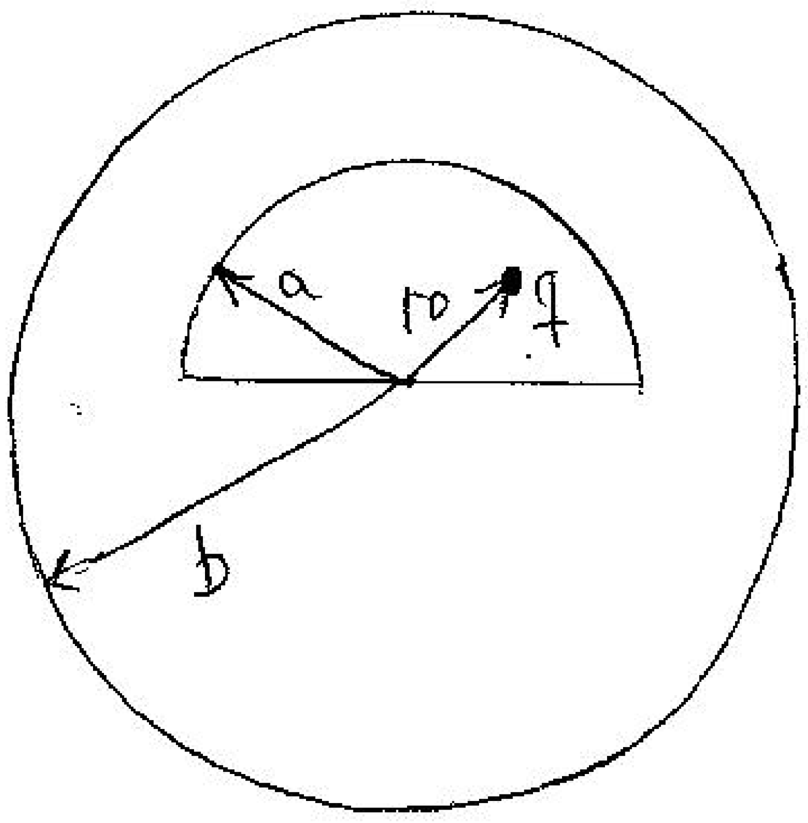
FI2002 Pauta Tarea 2

P2)



a) $V(r)$, $r \geq b$

b) $V(r)$, en la oquedad

Sol: a) La carga "q" producirá un potencial eléctrico al interior de la oquedad simétrico con respecto a la posición de la carga, por lo que se induce un potencial V_0 en la cara interna del conductor. Sin embargo, como los conductores poseen el mismo potencial en todas partes, desde afuera ($r>b$) se ve una esfera conductora con potencial "homogéneo" V_0. Por lo tanto el potencial eléctrico (y el campo eléctrico) producido por el conductor, posee simetría esférica con respecto al centro del conductor.

De esta forma aplicando Gauss con simetría esférica: $\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$

En este caso la carga encerrada sólo corresponde a "q" pues la carga neta del conductor es nula (estaba descargado inicialmente). $\Rightarrow Q_{enc} = q$.

Luego como hay simetría esférica: $\vec{D} = D(r)\cdot\hat{r}$

$$\Rightarrow q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r)\, r^2 \operatorname{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi r^2 D(r) \Rightarrow \vec{D(r)} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Calculamos el potencial: $V(r) = -\int_{ref}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} + V_{ref}$

Con ref $= \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot dr\,\hat{r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{r}$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad r \geq b}$$

3 ptos

- Argumento de la simetría $\rightarrow$ 0,5
- $Q_{enc} \rightarrow$ 0,5
- $\vec{E} \rightarrow 1$
- $V \rightarrow 1$

