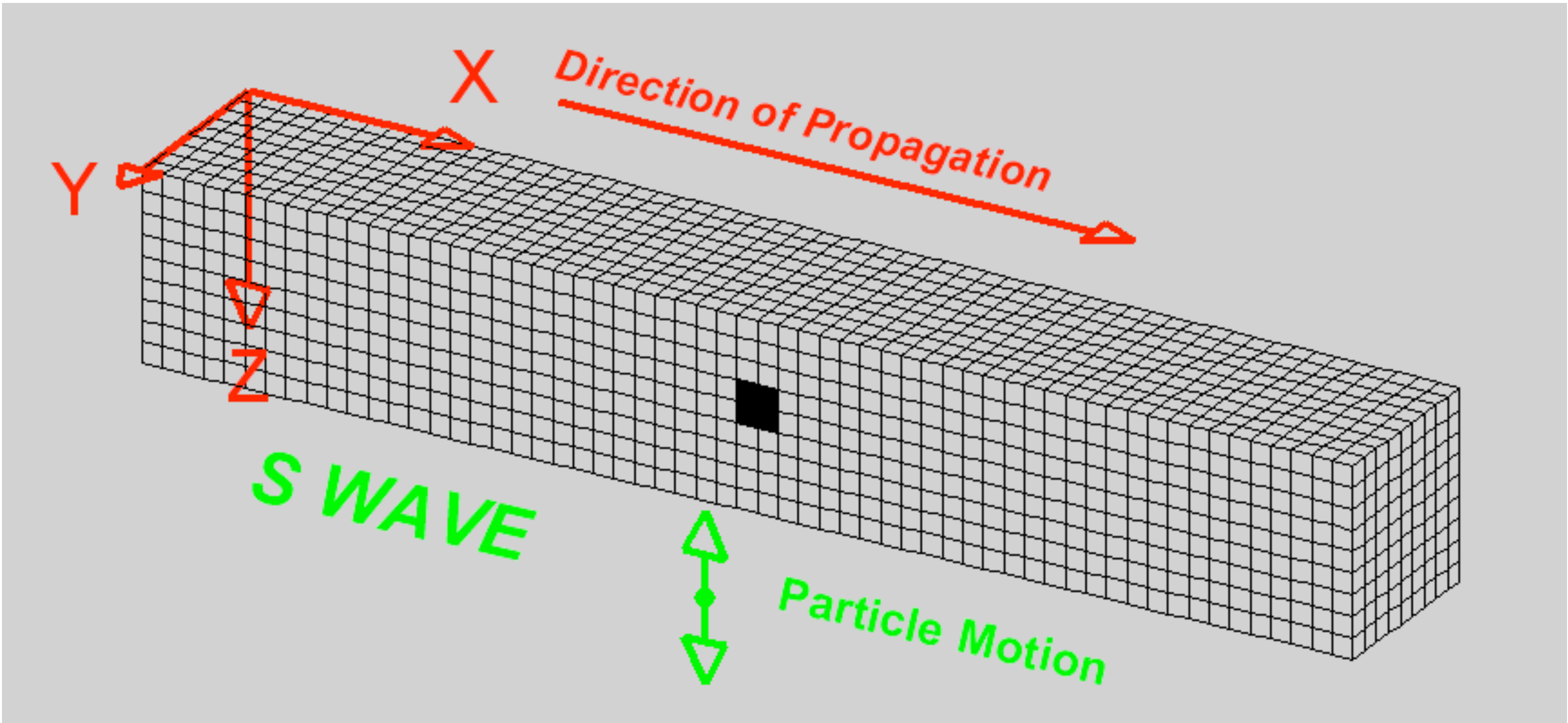


Técnicas de caracterización de materiales

Técnicas Dinámicas: medición de velocidad de un pulso

Velocidad de onda de cizalle

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$$



Técnicas de caracterización de materiales

