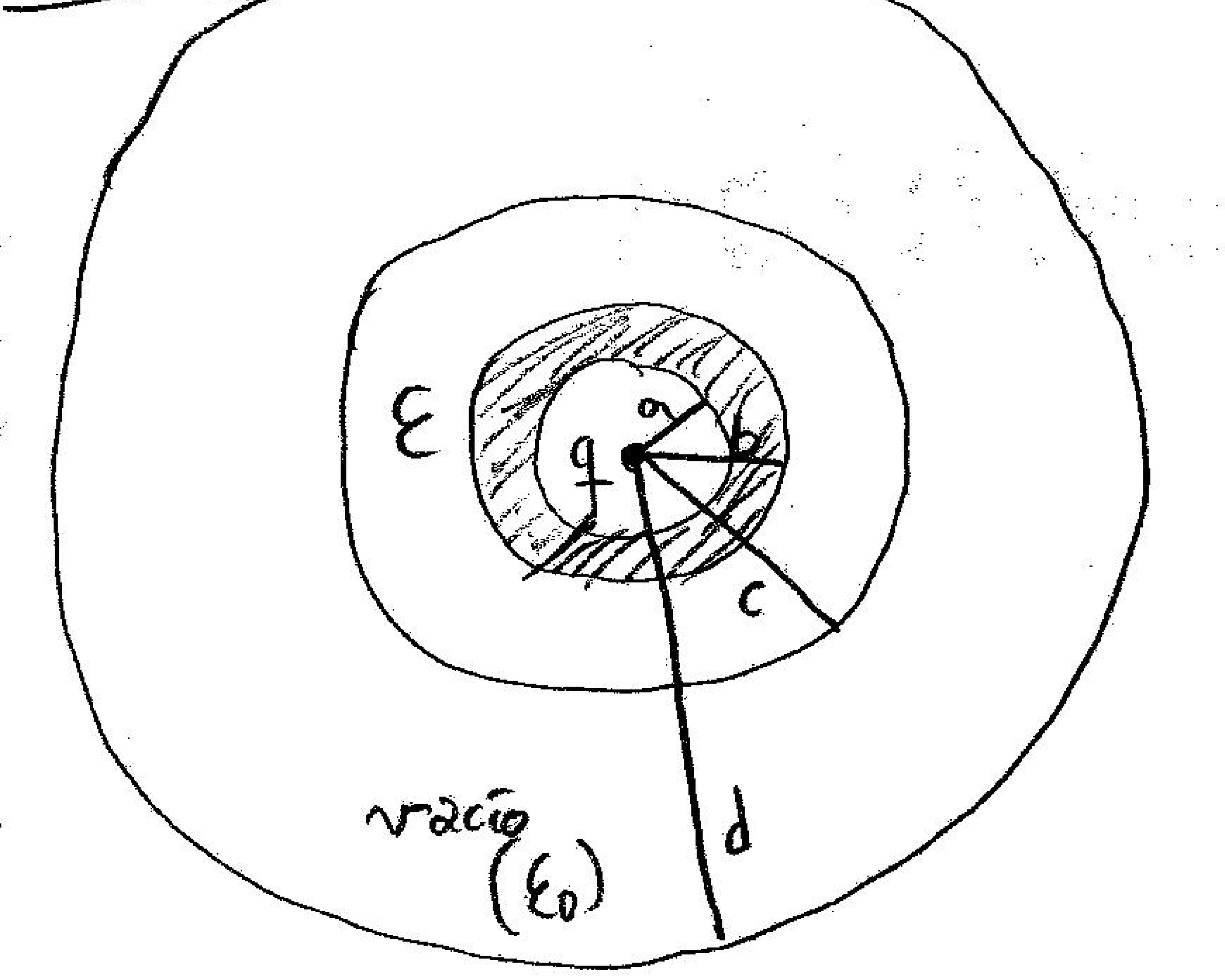
P3

FI2002 Pauta Examen



a) ¿ ρ_p , σ_p ? (2ptos)

b) Si se coloca Q en el conductor externo, ¿ Vconductor interior? (3ptos)

c) ¿Cambian los resultados si se mueve q? (1pto)

Sol: a) Gauss: $\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{Libre} = q$, por simetría, suponemos $\vec{D} = D(r)\hat{r}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r)\, r^2 \operatorname{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi r^2 D(r) = q \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Nota: $Q_{Libre} = q$, porque el conductor interno (y también el externo) está descargado inicialmente. La presencia de q, induce distribuciones superficiales de carga de forma que la carga neta del conductor sigue siendo nula.

En el dieléctrico: $\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$. $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{P} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \quad , \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cancel{r^2}(\varepsilon-\varepsilon_0)q}{4\pi\varepsilon \cancel{r^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_p = 0} \ . \ \sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \text{ , en este caso } \hat{n}_c = \hat{r},\ \hat{n}_b = -\hat{r} \Rightarrow \boxed{\sigma_{P_c} = \frac{q(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon c^2} \ , \ \sigma_{P_b} = \frac{q(\varepsilon_0-\varepsilon)}{4\pi\varepsilon b^2}}$$

(2ptos)

b) En el vacío: ($c<r<d$) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$. $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$. Para $r>d$: $\vec{E} = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ (por Gauss)

$$\Rightarrow V(b) = -\int_\infty^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \cancel{V_0}^{\,0} = -\int_c^b \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon r^2} - \int_d^c \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \int_\infty^d \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$\Rightarrow V(b) = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon b} - \frac{1}{\varepsilon c} + \frac{1}{\varepsilon_0 c} - \cancel{\frac{1}{\varepsilon_0 d}} + \cancel{\frac{1}{\varepsilon_0 d}}\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \boxed{\frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon b} + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} = V_{cond\ int}}$$

(3ptos)

Pues los conductores son equipotenciales.

c) No cambian porque como la esfera conductora es equipotencial, desde afuera se ve una esfera a potencial constante, simétrico. Por lo tanto el potencial y los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ producidos por la esfera tienen simetría esférica, con respecto al centro de la esfera, independientemente de la posición de la carga. (1pto)