



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 21

Inducción Electromagnética

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Repaso
- Flujo magnético
- Ley de Faraday-Lenz
- Modificación 3ª ecuación de Maxwell
- Principio del generador

Giorgio de Chirico,
"Plaza de Italia", 1913



Giorgio de Chirico - Piazza d' Italia



Repaso

Equilibrio electrostático
de las cargas

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') dv' \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

1ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

2ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Equilibrio dinámico de las
corrientes $I=I_0$

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad \vec{B} = \mu_R \mu_0 \vec{H}$$

3ª Ecuación de Maxwell

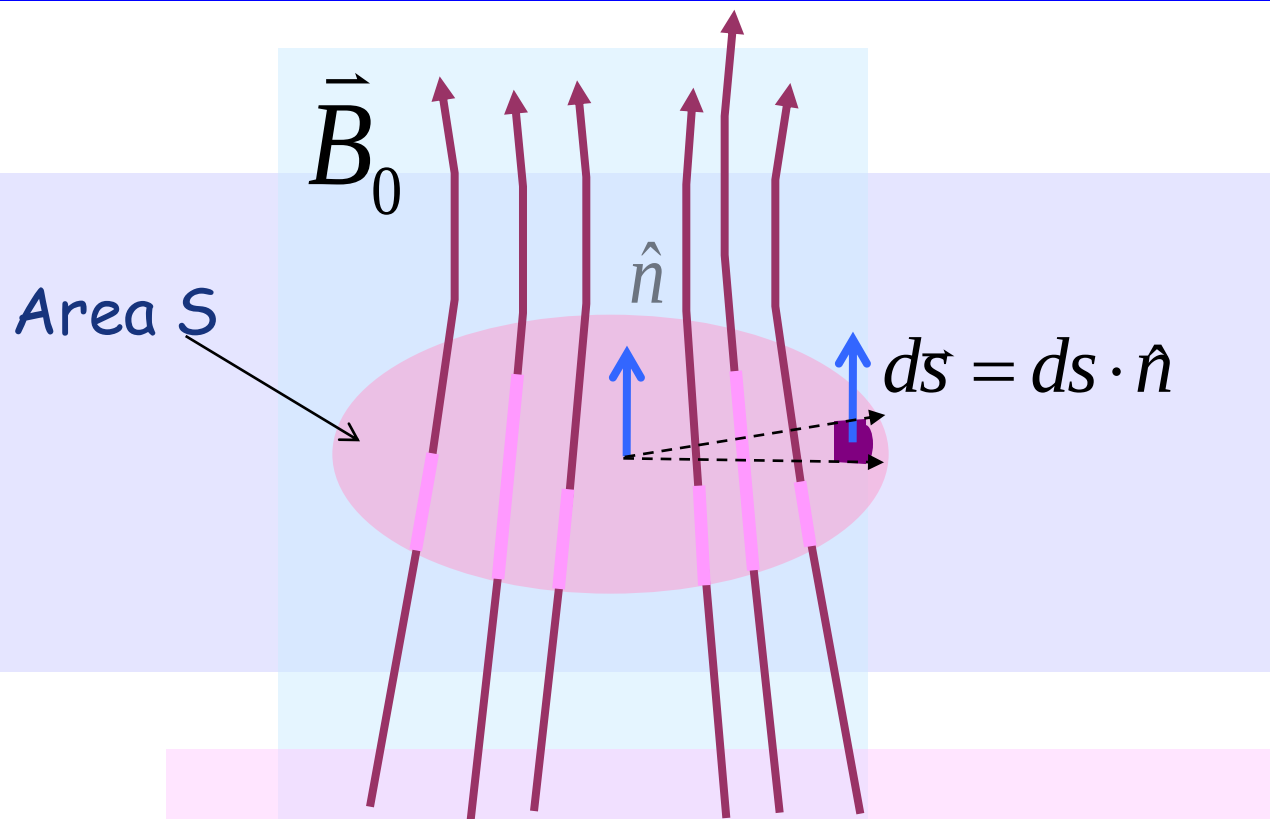
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$



Flujo Magnético



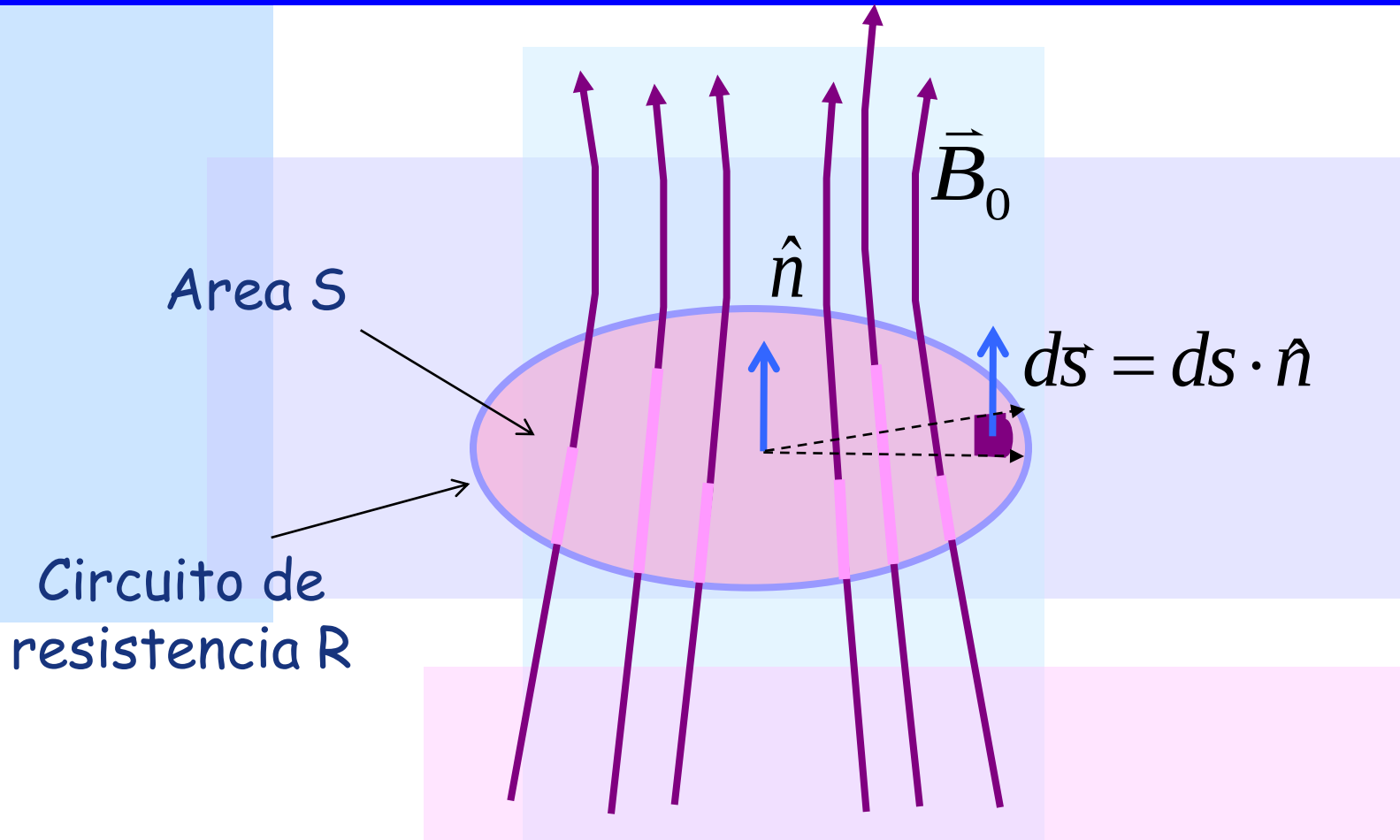
Flujo del campo magnético a través de área S

