FI2002-5 2009-2

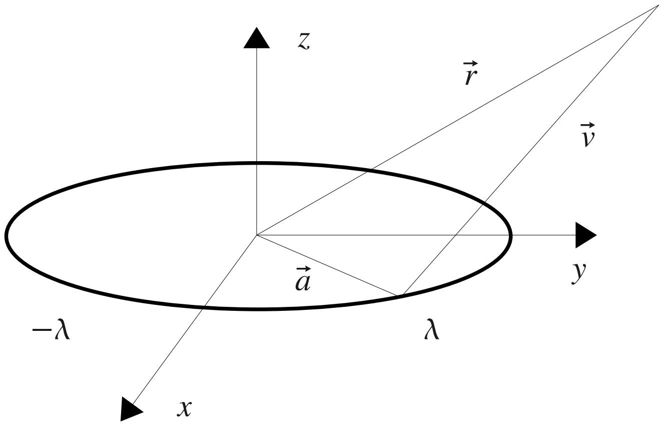
Ejercicio 3

P1. Se tiene un anillo de radio a cargado en una mitad con densidad de carga uniforme λ y la otra mitad con densidad de carga $-\lambda$.

a) Calcule en potencial electrostático en $r \gg a$.

b) Calcule el campo eléctrico para $r \gg a$.

Solución.



a) $\vec{r}=\vec{a}+\vec{v}$, $\vec{v}=\vec{r}-\vec{a}$ $\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{r^2+a^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}}$

$$V=\int_0^{\pi}\frac{\lambda\, a\, d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+a^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}}}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{-\lambda\, a\, d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+a^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}}}=\frac{1}{r}\frac{\backslash}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2}}}\approx\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2}}}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2}\right)$$

$$\vec{a}=a\hat{\rho}=a\cos\phi'\hat{x}+a\,sen\,\phi'\hat{y}\quad,\quad\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}\quad\Rightarrow\quad\vec{r}\cdot\vec{a}=xa\cos\phi'+ya\,sen\,\phi'$$

$$V=\frac{\lambda a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\int_0^{\pi}(x\cos\phi'+y\,sen\,\phi')\,d\phi'-\int_{\pi}^{2\pi}(x\cos\phi'+y\,sen\,\phi')\,d\phi'\right)$$

$$V=\frac{\lambda a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}4\text{y}=\frac{\lambda a^2}{\pi\epsilon_0 r^3}r\,sen\,\theta\,sen\,\phi=\frac{\lambda a^2}{\pi\epsilon_0 r^2}sen\,\theta\,sen\,\phi=\frac{\lambda a^2}{\pi\epsilon_0 r^3}r\,sen\,\theta\,sen\,\phi=\frac{\lambda a^2}{\pi\epsilon_0 r^3}(\vec{r}\cdot\hat{y})$$

Notemos que podemos ahora acomodar algunos términos para lograr la forma del potencial de un dipolo eléctrico.

$$q=\pi\lambda a\Rightarrow V=\frac{qa\,\hat{y}\cdot\vec{r}}{\pi^{2}\epsilon_{٠}\,r^{3}}$$

$$\frac{٢\mathrm{a}}{\pi}=\frac{d}{٢}\Rightarrow\frac{qd\,\hat{y}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_{٠}\,r^{3}}$$

$$qd\,\hat{y}=\vec{p}\Rightarrow V=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_{0}r^{3}}=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{۴\pi\epsilon_{٠}\,r^{2}}$$

Donde q es el valor absoluto de la carga en cada uno de los extremos del dipolo, d es la distancia que separa a las cargas y $\vec{p}$ es el momento dipolar eléctrico del dipolo .
Es decir, hemos probado que el problema anterior se puede considerar como un dipolo eléctrico cuya carga es la carga total en cada medio-anillo y en el que la posición de ambas cargas es la del centro de masas de cada medio-anillo.

b)

$$E_{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{-1}{4\pi\epsilon_{0}}\left[\frac{p_{x}}{r^{3}}+\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}\,(-٣/٢)\,٢}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{5/٢}}\right]=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})x}{r^{5}}-\frac{p_{x}}{r^{3}}\right]$$

$$\vec{E}=E_{x}\hat{x}+E_{y}\hat{y}+E_{z}\hat{z}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^{5}}-\frac{\vec{p}}{r^{3}}\right]$$

En nuestro caso:

$$\vec{p}=4\lambda a^{2}\,\hat{p}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\lambda a^{2}}{\pi\epsilon_{0}}\left[\frac{3(\hat{p}\cdot\vec{r})}{r^{5}}-\frac{\hat{p}}{r^{3}}\right]$$

Recordar que en este ejercicio $\hat{p}=\hat{y}$.

Por último, resolvamos la parte **a)** con otro enfoque, utilizando la fórmula del potencial de un dipolo.
Consideremos el anillo como un conjunto de pequeños dipolos dispuestos en la forma de un anillo:

$$V=\int_{٠}^{\pi}dV=\int_{٠}^{\pi}\frac{d\,\vec{p}\cdot\vec{r}}{۴\pi\epsilon_{0}r^{3}}=\int_{0}^{\pi}\frac{dq\,\vec{d}\cdot\vec{r}}{۴\pi\epsilon_{0}r^{3}}=\int_{0}^{\pi}\frac{(\lambda a\,d\phi')(2\mathrm{a}\,\hat{\rho})\cdot\vec{r}}{۴\pi\epsilon_{0}r^{3}}=\left(\frac{2\lambda a^{2}\vec{r}}{۴\pi\epsilon_{٠}\,r^{3}}\right)\cdot\int_{٠}^{\pi}\hat{\rho}\,d\phi'=\frac{\lambda a^{2}\vec{r}\cdot\hat{y}}{\pi\epsilon_{0}r^{3}}$$

Lo que reproduce el resultado anterior.