

Ejercicio 2

Solución.

a) Dada la simetría del problema, el campo eléctrico tendrá simetría cilíndrica.

Usamos que $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$, con S una superficie cilíndrica de largo arbitrario l y radio r .

$$\text{Como } 2\pi r l E_r = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q_{enc}}{2\pi r l \epsilon_0}$$

$0 < r < a$:

$$Q_{enc} = \pi r^2 l \rho_0 \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}$$

$a < r < b$:

$$Q_{enc} = \pi a^2 l \rho_0 \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r}$$

$b < r < c$:

$$Q_{enc} = \pi a^2 l \rho_0 + (\pi r^2 l - \pi b^2 l) \rho_0 \Rightarrow E_r = \frac{(a^2 + r^2 - b^2) \rho_0}{2\epsilon_0 r}$$

$c < r$:

$$Q_{enc} = \pi l (a^2 - b^2 + c^2) \rho_0 \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 (a^2 - b^2 + c^2)}{2\epsilon_0 r}$$

b) Para valores de r mayores que c , el potencial depende de un logaritmo en r , por lo que todas las primitivas del campo eléctrico tomarán valores infinitos en $r \rightarrow \infty$ y el potencial no se puede tomar como cero en infinito. Tomamos un valor r_0 mayor que c para el cual el potencial valdrá cero.

$$V(b) = - \int_{r_0}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_0}^b E_r dr = - \int_{r_0}^c \frac{\rho_0 (a^2 - b^2 + c^2)}{2\epsilon_0 r} - \int_c^b \frac{(a^2 + r^2 - b^2) \rho_0}{2\epsilon_0 r}$$

$$V(b) = \frac{(a^2 + c^2 - b^2) \rho_0}{2\epsilon_0} (\log(r_0) - \log(c)) + \frac{(a^2 - b^2) \rho_0}{2\epsilon_0} (\log(c) - \log(b)) + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (c^2 - b^2)$$