



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 23

Inducción Electromagnética III

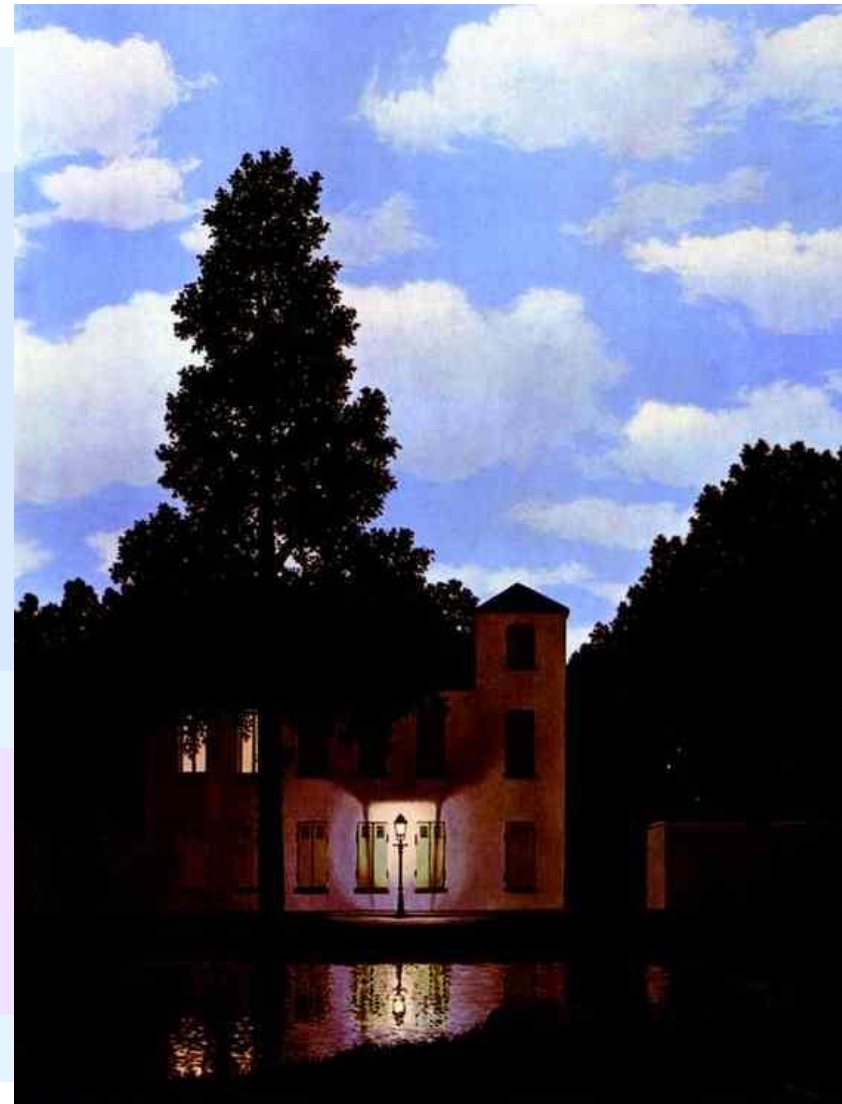
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Corrección 4ta ecuación de Maxwell
- Corriente de Desplazamiento
- Energía Campo magnético
- Energía almacenada en inductancia
- Densidad Volumétrica de energía
- Energía Electromagnética

René Magritte,
“El imperio de las
luces” (1954)





Corrección 4ta Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}$$

Tomando la divergencia

Nulo

$$0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

Pero por la ecuación de
continuidad se cumple

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Luego hay una
contradicción !?#@

Hay que "parchar"
la 4ª Ecuación
Maxwell !!



Corrección 4ta Ecuación de Maxwell

Por la ecuación de
continuidad se cumple

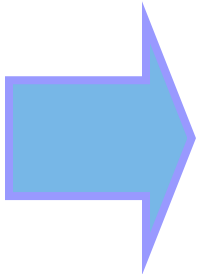
$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Sabemos que se cumple
campo vectorial, luego

$$\nabla \times (\nabla \cdot \vec{A}) = 0 \text{ para cualquier}$$


$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

**4ª Ecuación de
Maxwell**



Corriente de Desplazamiento

Si no hay corriente $\vec{J} = 0$, pero cuando hay campos eléctricos variables se encuentra experimentalmente la relación

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Así, el término $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ debe sumarse a la 4ª ecuación, lo que da finalmente:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