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

$$[\phi] = [\text{Tesla} \times \text{m}^2]$$

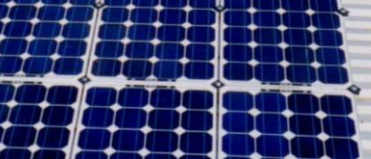


Flujo magnético en un circuito



Flujo del campo magnético a través del circuito

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$



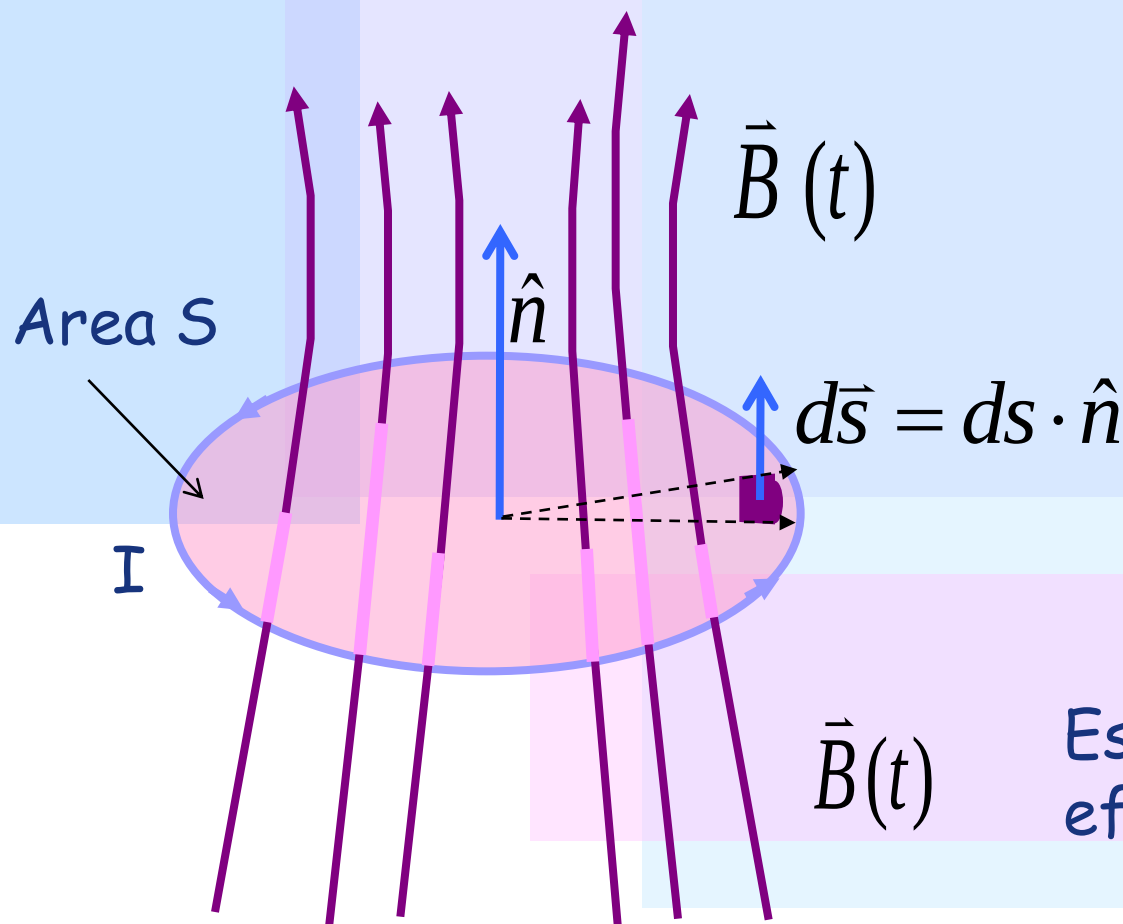
Ley de Faraday-Lenz

Se encuentra experimentalmente que si $\vec{B} = \vec{B}(t)$ entonces aparece una corriente I dada por la relación