Técnicas Dinámicas: medición de velocidad de un pulso

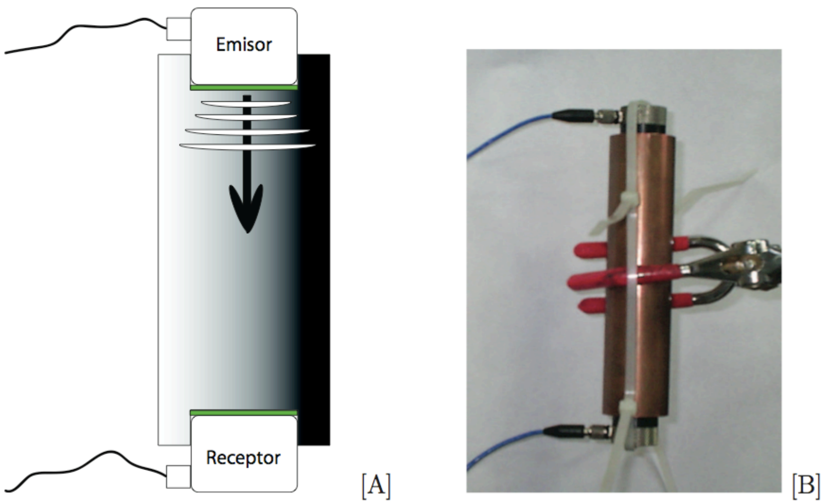
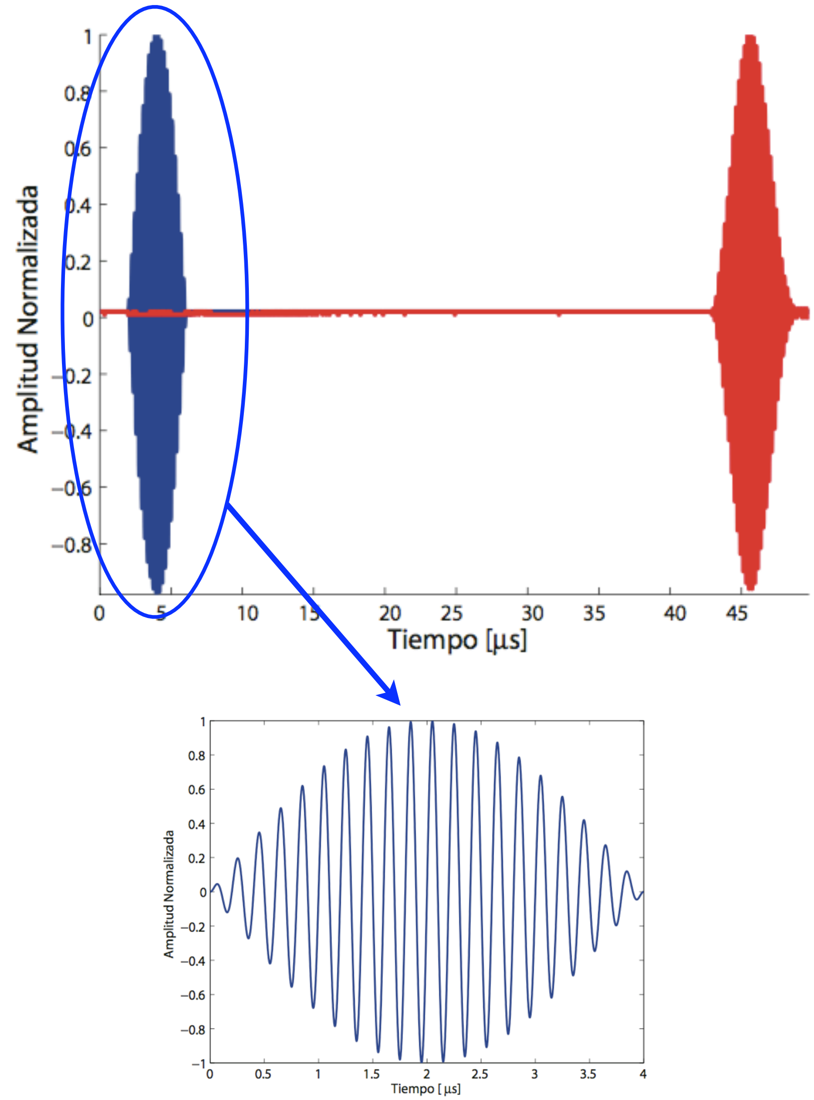


Figura 2.1: [A] Esquema de montaje de Pulsos. La onda acústica se propagada desde el emisor hacia el receptor. [B] Foto del montaje de Pulsos.