4ª Ecuación de Maxwell

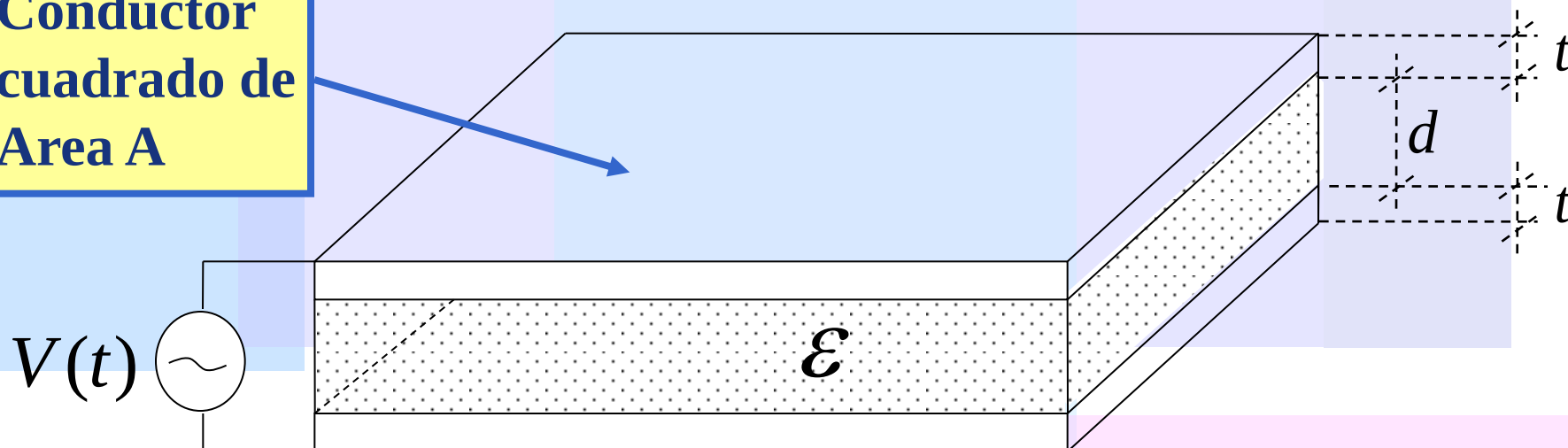
Corriente de desplazamiento



Corriente de Desplazamiento

Ejemplo 3. Calcular corriente de desplazamiento en el interior del condensador alimentado por senoide