$$I = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{R}$$

donde

$$\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

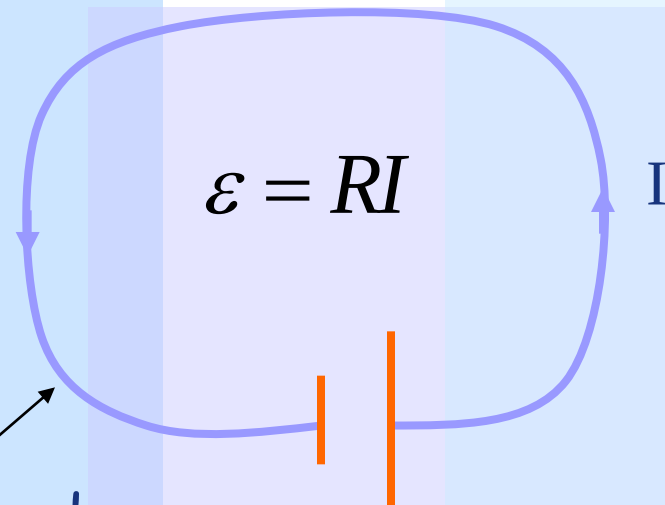


Este campo incluye el efecto de la corriente I



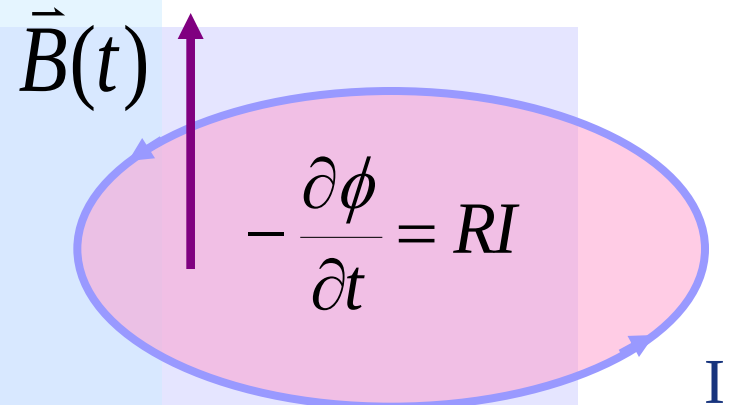
Ley de Faraday-Lenz

Recordemos que para un circuito resistivo se cumple $\varepsilon = RI$



Circuito de
resistencia R

Fem del
circuito



Un campo magnético variable
genera o induce un FEM dada
por la expresión

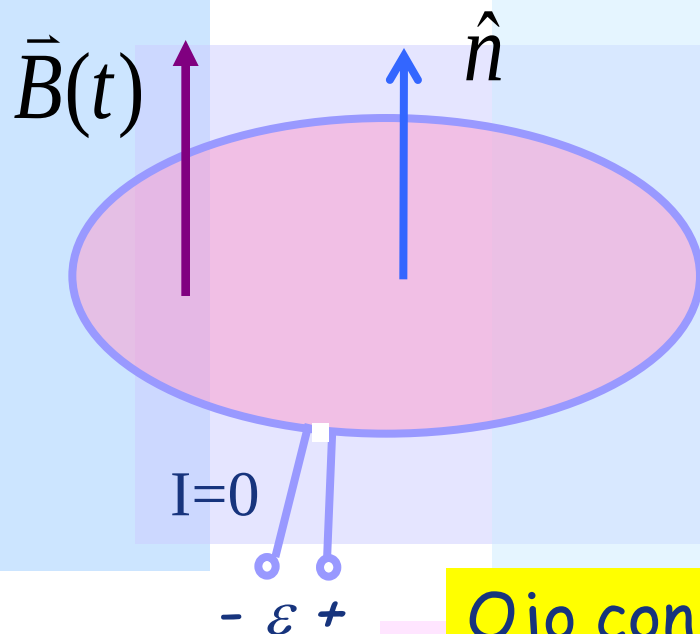
$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

LEY DE FARADAY-LENZ



Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

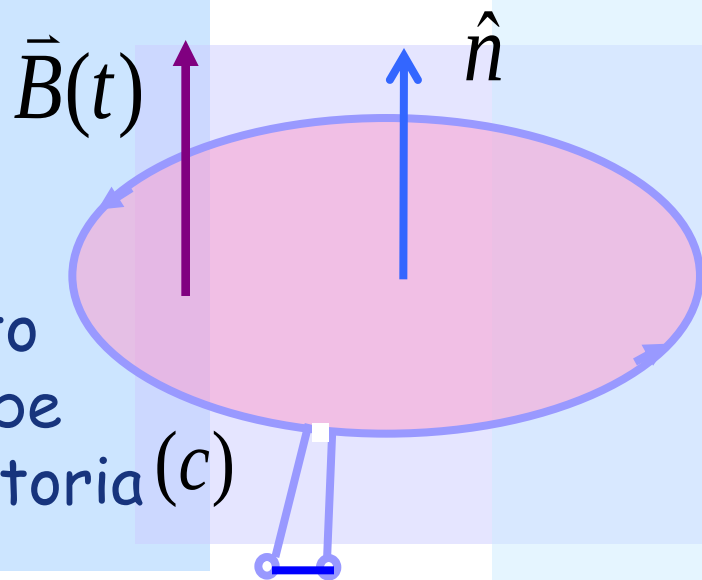
Ojo con el sentido de la fem

Notar que si el flujo es variable en el tiempo la fem se induce independiente de la corriente I



Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

Recordemos que la definición de fem es

$$\mathcal{E} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = RI \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$



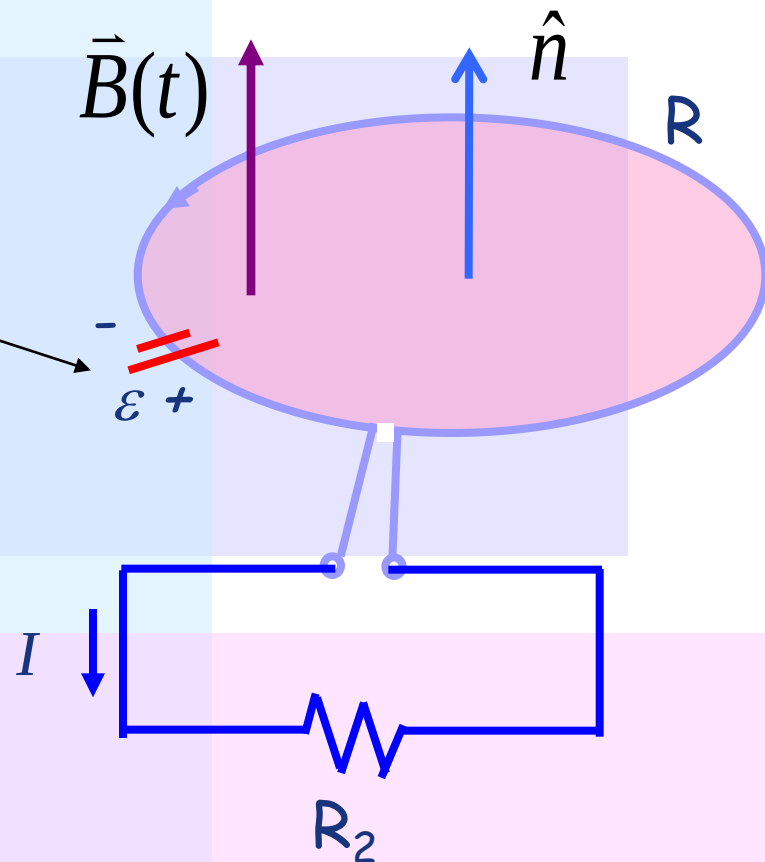
Ley de Faraday-Lenz

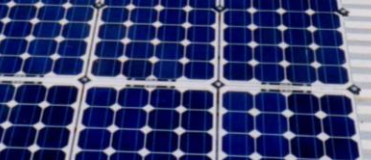
Un campo magnético variable genera o induce un FEM