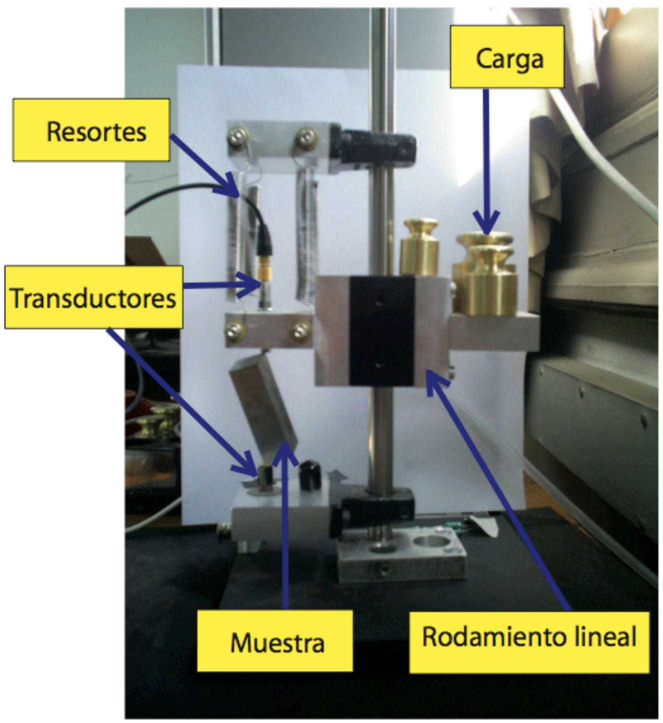
Resultados:

	Cobre	Acero 1020
C_l $[m/s]$	4700±60	5782±20
C_t $[m/s]$	2186±10	3207±20
C_{11} $[*10^{11} Pa]$	1.981±0.05	2.641±0.05
C_{44} $[*10^{11} Pa]$	0.428±0.01	0.812±0.01

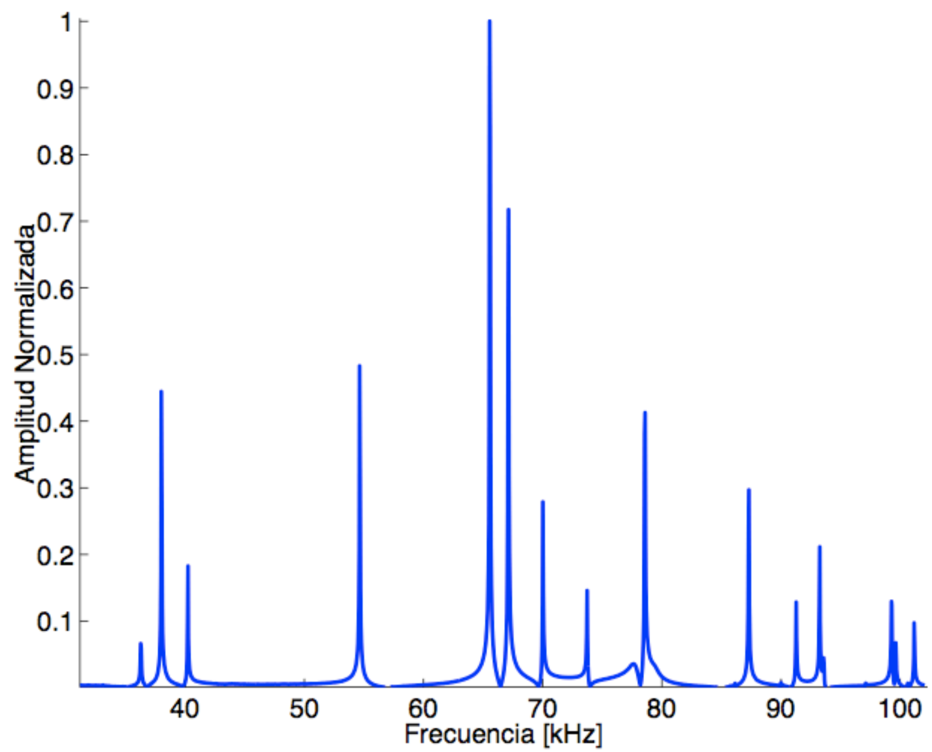
Técnicas de caracterización de materiales