Conductor
cuadrado de
Area A

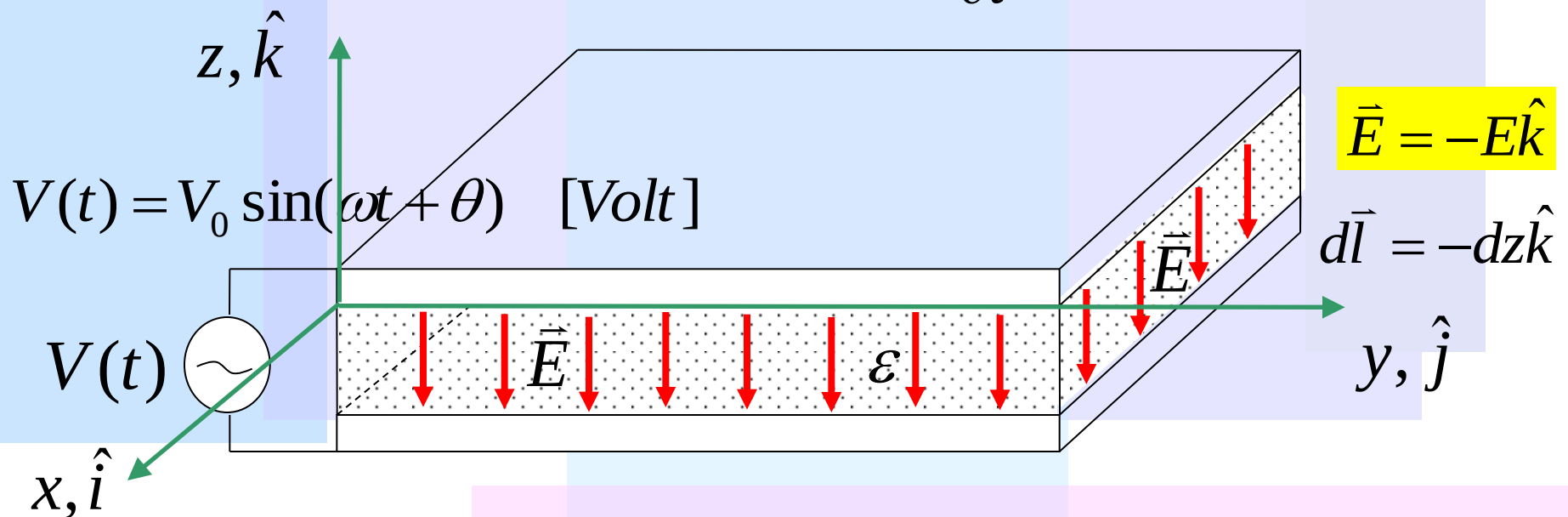


$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta) \quad [\text{Volt}]$$



Corriente de Desplazamiento

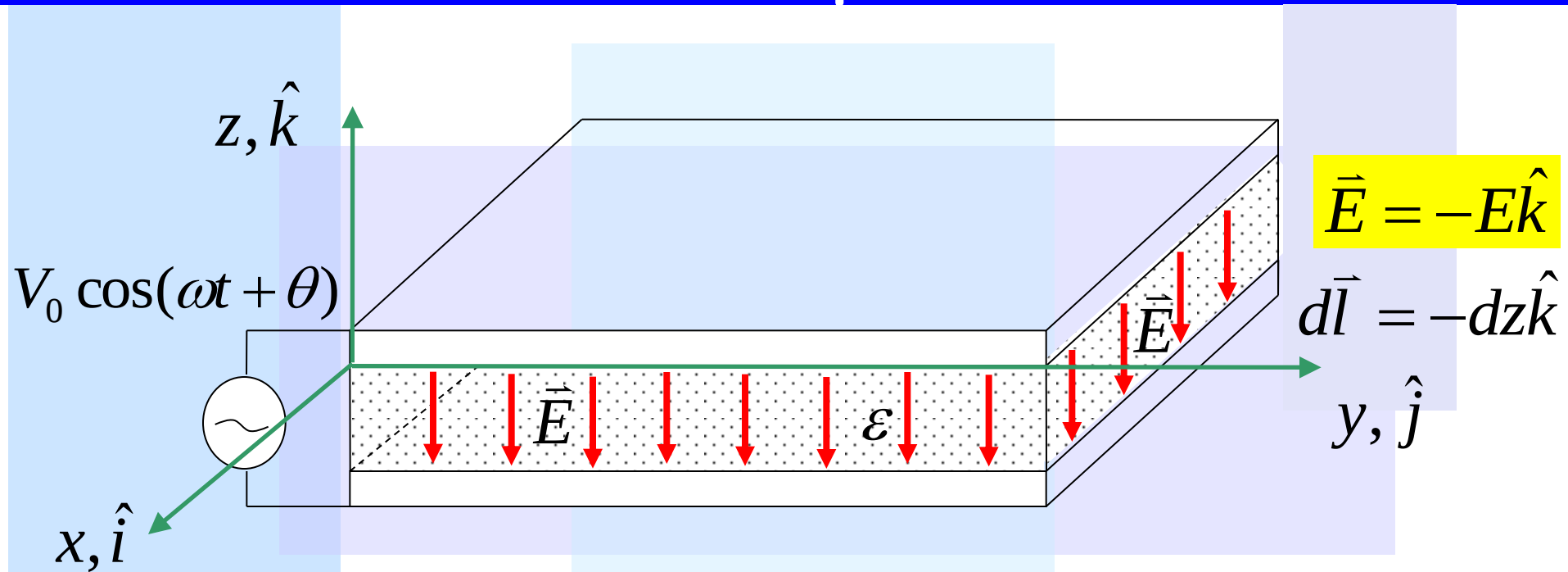
Corriente de desplazamiento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ usamos $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$



Además $V(z_1) - V(z_2) = \int_{z=z_1}^{z=z_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V(t) = - \int_{z=0}^{z=-d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed$



Corriente de Desplazamiento

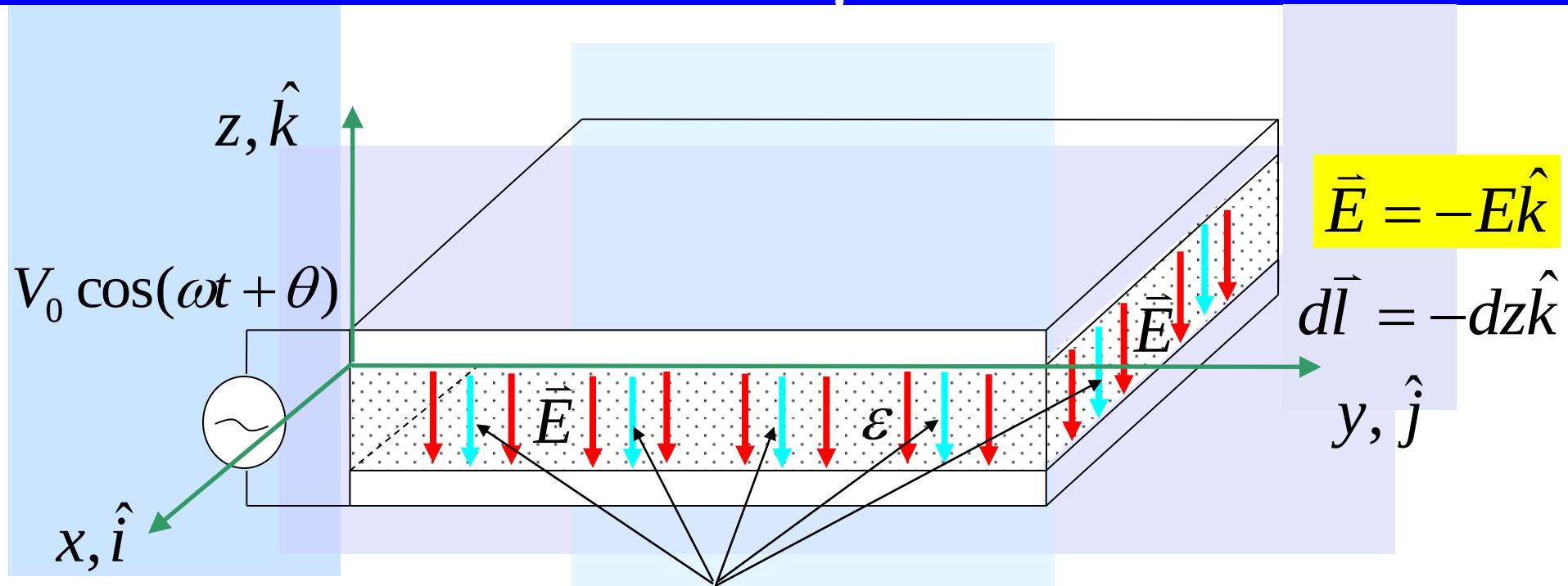


$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{V_0}{d} \sin(\omega t + \theta) \hat{k} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{\epsilon V_0}{d} \sin(\omega t + \theta) \hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k}$$



