FI2002-5 2009-2

Control 2

P1. Considere dos casquetes cilíndricos coaxiales de alta conductividad, longitud $L \gg b$ y radios a y b respectivamente ($a<b$). El espacio entre ambos conductores está lleno con un material de permitividad eléctrica ϵ y de conductividad g . Entre sus extremos se conecta una fuente de fuerza electromotriz V_0 .
En estado estacionario, se pide calcular:

a) El campo eléctrico en todo el espacio (dentro y fuera del cable).
b) La energía electrostática del cable, por unidad de largo.
c) La corriente eléctrica a través del material dieléctrico (corriente de fuga), por unidad de largo.
d) La resistencia eléctrica de fuga del cable, por unidad de largo.

Solución.

a) Como los casquetes son muy largos, podemos despreciar los efectos de borde, la alta conductividad implica que la corriente de fuga y la densidad superficial de carga serán uniformes.
Supongamos que en el casquete interior hay una cantidad de carga λ por unidad de longitud . De acuerdo a esto, el campo eléctrico será:

$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}\hat{r}$, $a<r<b$ y será cero en cualquier otro caso.

Integrando este campo entre a y b , obtenemos la diferencia de potencial:

$-V_0=-\int_a^b \frac{\lambda\, dr}{2\pi\epsilon r} \Rightarrow V_0=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln(b/a)} \Rightarrow \vec{E}=\frac{V_0}{r\ln(b/a)}\hat{r}$, $a<r<b$ y cero para cualquier otro valor de r .

b) $W=\frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{E}|^2 dv$, en nuestro caso estamos calculando por unidad de largo y considerando las condiciones del problema: $W=\frac{\epsilon}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}|\vec{E}|^2 r\, d\phi\, dr$

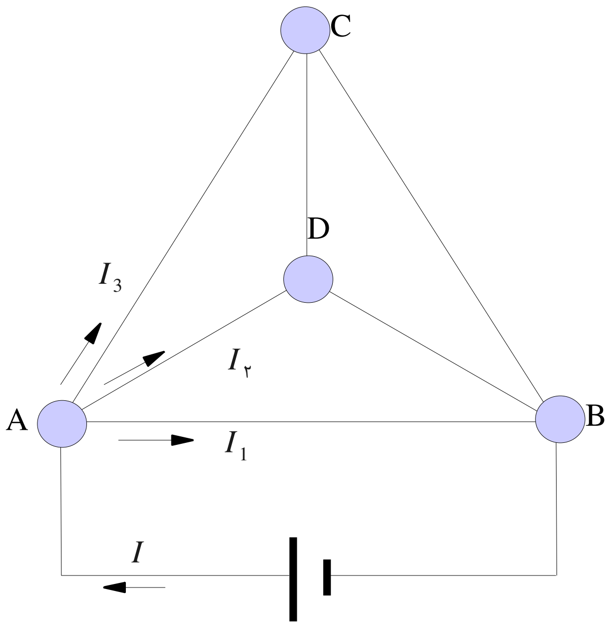
$$W=\frac{\epsilon}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{V_0^2}{r^2(\ln(b/a))^2}r\, d\phi\, dr=\frac{\pi\epsilon V_0^2}{\ln(b/a)}$$

c) $I=\int \vec{J}\cdot d\vec{S}$, $\vec{J}=g\vec{E}$, en nuestro caso y calculando por unidad de largo:

$I=g\int \vec{E}\cdot d\vec{S}=g\frac{\lambda}{\epsilon}=\frac{2\pi g V_0}{\ln(b/a)}$

d) $R=\frac{V}{I}=\frac{\ln(b/a)}{2\pi g}$

P2. Imagine que los vértices de un tetraedro son pequeñas esferas conductoras, conectadas entre sí por resistencias iguales de valor R. Calcule la resistencia equivalente vista desde dos vértices cualquiera.



Solución.

Al pasar por el nodo A, la corriente total se reparte en tres nuevas corrientes. Notemos que el intercambiar el rol del nodo C con el D no cambia el problema, esta simetría nos indica que $I_{٢}=I_{٣}$ y que, por lo tanto, la corriente total que circula entre D y C será nula, lo que significa que no hay diferencia de potencial entre tales nodos y que podemos eliminar esa resistencia del problema.