La FEM inducida "aparece" en el circuito con campo variable

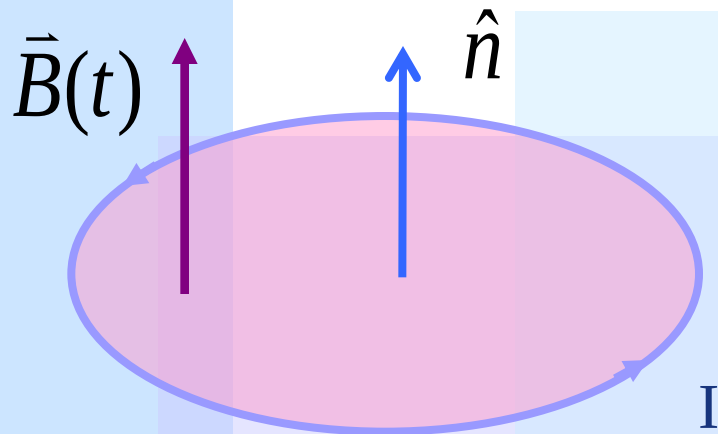
$$\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$
$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\mathcal{E} = (R_2 + R)I \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R}$$





Ley de Faraday-Lenz

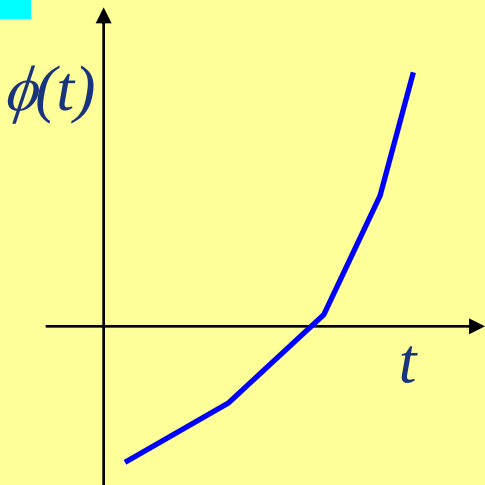


$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con

$$\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

Si



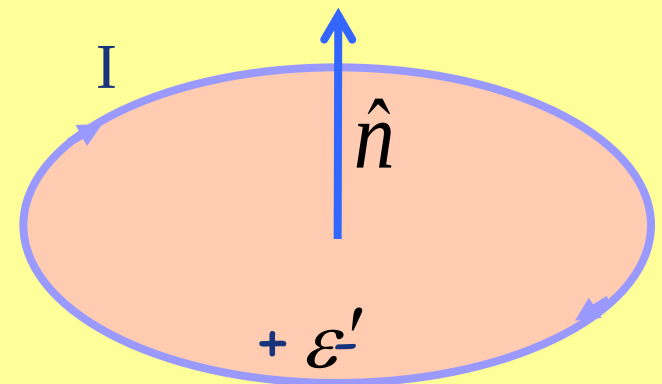
$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$$

$$\mathcal{E}' \equiv -\mathcal{E}$$

$\vec{B}$

crece

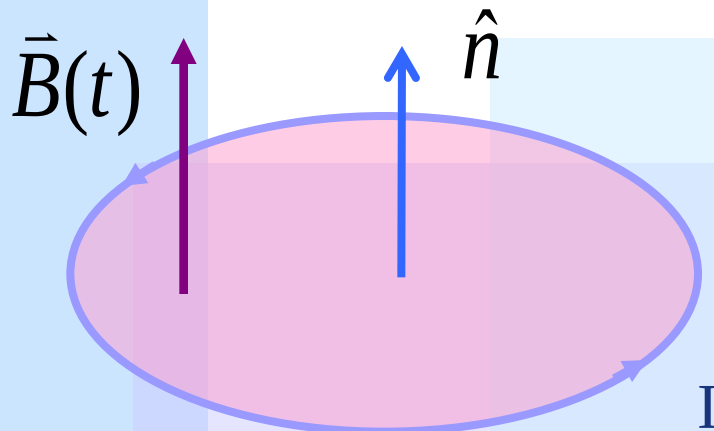
$\Rightarrow$



Corriente genera campo opuesto al crecimiento



Ley de Faraday-Lenz

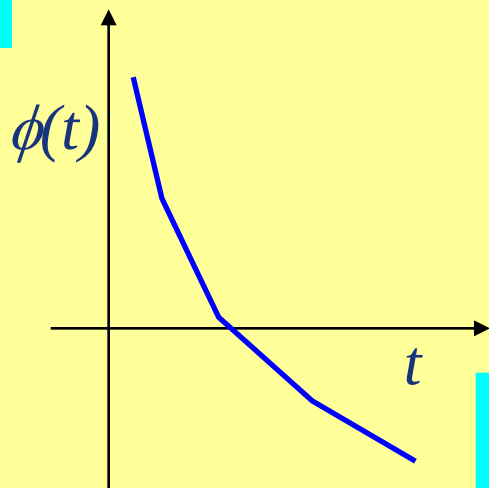


$$\varepsilon = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

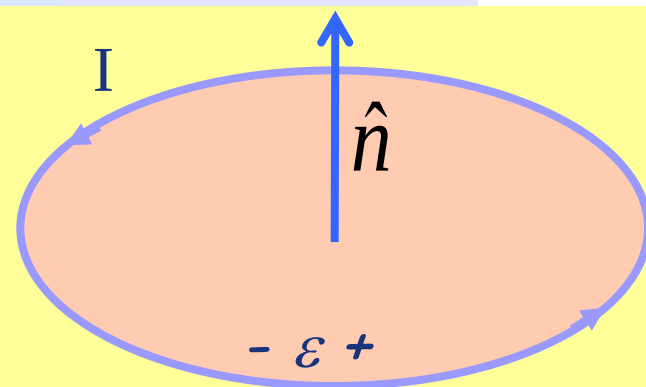
con

$$\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

Si



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$



$\vec{B}$

decrece $\Rightarrow$

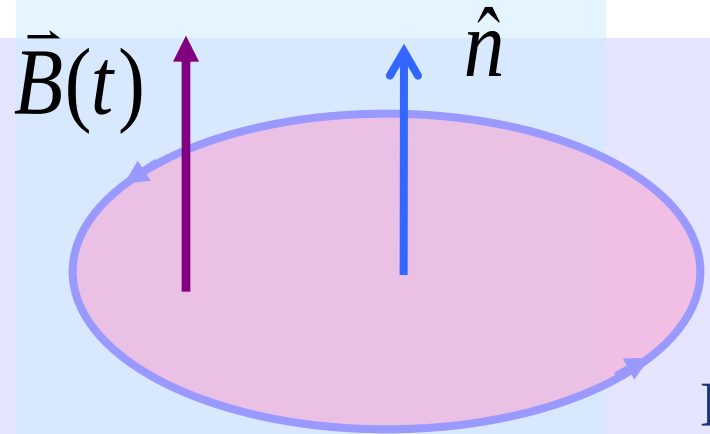
Corriente genera campo opuesto al decrecimiento