Técnicas Dinámicas: Espectroscopía de resonancia ultrasónica

Montaje RUS



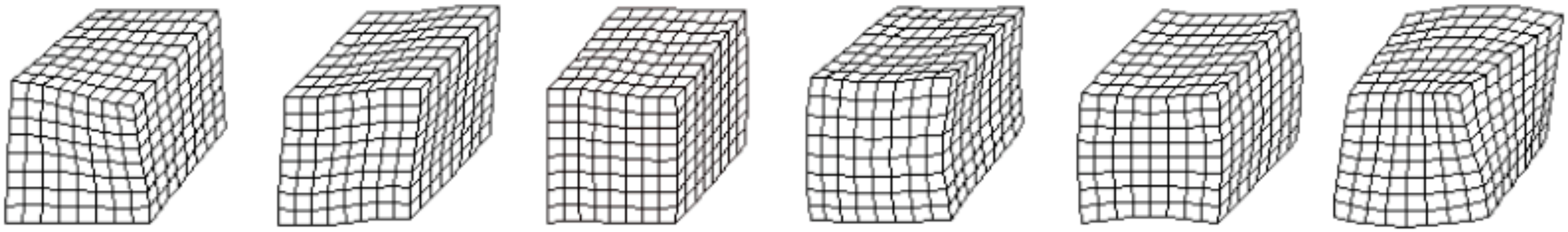
Espectro de resonancias



A partir del valor de un conjunto de frecuencias de resonancia, se determinan las constantes elásticas del material.