Pauta P2 T2

b) En este caso no hay simetría esférica. Procedemos descomponiendo el problema, por el principio de superposición podemos escribir el potencial como el generado por la carga "q" con las condiciones de borde para el conductor a potencial nulo, más el potencial del condutor, que corresponde a un término constante. Determinamos primero el potencial del conductor; como el conductor es equipotencial, podemos evaluar la expresión de $V(r)$ para $r>b$ y evaluarla en el borde $(r=b)$:

$$\boxed{V(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot b} = V_0}$$

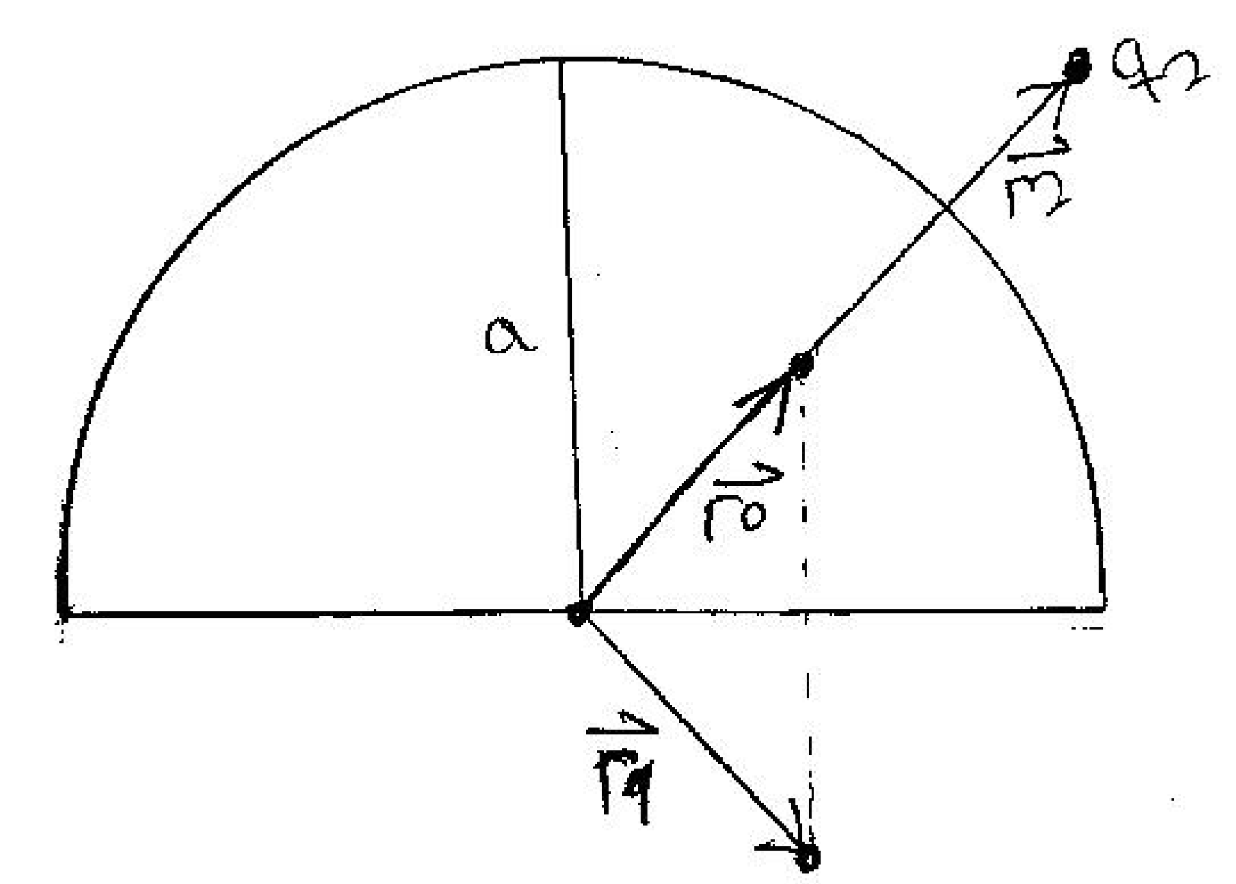
Ahora resolvemos el problema de la carga y el conductor a potencial nulo con el método de las cargas imágenes:

- El potencial producido por la carga "q" corresponde a: $V_q = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}-\vec{r_0}\|}$ donde $\boxed{\vec{r_0} = r_0 \cdot \hat{r} = x_0 \cdot \hat{\imath} + z_0 \hat{k}}$ (Notar que hay simetría en el plano X-Y, por lo que ignoramos la coordenada Y).