Corriente de Desplazamiento



$$\vec{E} = -E\hat{k}$$

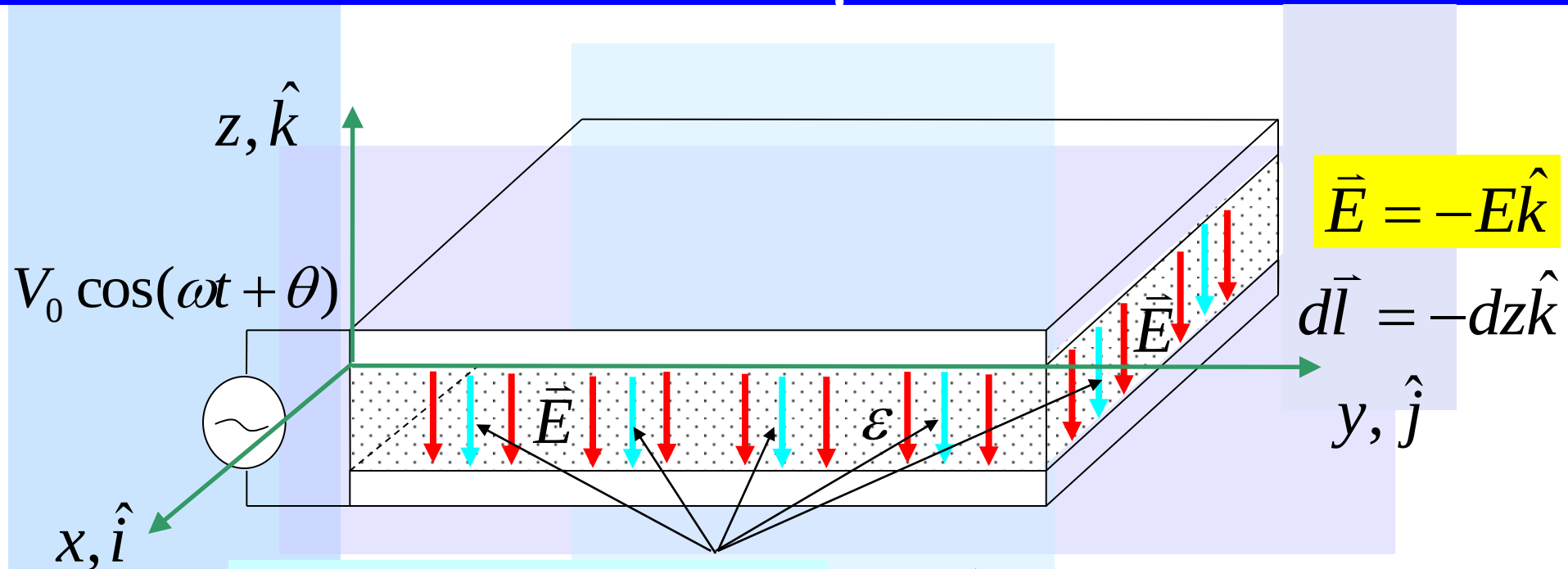
$$d\vec{l} = -dz\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k} \equiv \vec{J}_D$$

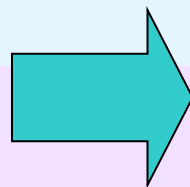
Corriente de desplazamiento



Corriente de Desplazamiento



$$\vec{J}_D = -\frac{\omega\epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k}$$