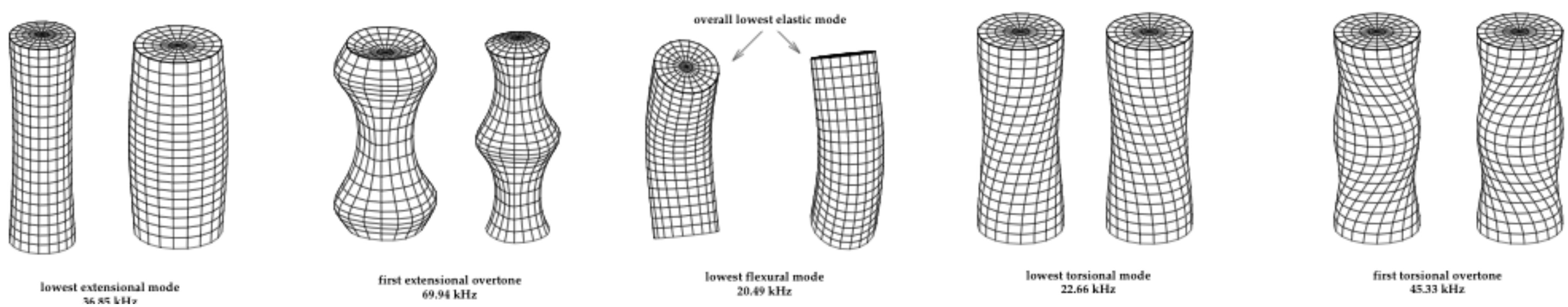
Ejemplos

Paralepepípedo



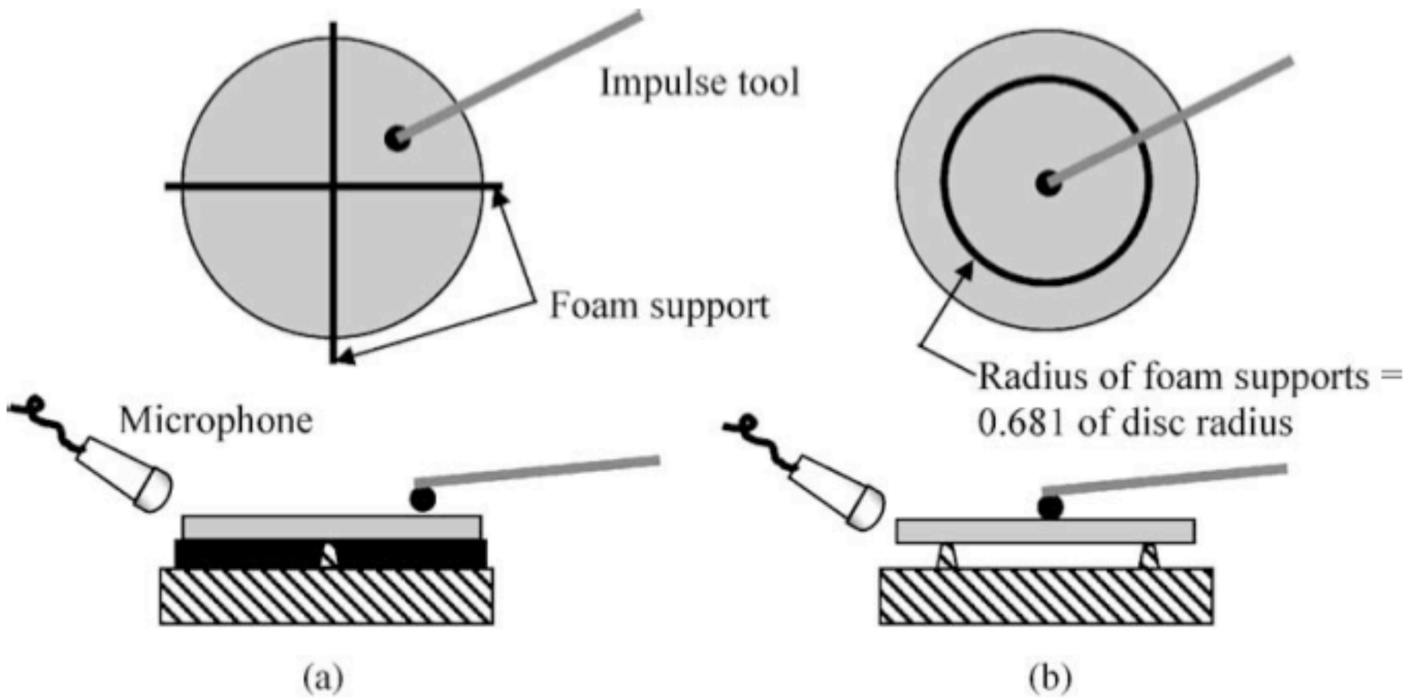
7 11 12 15 16 18

Cilindro



Modos extensionales Modo Flexión Modos Torsión

Método de resonancias por impulsión



Se identifica un modo de resonancia y se deduce E si se conoce la geometría y la densidad del material

Método de resonancias por impulsión
Guías 6 y 7: medidas de E y ν en una barra de Al

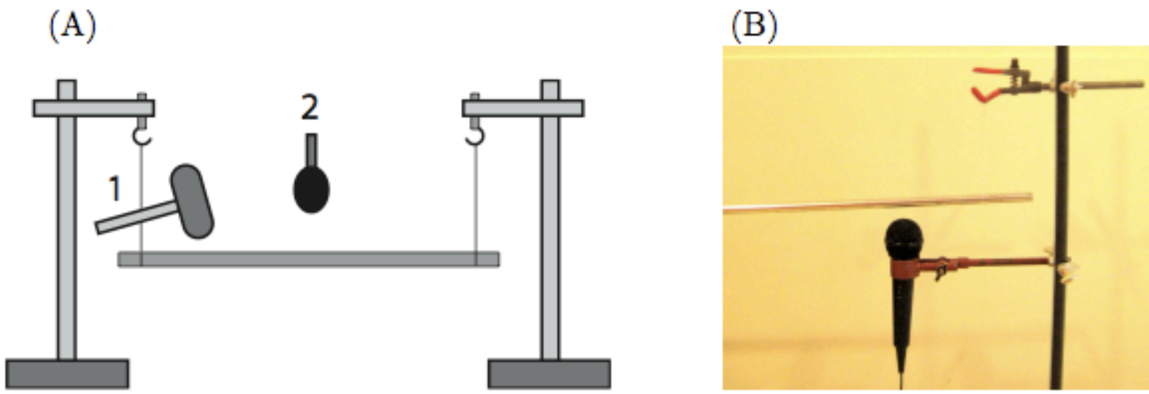


Figura 1: (A) Técnica de impulsión: Esquema del montaje experimental. Una barra metálica se suspende con dos hilos a dos soportes universales. Se debe dar un golpe a la barra con el martillo (1) y medir las emisiones acústicas resultantes con un micrófono (2). (B) Posición del micrófono usando una de las pinzas sujetas a una de los soportes universales. El hilo del cual cuelga la barra no se ve debido al fondo blanco.