Ley de Faraday-Lenz

Un flujo magnético variable genera o induce un FEM

$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$



$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Notar que un flujo variable en el tiempo se puede lograr de dos formas:

- Con un campo variable $B(t)$
- Con una superficie variable $S(t)$

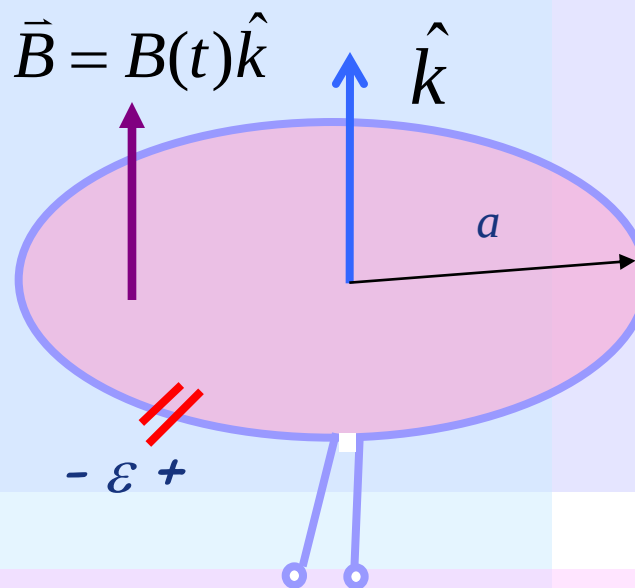


Ejemplo 1

Flujo variable producido por un campo variable $B(t)$

Si $\vec{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau} \hat{k}$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$$\phi(t) = B_0 e^{-t/\tau} \pi a^2$$

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$



Ejemplo 2

Area variable en el tiempo produce $B(t)$

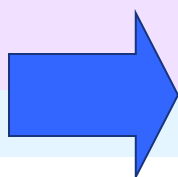
Si $\vec{B} = B_0 \hat{k}$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

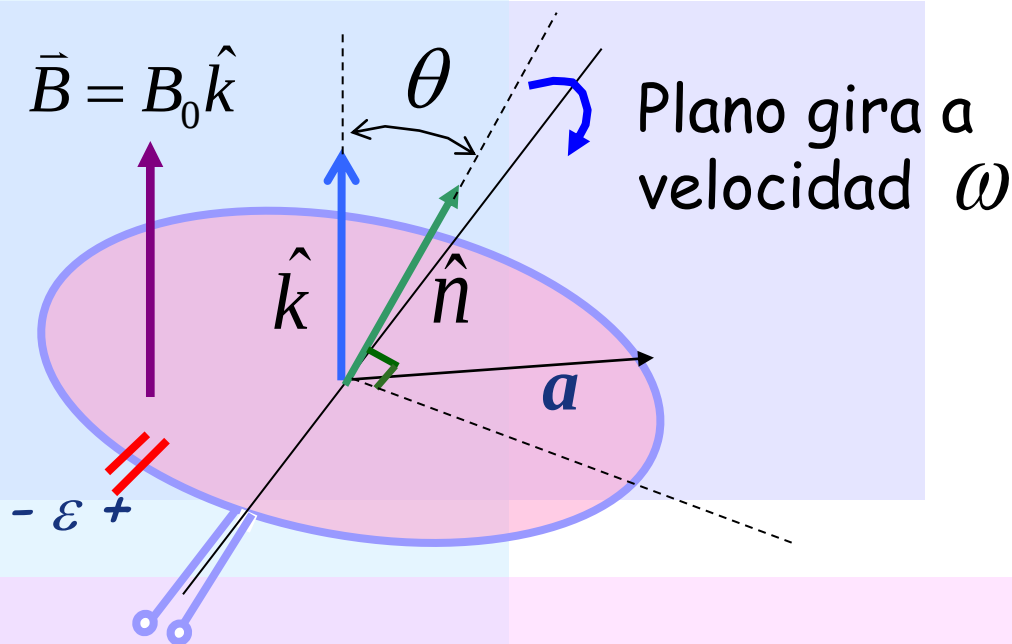
$$\phi(t) = B_0 A \cos \theta$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

$$\varepsilon = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



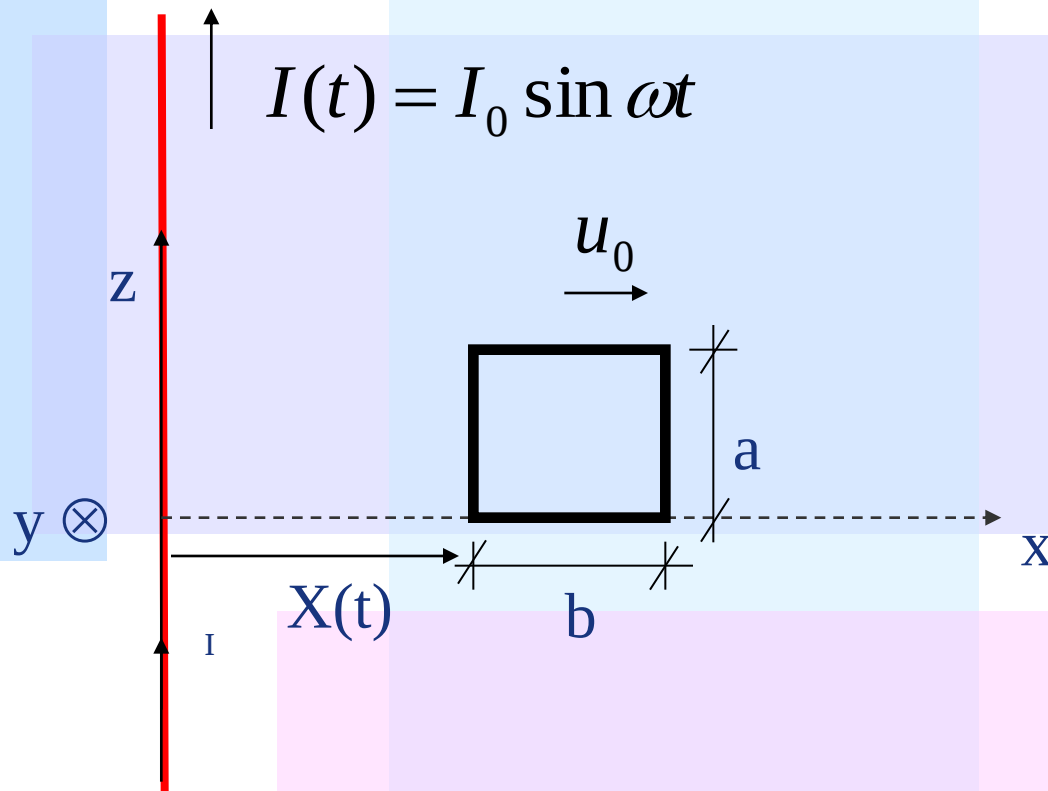
$$\varepsilon(t) = AB_0 \omega \sin(\omega t + \theta_0)$$