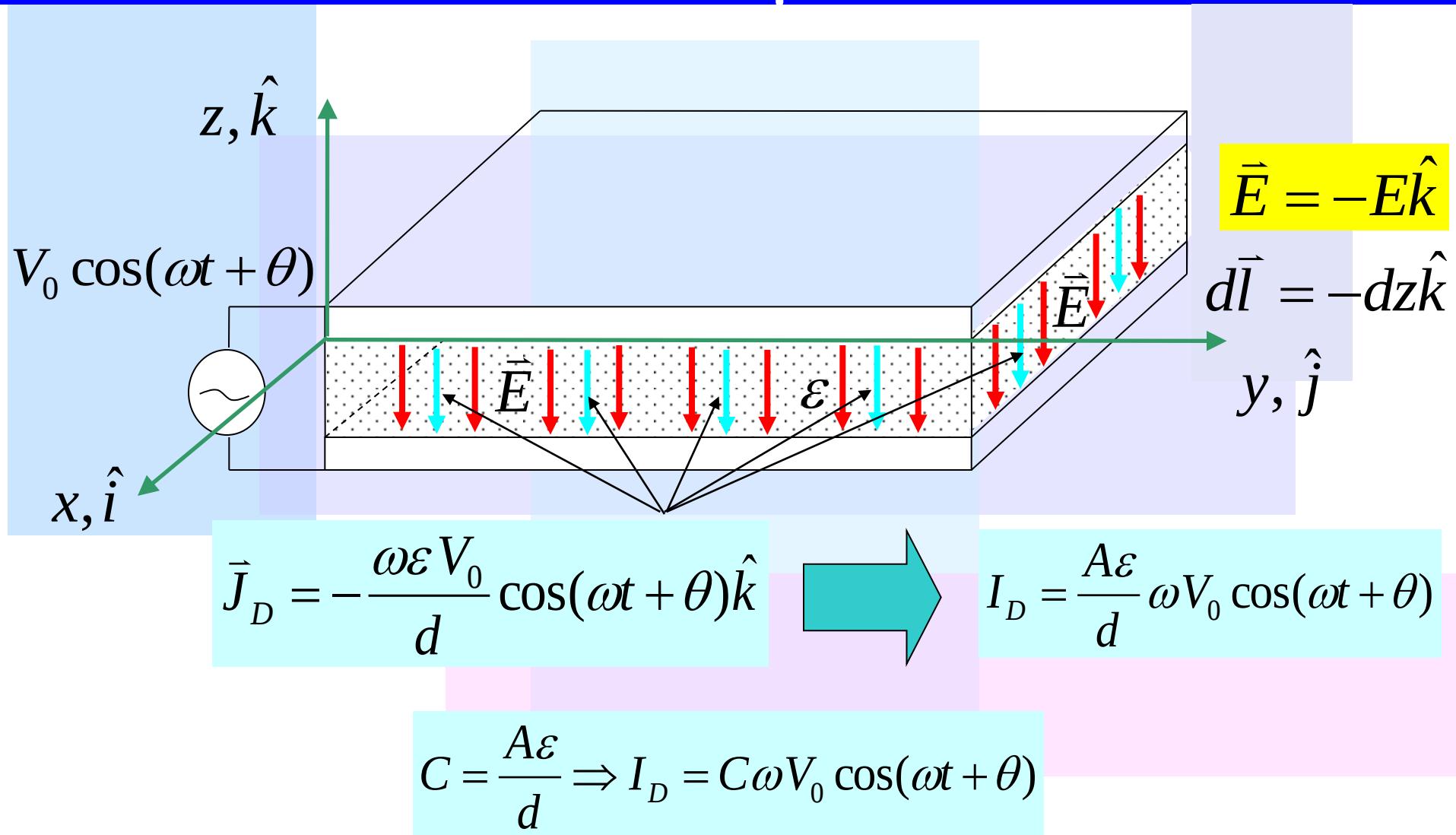


$$I_D = \iint_A \vec{J}_D \cdot d\vec{s}$$

$$I_D = \iint_A -\frac{\omega\epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k} \cdot ds(-\hat{k}) = \frac{A\epsilon}{d} \omega V \cos(\omega t + \theta)$$

