

# Métodos Experimentales FI2003 Sección 5-6

## Pauta de ejercicio 1

Profesores: Nicolás Mujica, Maite Cerda

3 de Septiembre, 2008

### Solución Problema 1

a) (1 pt) Guiándose por el siguiente gráfico:

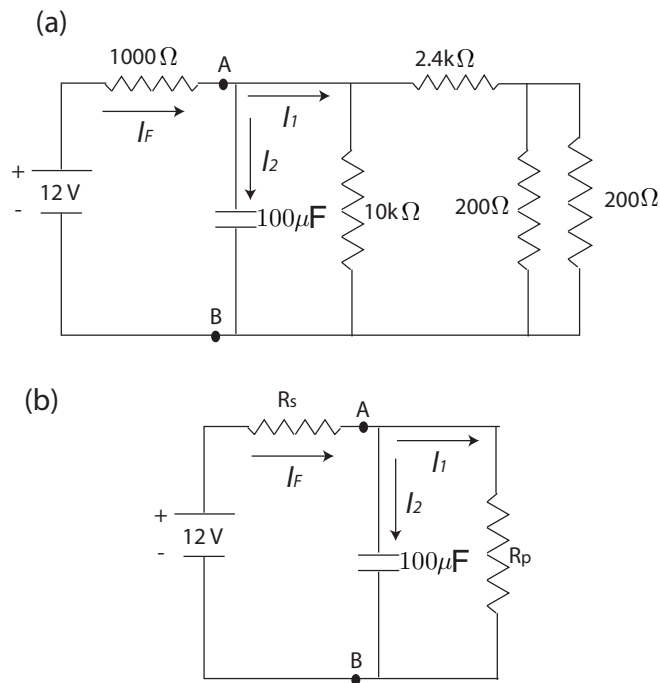


Figure 1: Circuito total y simplificado

Obteniendo la resistencia equivalente de las primeras dos en paralelo (de derecha a izquierda en figura 1 (a)), resulta:

$$\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{200\Omega} + \frac{1}{200\Omega}$$

$$R'_{eq} = 100\Omega$$

Con el resultado anterior, sumamos la siguiente resistencia en serie,

$$R''_{eq} = 2.4k\Omega + 100\Omega = 2.5k\Omega$$

Así, obtenemos ahora la resistencia equivalente pedida.

$$\frac{1}{R_{eq\ final}} = \frac{1}{1k\Omega} + \frac{1}{2.5k\Omega}$$

$$R_p = 2k\Omega$$

Y, la resistencia en serie,

$$R_s = 1k\Omega$$

b) **(1 pt)** Para encontrar la EDO, debemos resolver el siguiente sistema de 7 ecuaciones:

$$V_{R_s} = R_s \cdot I_F \quad (1)$$

$$V_{R_p} = R_p \cdot I_1 \quad (2)$$

$$V_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

$$V_C = V_{R_p} \quad (4)$$

$$I_f = I_1 + I_2 \quad (5)$$

$$\frac{dQ}{dt} = I_2 \quad (6)$$

$$V_F = V_{R_s} + V_C \quad (7)$$

donde  $V_F$  es el voltaje de la fuente que es conocido. Tenemos entonces 7 incógnitas ( $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_F$ ,  $Q$ ,  $V_{R_s}$ ,  $V_{R_p}$  y  $V_C$ ). Sumando (1) y (2), y usando (7) queda,

$$V_F = R_s \cdot I_F + R_p \cdot I_1$$

Usando (4) con (2) y (3),

$$\begin{aligned} R_p \cdot I_1 &= \frac{Q}{C} \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{Q}{R_p C} \end{aligned}$$

Usando esto m'as (5) y (6) queda,

$$\begin{aligned} V_F &= R_s \left( \frac{Q}{R_p C} + \frac{dQ}{dt} \right) + \frac{R_p Q}{R_p C} \\ \frac{dQ}{dt} + Q \left[ \frac{1}{R_p C} + \frac{1}{R_s C} \right] &= \frac{V_F}{R_s} \end{aligned}$$

