



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 20

Magnetostática IV

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

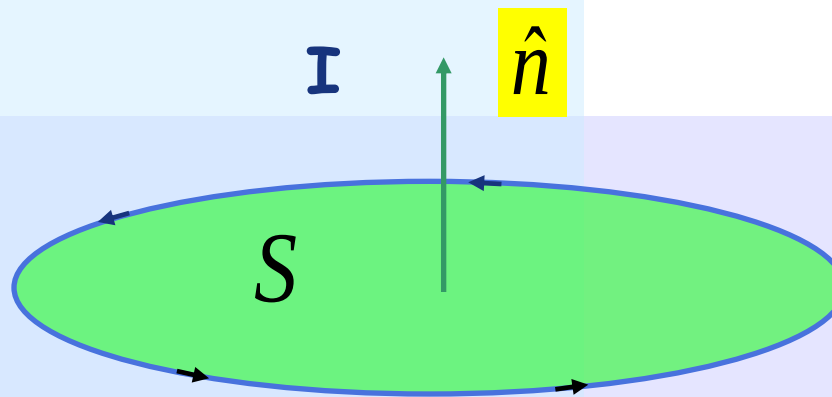
- Dipolo magnético
- Torque de campo magnético sobre dipolo
- Energía potencial del dipolo
- Campo magnético de dipolo
- Modelo atómico de los materiales
- Energía de dipolo en presencia de campo magnético

Salvador Dali, "La Persistencia de la Memoria", 1931





Dipolo Magnético

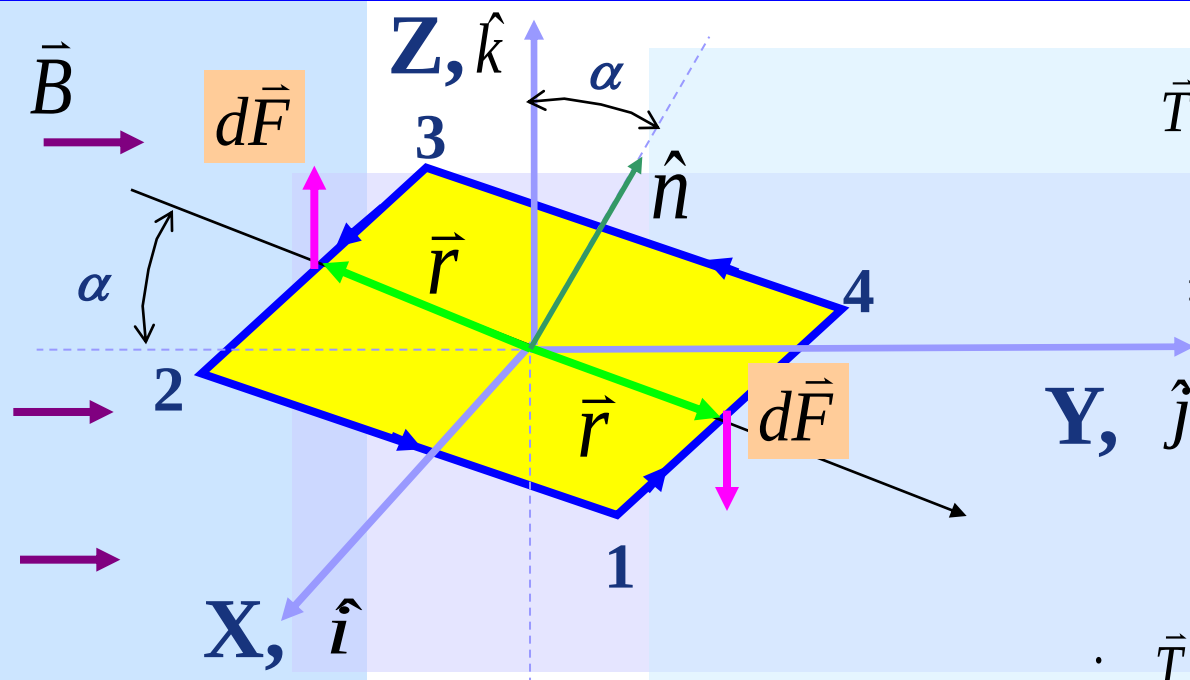


**Definición Dipolo
magnético**

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



Torque Magnético



$$\vec{T} = I \int_2^3 \vec{r} \times d\vec{x} \hat{i} \times \vec{B} + I \int_4^1 \vec{r} \times d\vec{x} \hat{i} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{IBwl}{2} \cos \alpha \hat{i} + \frac{IBwl}{2} \cos \alpha \hat{i}$$