- Para anular el potencial en el plano ecuatorial (X-Y), ubicamos, tal como se vió en clases, una carga q_1 al otro lado de éste de manera simétrica. El valor de la carga (q_1) y su posición ($\vec{r_1}$) están dados por:

$$\boxed{q_1 = -q}\ , \quad \boxed{\vec{r_1} = x_0 \cdot \hat{\imath} - z_0 \hat{k}}$$

- Para anular el potencial en la superficie esférica, como también se vió en clases, ubicamos una carga q_2 en la posición $\vec{r_2}$ de manera simétrica:



Como se vio en clases (donde se hizo el proceso inverso):

- $q = -\dfrac{a}{r_2} \cdot q_2 \Rightarrow q_2 = -\dfrac{r_2}{a} \cdot q$

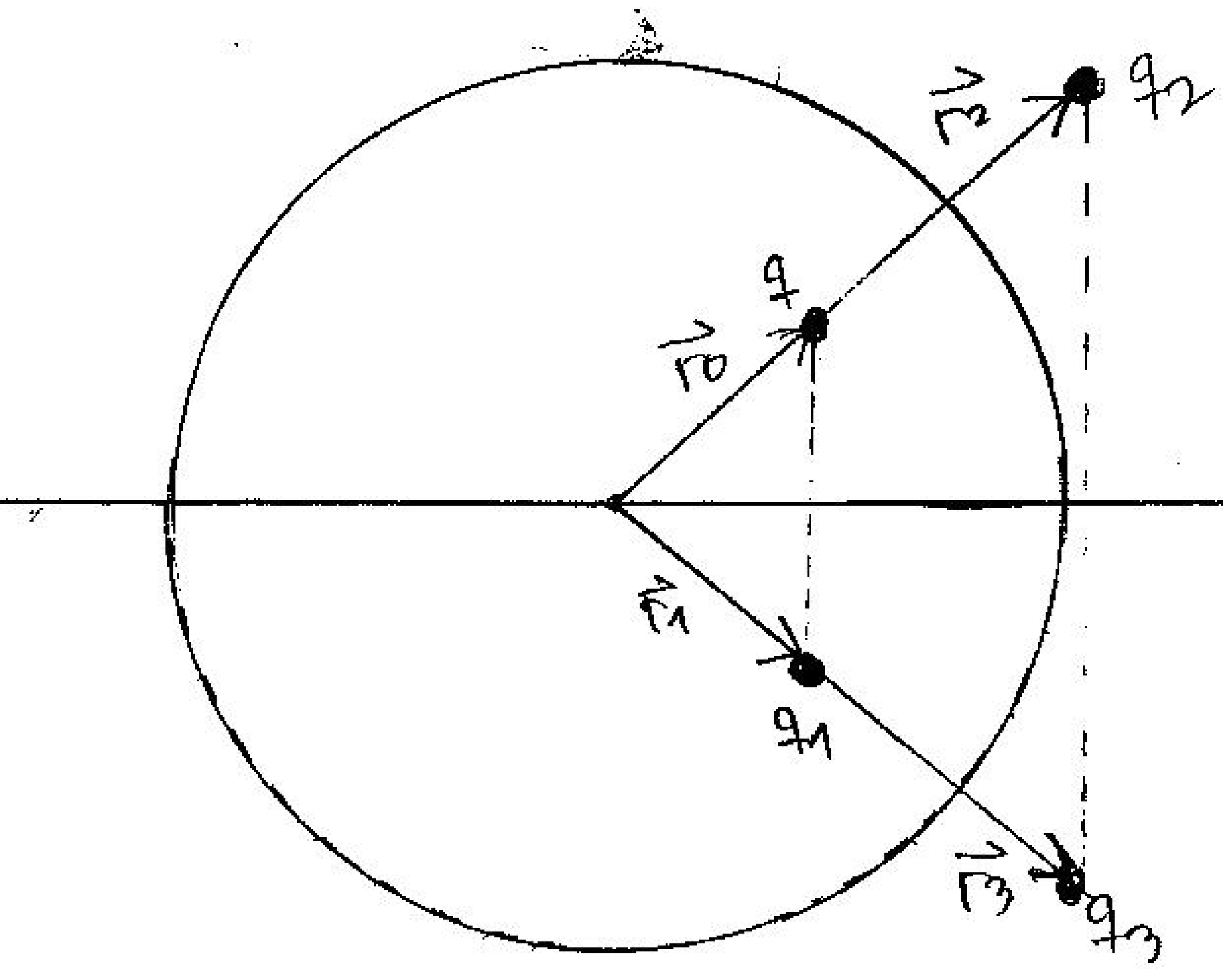
- $r_0 = \dfrac{a^2}{r_2} \Rightarrow r_2 = \dfrac{a^2}{r_0}$