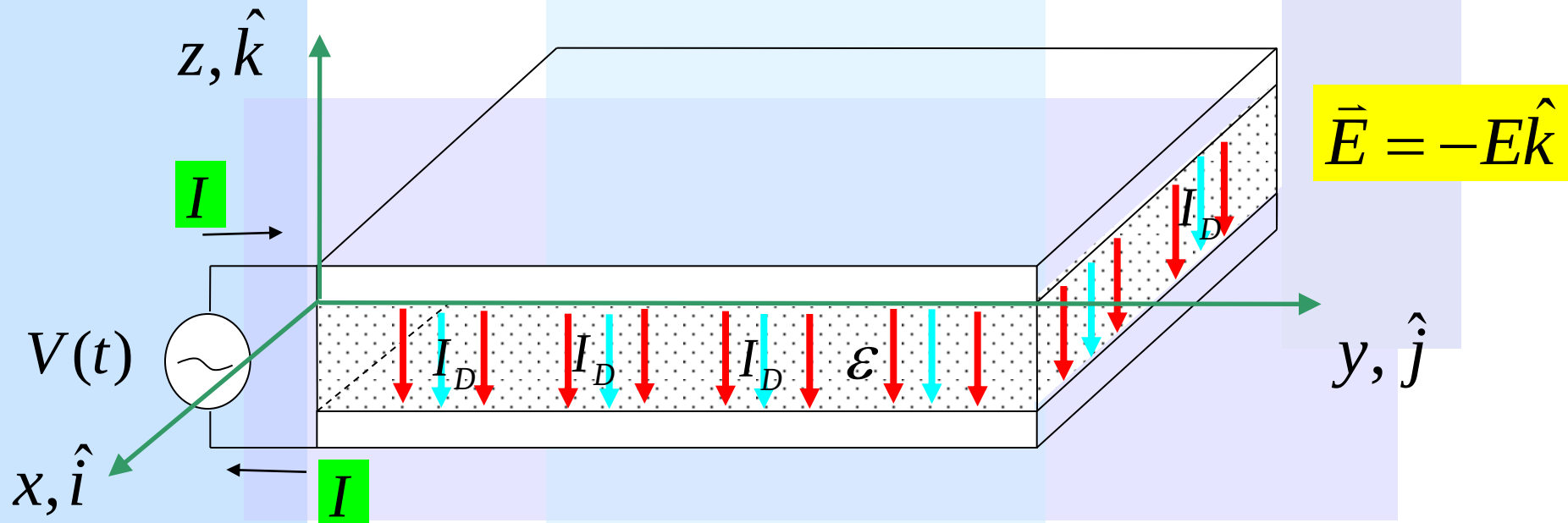


Corriente de Desplazamiento



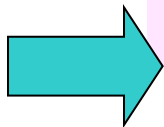


Corriente de Desplazamiento



Ecuación característica del condensador $Q = CV$

Ecuación de corriente $I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$



$$I = C\omega V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$\therefore$

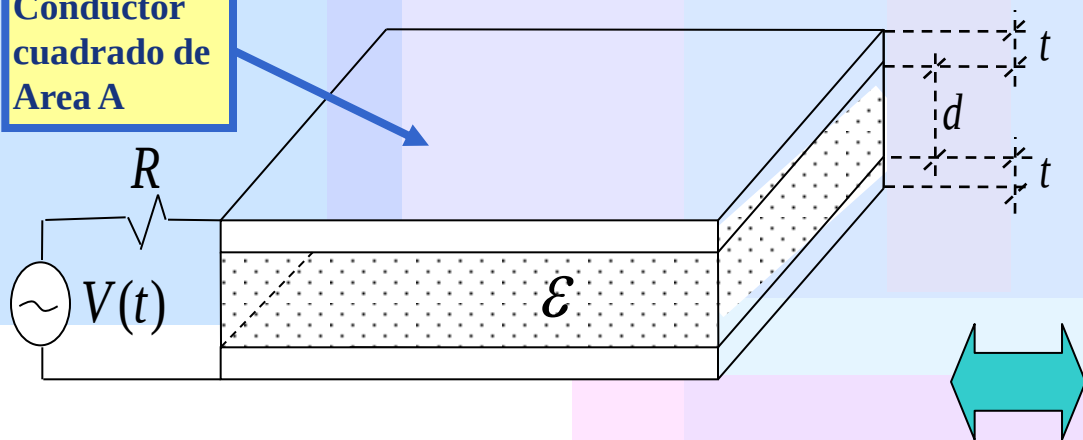
$$I = I_D$$



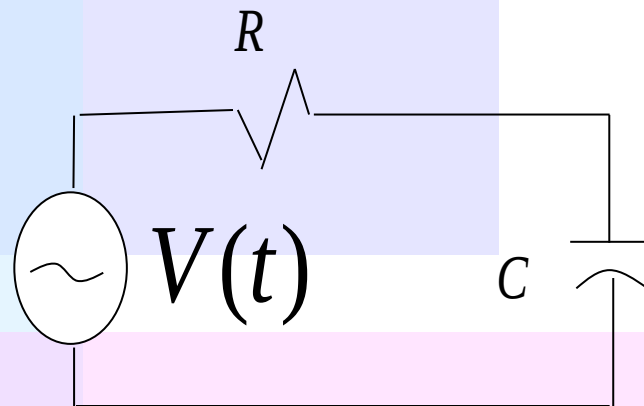
Circuito RC

Supongamos que el conductor que une la fuente con el condensador tiene resistencia R , y que inicialmente el condensador tiene una carga Q_0