Ejemplo 3

Area variable en el tiempo y campo variable $B(t)$



Calcular la fem inducida en el circuito cuadrado si se mueve con velocidad u_0 constante

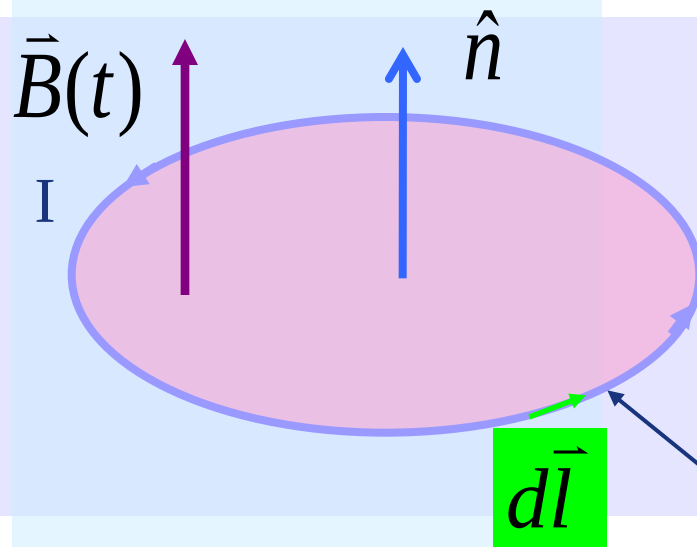


Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

Un campo magnético variable genera o induce una FEM

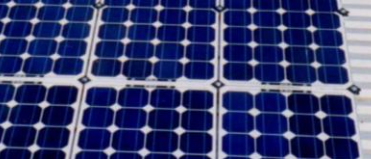
$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



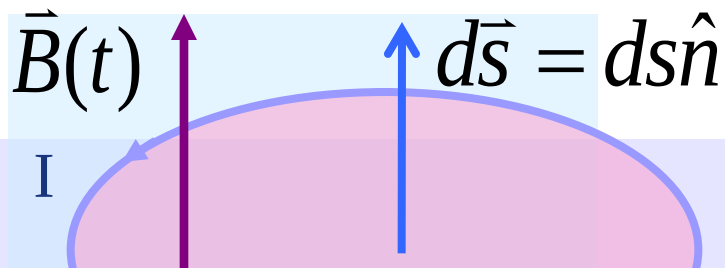
$$\mathcal{E} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\mathcal{E} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

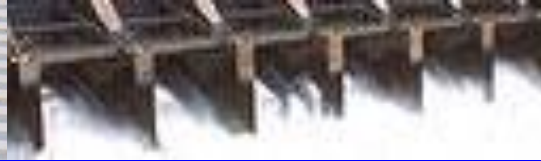
$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad \text{Válido } \forall S$$

$d\vec{l}$

Trayectoria c

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2ª Ecuación de Maxwell



Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad 2^{\text{a}} \text{ Ecuación de Maxwell}$$

Dado que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

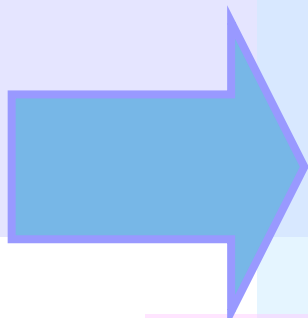
$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{y usando} \quad \nabla \times (\nabla V) = 0$$



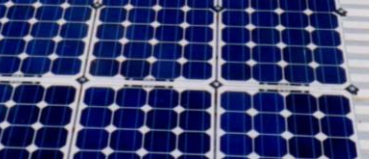
Modificación 2ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

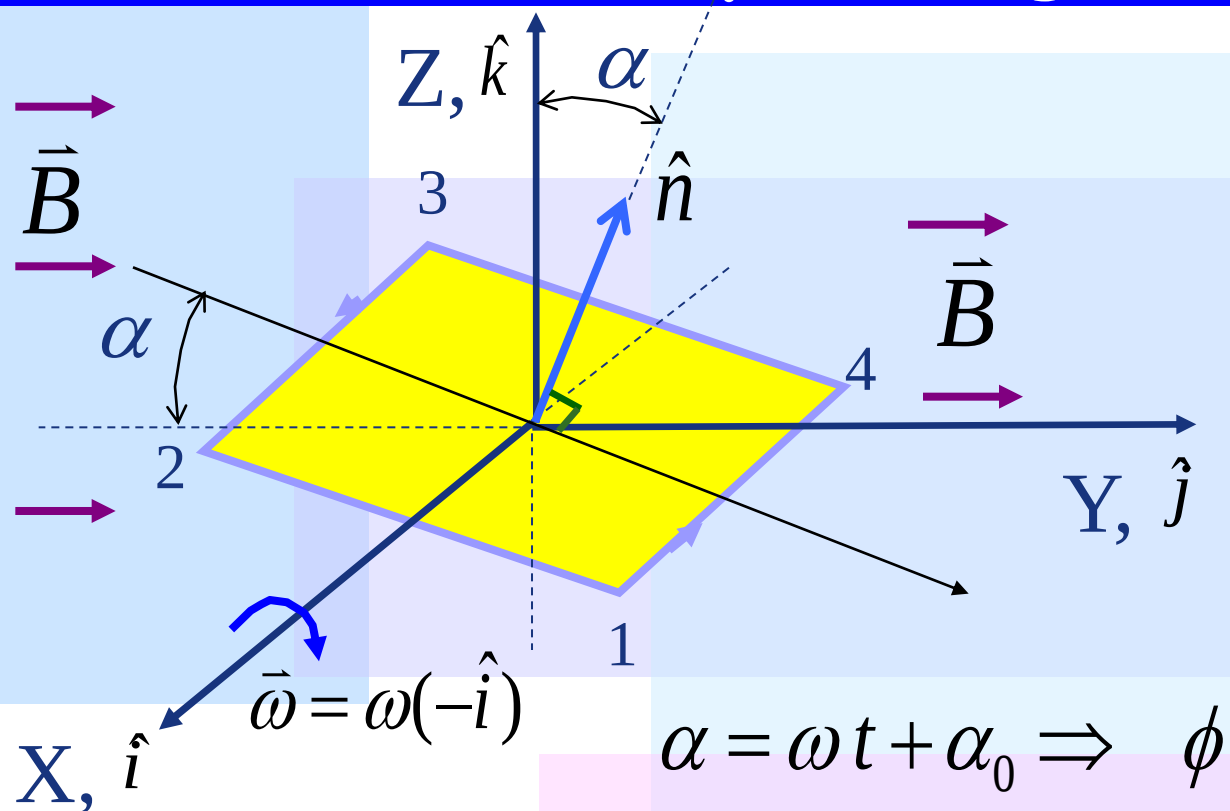
*Origen
electrostático*


$$\vec{E} = -\overbrace{\nabla V}^{\text{Origen electrostático}} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Debido a campo magnético variable en el tiempo}}$$