Torque neto sobre el circuito

$$\therefore \vec{T} = IBwl \cos \alpha \hat{i} = AIB \cos \alpha \hat{i}$$

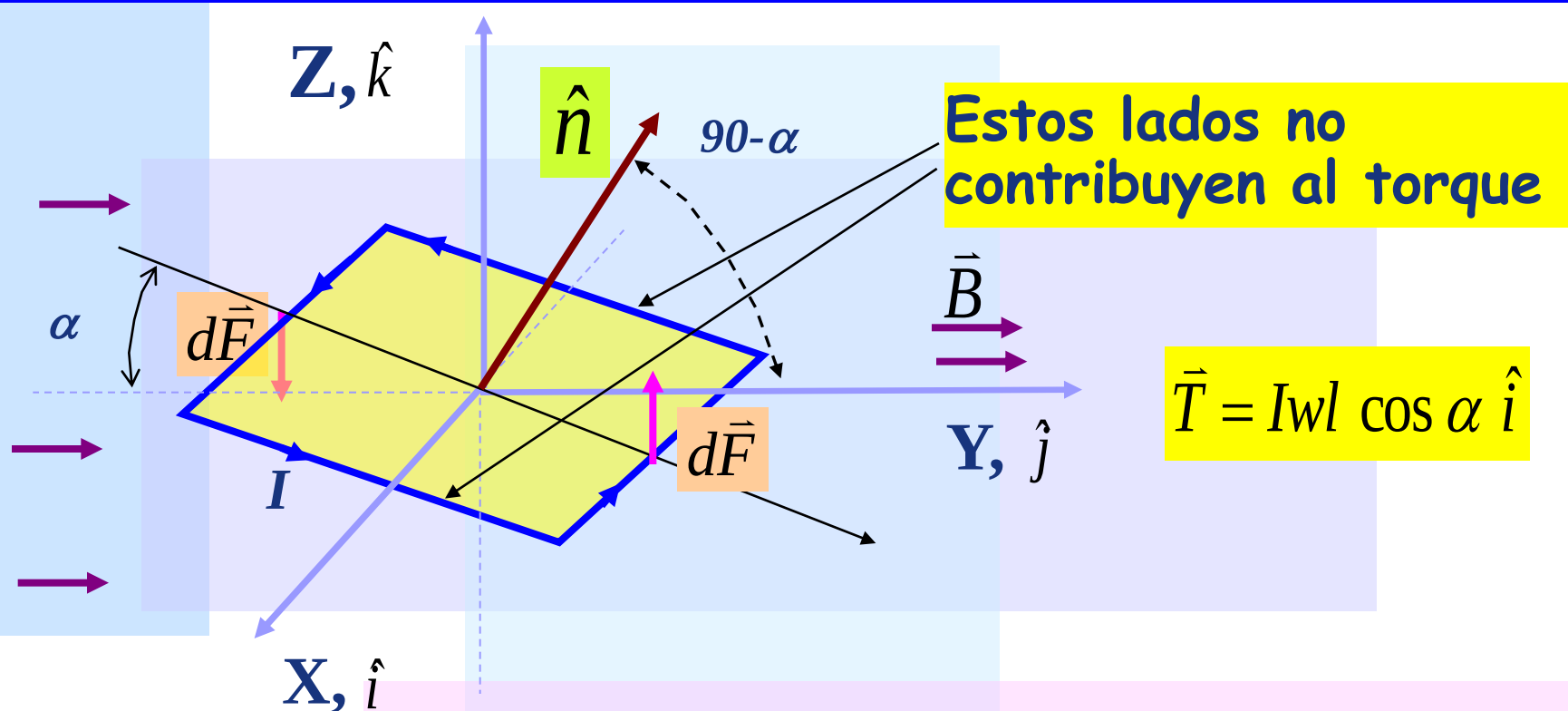
$$Area = A = wl$$

$$\vec{T} = IA \|\hat{n}\| \bullet \|\vec{B}\| \sin(90 - \alpha) \Rightarrow \vec{T} = IA \hat{n} \times \vec{B}$$