Conductor
cuadrado de
Area A



$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta) \quad [\text{Volt}]$$



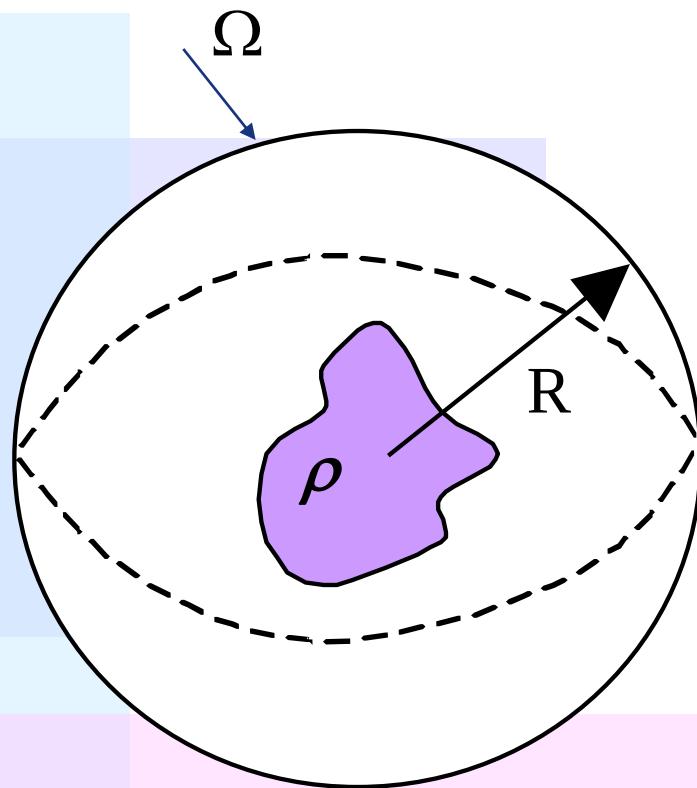


Energía Electromagnética

Habíamos obtenido que la energía del campo eléctrico es

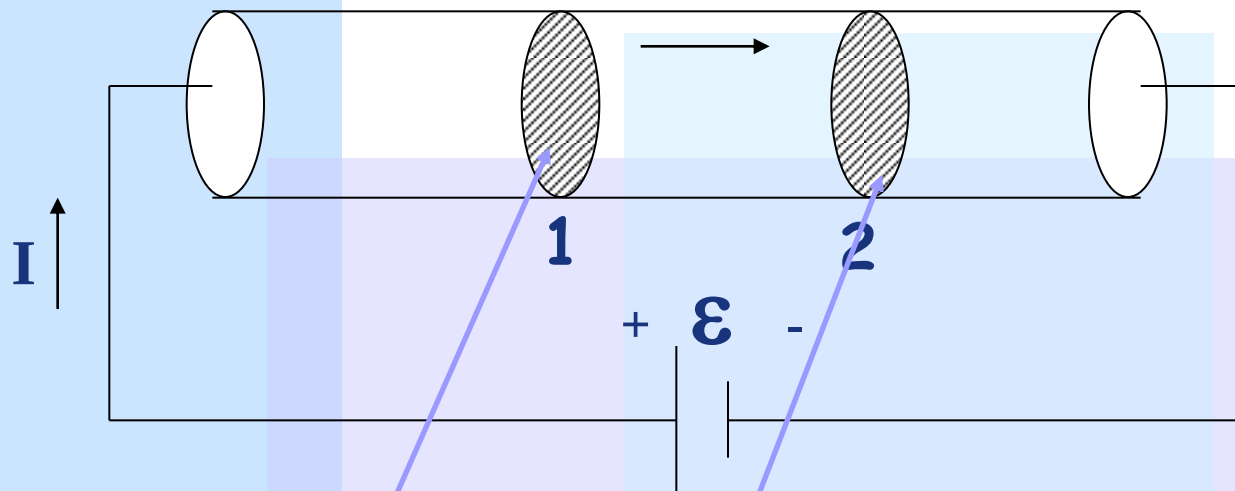
$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

Aquí Ω es todo el espacio





Energía Eléctrica



$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

$$\Delta U = \Delta Q(V_1 - V_2)$$

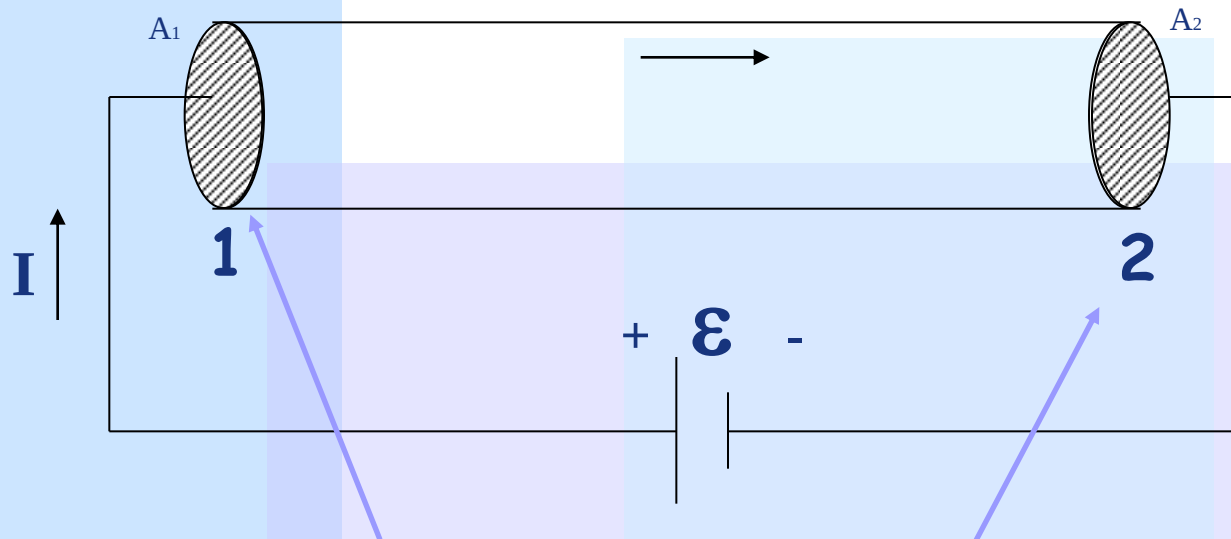
**Potencia es la derivada
de la Energía**

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} (V_1 - V_2)$$

$$P = I(V_1 - V_2)$$



Energía Eléctrica



- Válido para todo elemento
- Fem proporciona energía

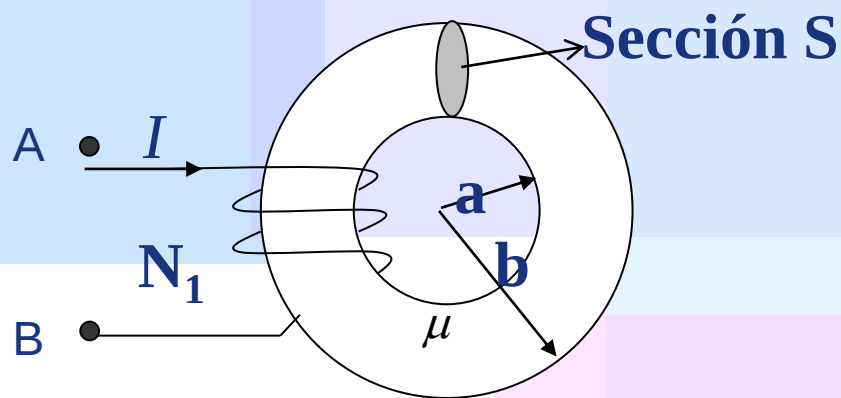
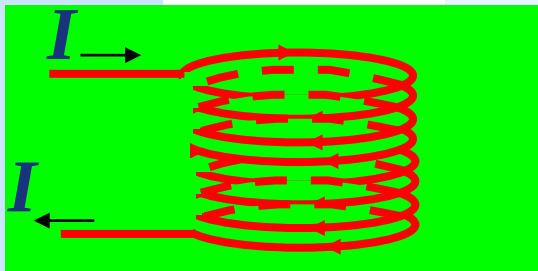
Potencia es diferencia de potencial por corriente