Reemplazando r_2 en la expresión para q_2:

$$q_2 = -\frac{a^2}{r_0} \cdot \frac{q}{a} \Rightarrow \boxed{q_2 = -\frac{a}{r_0} \cdot q}$$

$$r_2 = \frac{a^2}{r_0} \Rightarrow \vec{r_2} = \frac{a^2}{r_0^2} \cdot \vec{r_0} \Rightarrow \boxed{\vec{r_2} = \frac{a^2}{r_0^2}(x_0 \hat{\imath} + z_0 \hat{k})}$$

Sin embargo, estas 3 cargas no cumplen las condiciones, porque q y q_1 cumplen la del plano, pero q_2 no lo hace, y a su ves, q y q_2 cumplen la de la esfera, pero q_1 no. Para arreglar esto agregamos una 3° carga q_3 simétrica a traves del plano a q_2, y simétrica a través de la esfera a q_1. De esta forma se cumple que el potencial es nulo en TODA la superficie esférica y en el plano. Pero el hecho que sea en toda la superficie es irrelevante para los propósitos del problema.



Al igual que antes:

- $q_3 = -q_2 \Rightarrow \boxed{q_3 = \frac{a}{r_0} \cdot q}$

- $\vec{r_3} = x_2 \hat{i} - z_2 \hat{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r_3} = \frac{a^2}{r_0^2}\left(x_0 \hat{i} - z_0 \hat{k}\right)}$$

$\therefore$ El potencial queda: $V(\vec{r}) = V_0 + \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}-\vec{r_i}\|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}-\vec{r_0}\|}$

$$\Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{V_0}{b} + \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r_0}\|} - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r_1}\|} - \frac{a/r_0}{\|\vec{r}-\vec{r_2}\|} + \frac{a/r_0}{\|\vec{r}-\vec{r_3}\|}\right] \quad \text{con } \vec{r_0} = x_0\hat{i} + z_0\hat{k},\ \vec{r_1} = x_0\hat{i} - z_0\hat{k},\ \vec{r_2} = \frac{a^2}{r_0^2}\cdot\vec{r_0},\ \vec{r_3} = \frac{a^2}{r_0^2}\cdot\vec{r_1}}$$

De esta forma "q_1" cancela a "q" y q_3 cancela a "q_2" en el plano, mientras que para la esfera, q_2 cancela a q y q_3 cancela a q_1

(3 ptos)

- V_0 en cara interna $\rightarrow$ 0,5 ptos
- $q_1 \rightarrow$ 0,5
- $q_2 \rightarrow$ 0,5
- $q_3 \rightarrow$ 1
- Sumar $V_0 \rightarrow$ 0,5

Pauta P2T2