*Debido a campo magnético
variable en el tiempo*



Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = BA \sin \alpha$$

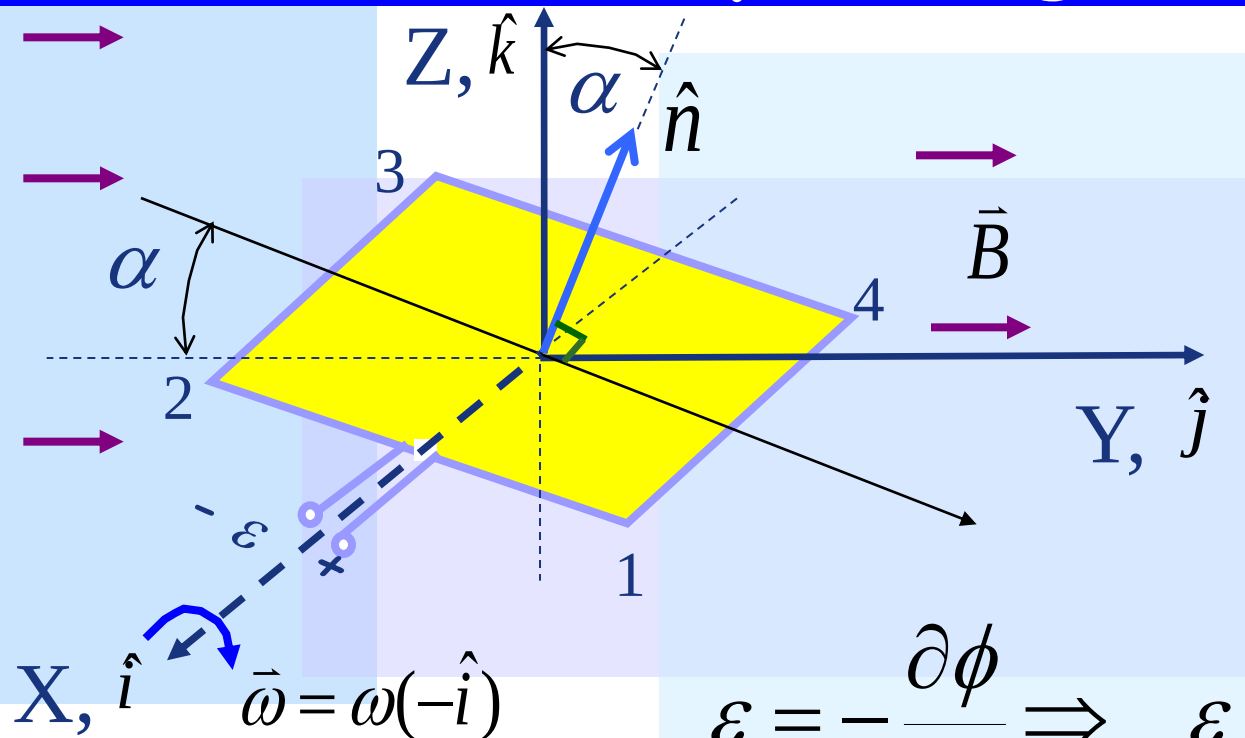
$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \phi = BA \sin(\omega t + \alpha_0)$$

Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = B\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$



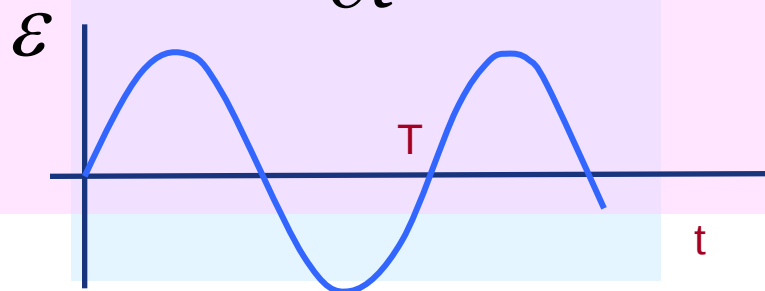
Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = B \sin \alpha$$

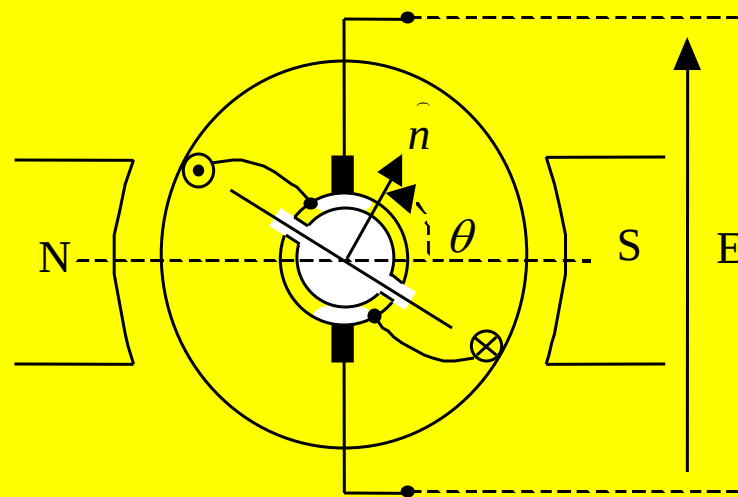
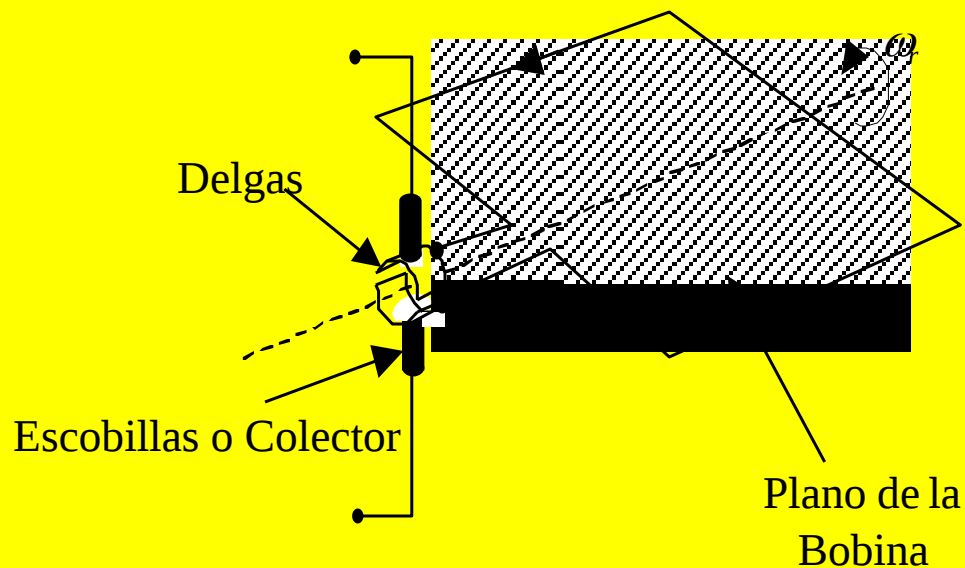
$$\varepsilon = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = B \omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$