$$\Rightarrow P = I\Delta V$$

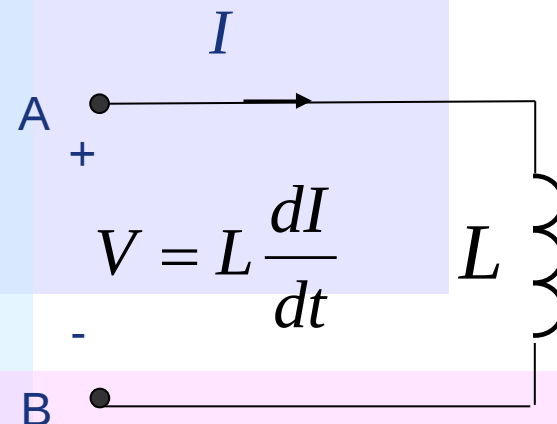
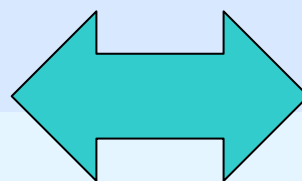


Energía Campo Magnético

Teníamos que:



$$L = \frac{\mu N_1^2 A}{\pi(a+b)}$$





Energía Almacenada en Inductancia

$$P = IV$$

$$P = IL \frac{dI}{dt}$$

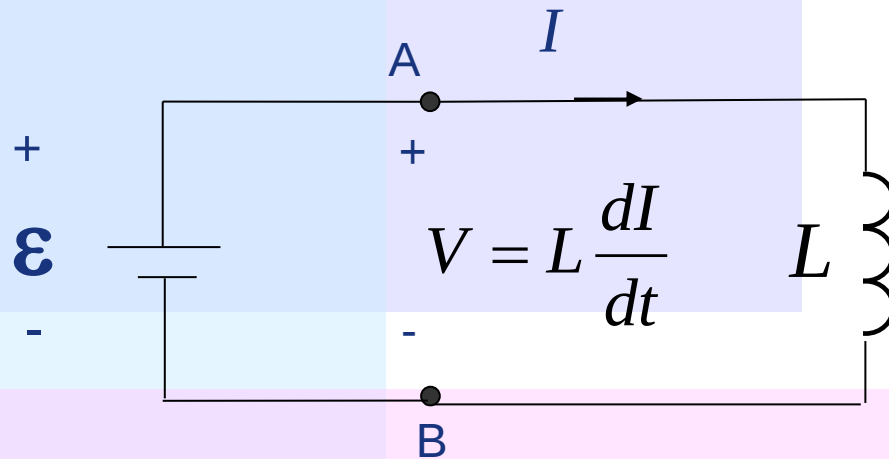
$$U = \int_{t_0}^t P dt = \int_{t_0}^t LI \frac{dI}{dt} dt$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\phi = LI$$

$$U = \frac{1}{2} \phi I$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$$





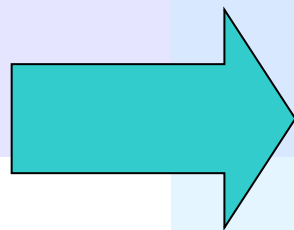
Energía Electromagnética

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \vec{H}.$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \vec{E}.$$



$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sumando

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$



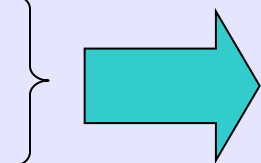
Energía Electromagnética

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Usando la propiedad $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

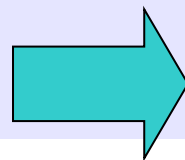
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$



$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial (\epsilon \vec{E})}{\partial t} \right) - \mu \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$



Energía Electromagnética

$$\Rightarrow -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

Tomando la integral sobre un volumen Ω muy grande

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv + \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv$$



Energía Electromagnética

Nos interesa el caso cuando Ω es todo el espacio

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv + \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = - \underbrace{\iiint_{\Omega} \underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\propto \frac{1}{r^2}} \underbrace{(\vec{E} \times \vec{H})}_{\propto r^2} dv}_{\propto \frac{1}{r^3} \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} (\iiint_{\Omega} \dots) = 0}$$



Energía Electromagnética

Nos interesa el caso cuando Ω es todo el espacio

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv}_{\text{Energía del campo electromagnético}} + \underbrace{\iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv}_{\text{Potencia consumida por efecto Joule}} = 0$$

Energía del campo
electromagnético

Potencia consumida
por efecto Joule

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv$$

$$P_{\text{Joule}} = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

Energía del
campo eléctrico

Energía del
campo magnético



Energía Electromagnética

Si no hay pérdidas Joule $P_{Joule} = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = 0$$

$$\therefore U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = Cte.$$

En ausencia de pérdidas Joule la energía electromagnética se conserva



Energía Electromagnética

Si no hay campos magnéticos

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}) dv$$

Si no hay campos eléctricos

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) dv$$