FI2002-5 2009-2

Control 1

Solución.

P1.

a) $\vec{E}=\int\frac{\lambda(x)dx(\vec{r}-x\hat{x})}{4\pi\epsilon_0(\vec{r}-x\hat{x})^3}=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\lambda(s\hat{z}-x\hat{x})dx}{4\pi\epsilon_0(s^2+x^2)^{3/2}}$, por simetría, el campo eléctrico tendrá dirección $\hat{z}$.

$$\vec{E}=\frac{\lambda\hat{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{sdx}{(s^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\lambda\hat{z}}{4\pi\epsilon_0}I$$, hacemos $\tan(\theta)=\frac{x}{s}\Rightarrow dx=\frac{s}{cos^2(\theta)}d\theta$

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{s^2}{cos^2(\theta)}\frac{d\theta}{(s^2+s^2tan^2(\theta))^{3/2}}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos(\theta)}{s}=\frac{sen(\theta_2)}{s}-\frac{sen(\theta_1)}{s}$$, pero $\theta_1=-\theta_2$

$$\Rightarrow I=2\frac{sen(\theta_2)}{s}\quad,\quad sen(\theta_2)=\frac{a/2}{\sqrt{s^2+a^2/4}}\qquad\Rightarrow\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 s}\frac{a}{\sqrt{s^2+a^2/4}}\hat{z}$$

b) Esta vez usamos el resultado anterior y superposición. Consideremos $s=\sqrt{z^2+a^2/4}$. Por simetría, el campo eléctrico tendrá la dirección de $\hat{z}$ y el campo de cada uno de los cuatro alambres formará un ángulo con la vertical tal que $\cos(\phi)=\frac{z}{s}$, luego:

$$\vec{E}=4\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 s}\frac{a}{\sqrt{s^2+a^2/4}}\cos(\phi)\hat{z}=\frac{\lambda az}{\pi\epsilon_0 s^2\sqrt{s^2+a^2/4}}\hat{z}=\frac{\lambda az}{\pi\epsilon_0(z^2+a^2/4)\sqrt{z^2+a^2/2}}\hat{z}$$

P2.

a) Dada la simetría del problema, el campo eléctrico tendrá simetría cilíndrica.

Usamos que $\nabla\circ\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\Rightarrow\oint_S\vec{E}\,d\vec{S}=\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$, con S una superficie cilíndrica de largo arbitrario l y radio r .

Como $2\pi rlE_r=\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}\Rightarrow E_r=\frac{Q_{enc}}{2\pi rl\epsilon_0}$

$0<r<a$:

$$Q_{enc}=\pi r^2l\rho_0\Rightarrow E_r=\frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}$$

$a<r<b$:

$$Q_{enc}=\pi a^2l\rho_0\Rightarrow E_r=\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}$$

$b<r<c$: Este es el interior del conductor, $\vec{E}=\vec{0}$

$c<r$:

$Q_{enc}=\pi a^2 l \rho_0 \Rightarrow E_r=\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}$, debido a que el conductor es neutro y la carga encerrada será la misma que para $a<r<b$

b) Para que el campo eléctrico al interior del conductor sea cero, la carga encerrada por un cilindro ubicado dentro del conductor tiene que ser cero,

$$-2\pi b l \lambda_b=\pi a^2 l \rho_0 \Rightarrow \lambda_b=\frac{-\rho_0 a^2}{2b}$$

y usando que el conductor es neutro:

$$2\pi c l \lambda_c=\pi a^2 l \rho_0 \Rightarrow \lambda_c=\frac{\rho_0 a^2}{2c}$$

c) $V(a/2)=-\int_{r_0}^{a/2} \vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int_{r_0}^{a/2} E_r dr=-\int_{r_0}^{c} \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}-\int_{b}^{a} \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}-\int_{a}^{a/2} \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}$

$$V(a/2)=\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}(\log(r_0)-\log(c)+\log(b)-\log(a))+\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}\frac{3}{4}a^2$$

P3.

a) El campo eléctrico al interior del conductor es cero, lo que significa que el flujo del campo eléctrico en una superficie esférica justo fuera de ambas cavidades esféricas debe ser cero, luego la carga en esas superficies será $-q_a$ y $-q_b$, respectivamente. Además, como el campo al exterior de estas cavidades es uniforme, las densidades de carga serán uniformes.

$$\sigma_a=\frac{-q_a}{4\pi a^2};\sigma_b=\frac{-q_b}{4\pi b^2}$$

Ya que el conductor es neutro, la carga total en su superficie externa debe ser q_a+q_b , y como el campo aléctrico al interior del conductor es cero, esta carga estará distribuida uniformemente, $\sigma_R=\frac{q_a+q_b}{4\pi R^2}$

b) Debido al resultado anterior, en el que la densidad de carga en la superficie externa del conductor es uniforme: $\vec{E}=\frac{q_a+q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, r>R$

c) Al ser distribuciones esféricas uniformes, ninguna de las densidades de carga superficiales que rodeen a las cavidades afectarán en el campo al interior de ellas y la cavidad vecina, al tener carga neta nula, tampoco lo hará.

$$\vec{E}_a=\frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}_a, r<a$$

$$\vec{E}_b=\frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}_b, r<b$$

d) Si tomamos las cargas centrales como cargas de prueba, es decir, no consideramos el campo generados por éstas, el campo eléctrico en esos puntos será cero y, por lo tanto, la fuerza sobre ambas cargas puntuales será cero.

e) Para mantener la condición de campo eléctrico nulo al interior de conductor, las condiciones al interior del conductor no cambiarán. Lo anterior implica que la cantidad de carga en la superficie externa del conductor no cambiará, sin embargo la distribución de cargas dejará de ser uniforme y, por lo tanto, el campo al exterior del conductor también cambiará, esto para contrarrestar la contribución al campo elétrico de la carga externa al conductor.