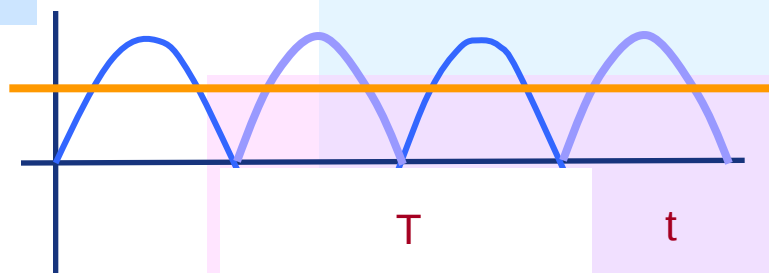
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$



Principio del generador de Corriente Continua



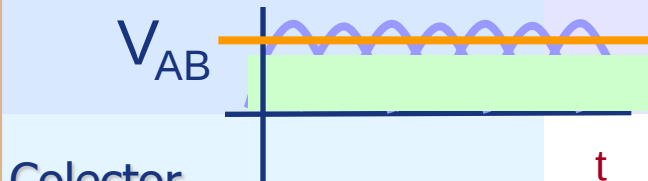
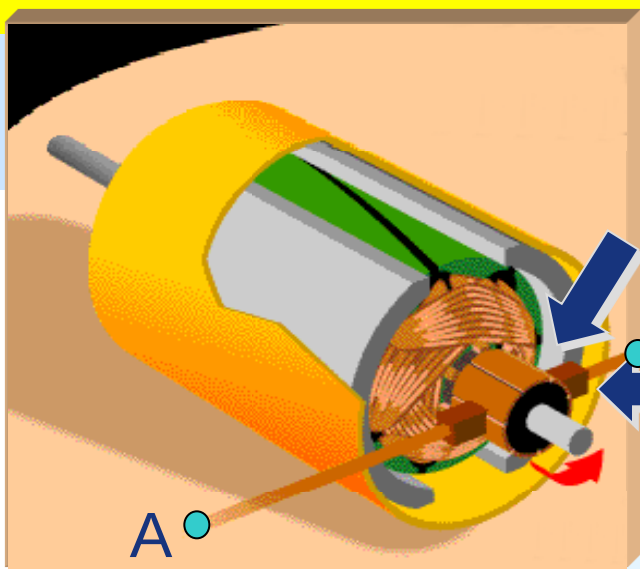
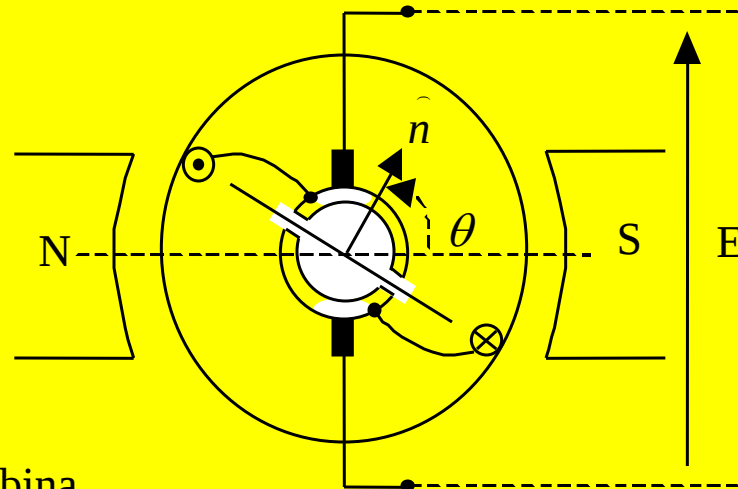
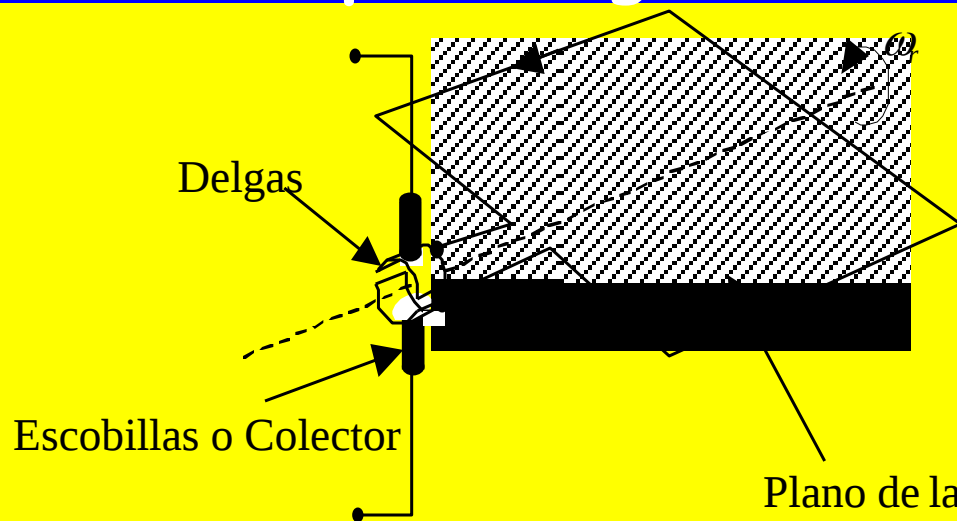
Valor
medio no
nulo



$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$



Principio del generador de Corriente Continua



Colector
B
Escobillas

Colector
real