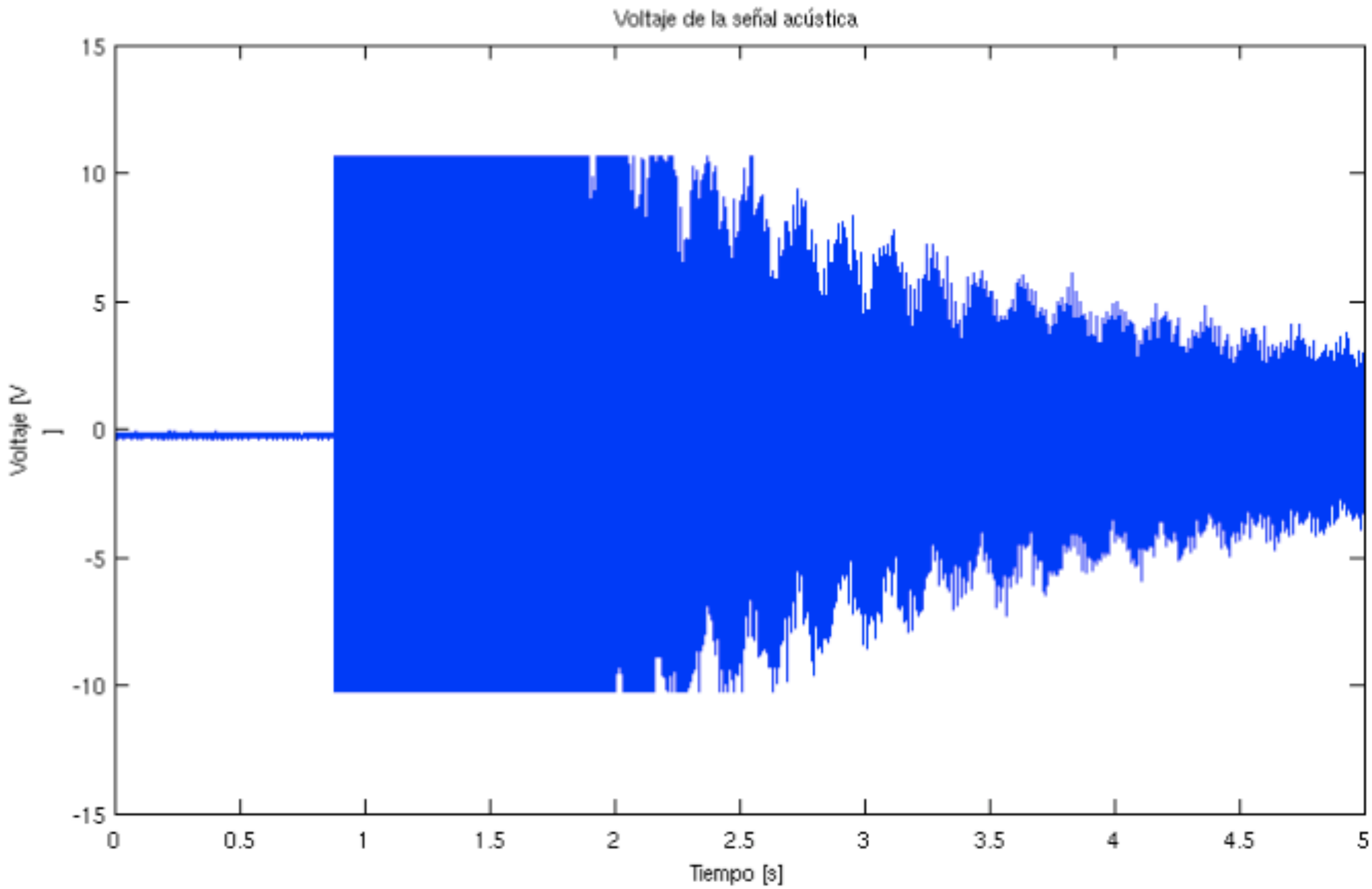
Longitudinal: $$f_n^L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{n}{2L},$$

Torsión: $$f_n^T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}\frac{n}{2L},$$

