

- a) Calculamos primero el $\vec{E} = E(r)\hat{r} \Rightarrow$ coords. Esféricas
Dentro de la circunferencia, a una distancia r del origen ($r \in (0, R)$)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 \frac{r}{R} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0 R} \int_0^r r^3 dr = \frac{4\pi \rho_0 r^4}{4\epsilon_0 R}$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R}$$

Fuera de la esfera,

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi \rho_0 R^3}{4\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} \hat{r} & r \in (0, R) \\ \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r \in (R, \infty) \end{cases}$$

notese que el desplazamiento es perpendicular al $\vec{E}$ en el tramo curvo $\Rightarrow$ solo se calcula el trabajo en el trayecto rectilíneo

$$W_{AA'} = - \int_A^{A'} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{r=R}^{r=a} Q_0 \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d(r\hat{r}) - \int_{r=R}^{r=a} Q_0 \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} \hat{r} \cdot d(r\hat{r})$$

$$= -\frac{Q_0 \rho_0}{4\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_R^a \cdot R^3 + \frac{1}{R} \frac{r^3}{3} \Big|_R^a \right)$$

$$= -\frac{Q_0 \rho_0}{4\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{R} - R^2 + \frac{a^3}{3R} - \frac{R^2}{3} \right)$$

$$W_{AA'} = -\frac{Q_0 \rho_0}{4\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{R} - \frac{4R^2}{3} + \frac{a^3}{3R} \right) = W_{AB}$$

b) Por definición $V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{Q_0} = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{R} - \frac{4R^2}{3} + \frac{a^3}{3R} \right)$

c) Teorema de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow$ Como $4\pi R^2 > R \Rightarrow$ este flujo vale $\frac{\pi \rho_0 R^3 + Q}{\epsilon_0}$