A partir de lo anterior, consideramos que entre A y B hay tres resistencias en paralelo, de valores R , ٢R y 2R . Luego:

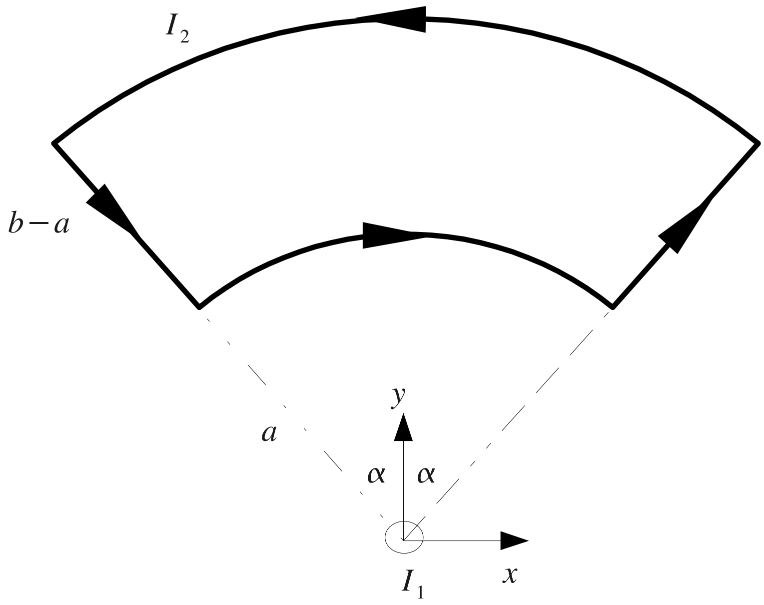
$$\frac{١}{R_{AB}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2\mathrm{R}}+\frac{1}{2\mathrm{R}}=\frac{2}{R}\Rightarrow R_{AB}=\frac{R}{2}$$

P3. Un alambre recto infinito perpendicular a la figura lleva corriente $I_{١}$ (que sale del plano de la figura). Se tiene un segundo circuito $ABCD$ contenido en el plano de la figura, formado por dos arcos de circunferencia de radios a y b, con centro en el alambre y cerrado por segmentos de radio que forman entre sí un ángulo ٢α (ver figura). Por el segundo circuito circula una corriente I_2 en el sentido que se indica enla figura.

a) Calcule la fuerza en cada una de las cuatro ramas del circuito 2 debio a la corriente I_1 .

b) En base al resultado anterior, explique en forma breve por qué podría existir un torque total no nulo actuando sobre el circuito 2 . ¿Qué dirección tendría?

c) Calcule explícitamente el torque que actúa sobre el circuito 2 y exprese su resultado en el sistema de coordenadas que se indica en la figura.



Solución.

a) Primero calculemos el campo magnético generado por el cable infinito:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 dz\,\hat{z}\times(r\hat{r}-z\hat{z})}{(r^2+z^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 r dz\hat{\phi}}{(r^2+z^2)^{3/2}}\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0 I_1\hat{\phi}}{۴\pi r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2/r^2)^{3/2}}$$

, si hacemos el cambio de variable $\frac{z}{r}=\tan(\theta)\Rightarrow dz=\frac{r d\theta}{\cos^{۲}(\theta)}$

y usamos que $1+\tan^2(\theta)=\frac{1}{\cos^{۲}(\theta)}$, obtenemos: $\vec{B}=\frac{\mu_0 I_1\hat{\phi}}{۴\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\theta)d\theta=\frac{\mu_0 I_1}{۲\pi r}\hat{\phi}$

La fuerza magnética es $\vec{F}=\int I\,d\vec{l}\times\vec{B}(\vec{r})$. Notemos que como en los arcos de circunferencia la corriente avanza en la misma dirección que tiene el campo magnético, el producto cruz será nulo y habrá fuerza neta nula sobre ellos.
Para el cálculo de la fuerza sobre los segmentos rectos usamos que $\hat{\rho}\times\hat{\phi}=\hat{z}$.
Sobre el segmento de la izquierda: $\vec{F}_1=\int_a^b -I_2 B\,dr\,\hat{z}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2\hat{z}}{2\pi}\int_a^b\frac{dr}{r}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2\hat{z}}{۲\pi}\ln(b/a)$,

por lo que la fuerza sobre el segmento de la derecha será: $\vec{F}_2=\frac{\mu_0 I_1 I_2\hat{z}}{2\pi}\ln(b/a)$

b) Que la fuerza sobre cada elemento de corriente vaya en la dirección de $\hat{z}$, significa que el torque irá en la dirección de $-\hat{\phi}$ para el segmento de la derecha y en la dirección de $\hat{\phi}'$ para el segmento de la izquierda. Como en general estos vectores con distintos enrte sí, el torque neto debería ir en la dirección de $-\hat{y}$, por la simetría entre ambos.

c) $\vec{T}_۱=\int_a^b r\hat{r}\times d\vec{F}=\int_a^b r\hat{r}\times-\frac{\mu_۰ I_۱ I_2\hat{z}}{2\pi}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2\hat{\phi}'}{2\pi}(b-a)$, $\vec{T}_۲=-\frac{\mu_0 I_1 I_2\hat{\phi}}{2\pi}(b-a)$

$$\Rightarrow\vec{T}=-\frac{\mu_۰ I_۱ I_۲\hat{y}}{\pi}(b-a)sen(\alpha)$$