**(1 pt)** La solución homogénea de esta ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} Q_h(t) &= A e^{-t/\tau} \\ \Rightarrow \tau^{-1} &= \frac{1}{C \tilde{R}} \quad \text{con} \quad \frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s} \rightarrow \tilde{R} = \frac{R_p R_s}{R_p + R_s} \end{aligned}$$

Ahora, la solución particular ( $\frac{dQ}{dt} = 0$ ) de esta ecuación es:

$$Q_p = \frac{V_F \tilde{R} C}{R_s} = \frac{V_F R_p C}{(R_p + R_s)}$$

Sumando ambas, tenemos la solución completa de la ecuación, teniendo presente que la condición inicial ( $Q(t=0) = 0$ ) es,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{V_F R_p C}{(R_p + R_s)} \\ Q(t) &= \frac{V_F R_p C}{(R_p + R_s)} (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

c) **(1 pt)** A partir de la ecuación anterior, podemos obtener  $I(t)$  ( o  $I_2$  en notación anterior) derivando :

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{V_F R_p C}{(R_p + R_s)} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \\ &= \frac{V_F}{R_s} e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

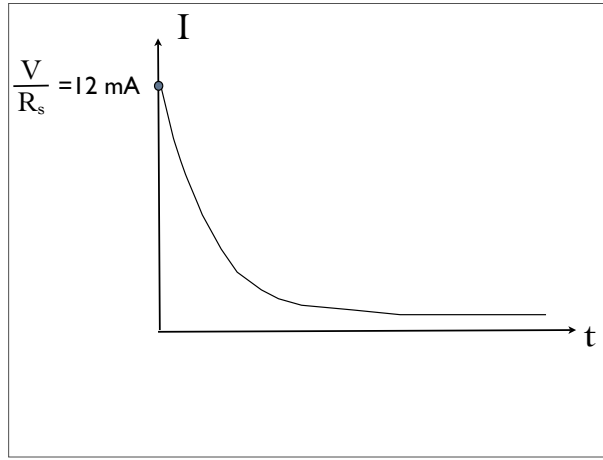


Figure 2: Corriente en función del tiempo

Lo que da el siguiente gráfico:

(1 pt) La corriente que entrega la fuente queda,

$$\begin{aligned}
 I_F &= I_1 + I_2 \\
 I_F &= \frac{Q(t)}{R_p C} + I_2(t) \\
 &= \frac{V_F R_p C}{R_p C (R_p + R_s)} + \left( \frac{V_F}{(R_p + R_s)} + \frac{V_F}{R_s} \right) e^{-t/\tau} \\
 &= \frac{V_F}{(R_p + R_s)} + V_F \left[ \frac{R_p + 2R_s}{R_s (R_p + R_s)} \right] e^{-t/\tau}
 \end{aligned}$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $I_F = \frac{V_F}{(R_p + R_s)}$ , lo que da,  $I_F(t \rightarrow \infty) = 4mA$ .

- d) (1 pt) Para un tiempo dado, se desconecta la fuente del circuito, quedando una carga en el condensador de  $Q = V_F C \frac{R_p}{R_p + R_s}$ .

Como es un circuito cerrado,

$$\begin{aligned}
 V_C(t) &= -V_{R_p}(t) \\
 \frac{Q(t)}{C} &= -R_p \cdot I(t) \\
 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R_p C} Q(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo que la solución es:

$$Q(t) = Ae^{-t/\tilde{\tau}} \quad \text{con} \quad A = V_F C \frac{R_p}{R_p + R_s} \quad \text{y} \quad \tilde{\tau} = R_p C = 0.2 \text{ s}$$

Lo que da una corriente de:

$$I(t) = -\frac{V_F}{R_p + R_s} e^{-t/\tilde{\tau}} \quad \text{y} \quad |I(t=0)| = 4 \text{ [mA]}$$

Imponiendo la condición de la alarma,

$$|I(t=t^*)| = 1 \text{ [mA]} \quad \Rightarrow \quad e^{-t^*/\tilde{\tau}} = \frac{1}{4}$$

y aplicando logaritmo,

$$\begin{aligned} -t^* &= -1.39 \cdot \tilde{\tau} \\ \Rightarrow t^* &\approx 0.278 \text{ s} \end{aligned}$$