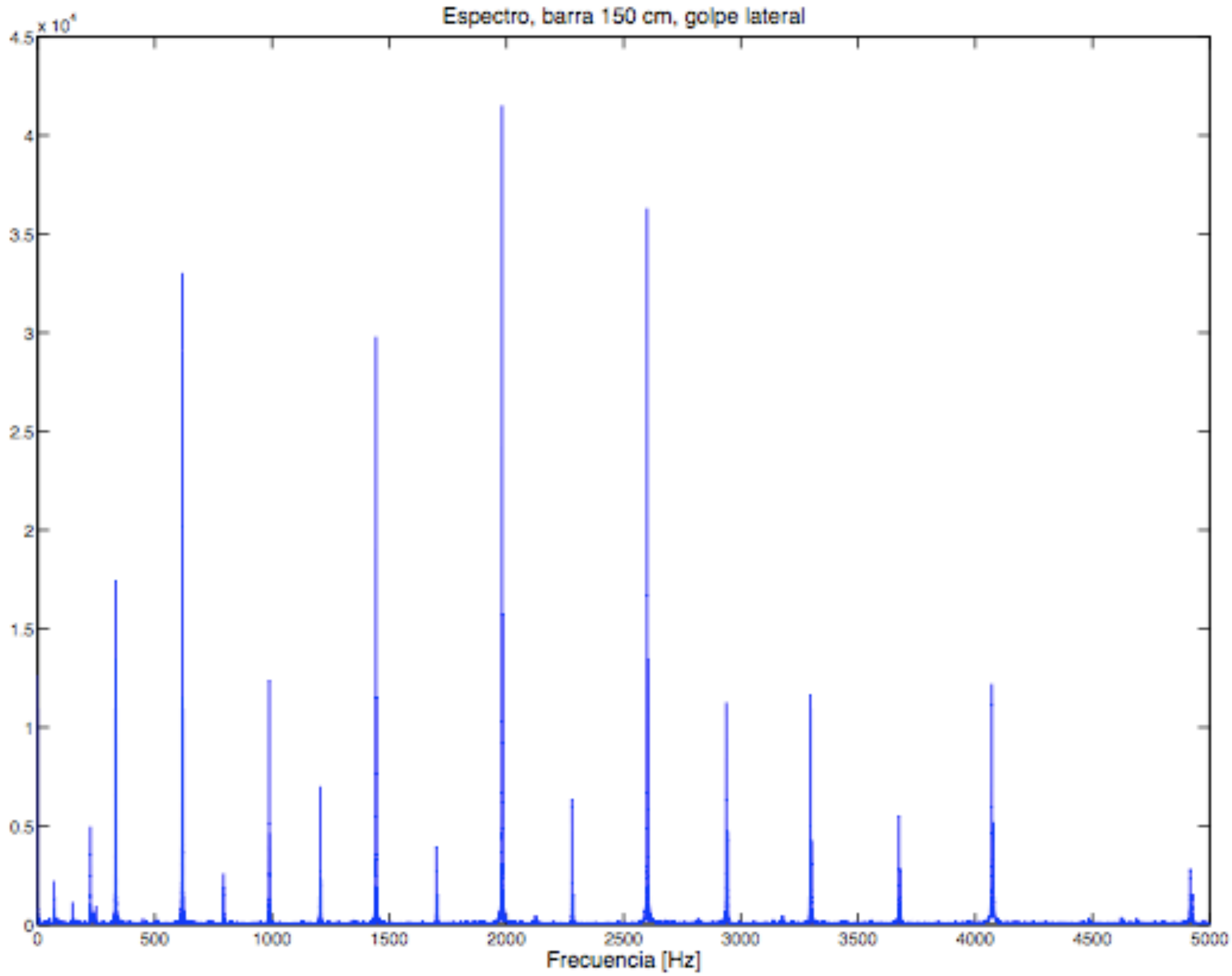
Flexión: $$f_n^B = \frac{\pi R}{16L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot(2n+1)^2,$$

¿Se pueden determinar E y ν con un espectro de frecuencias?

Método de resonancias por impulsión
Guías 6 y 7: medidas de E y ν en una barra de Al



Método de resonancias por impulsión
Guías 6 y 7: medidas de E y ν en una barra de Al



Se usa una adivinanza razonable para E y ν: se infiere cuál modo es longitudinal, de torsión o de flexión y con cuál n