Notar que el torque se puede escribir como



Torque de campo sobre circuito rectangular

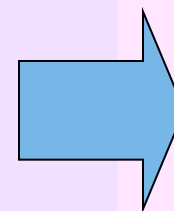


Torque

$$\vec{T} = IA \hat{n} \times \vec{B}$$

Dipolo magnético

$$\vec{m} = IA \hat{n}$$



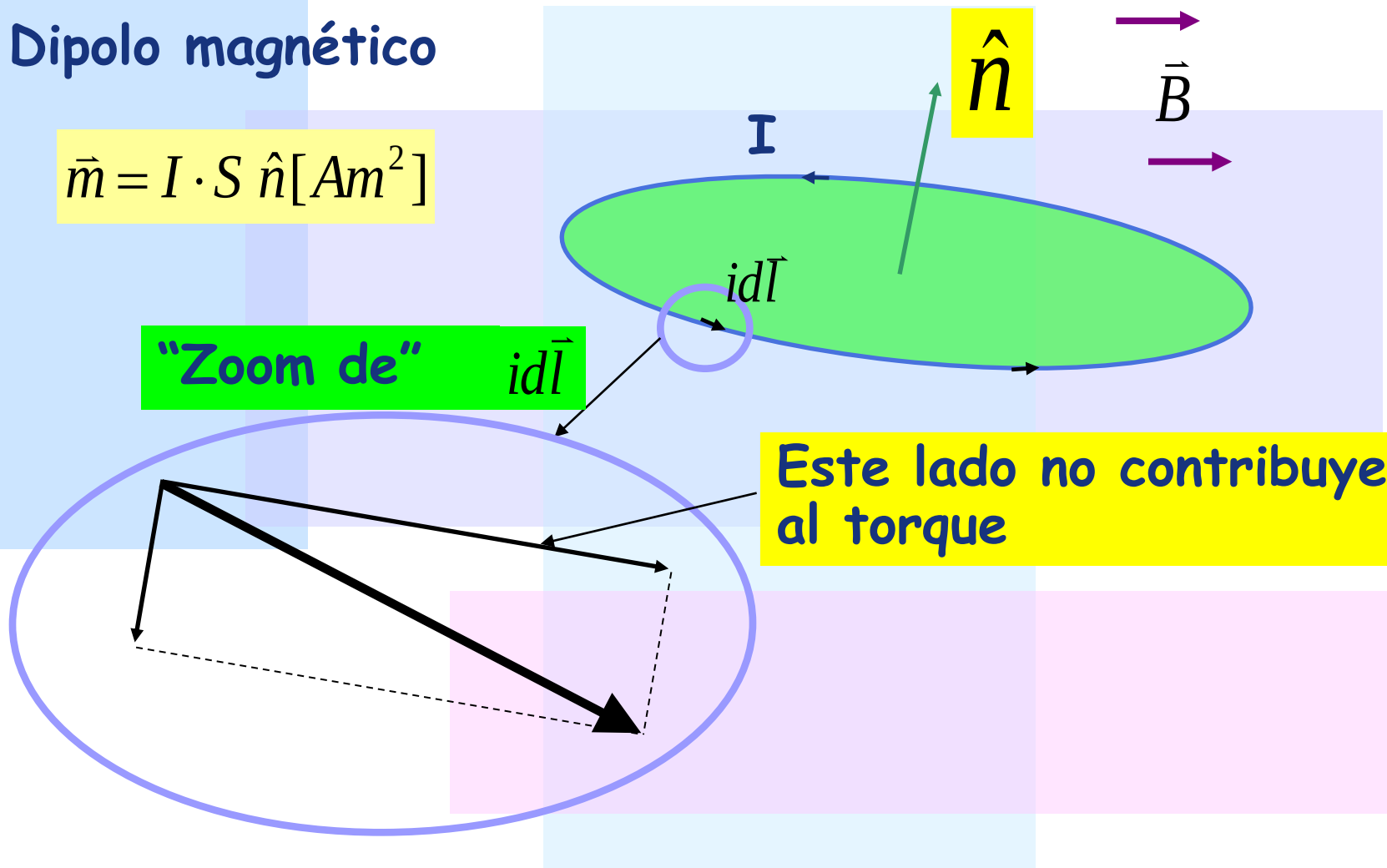
$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$



Torque de campo sobre dipolo

Dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



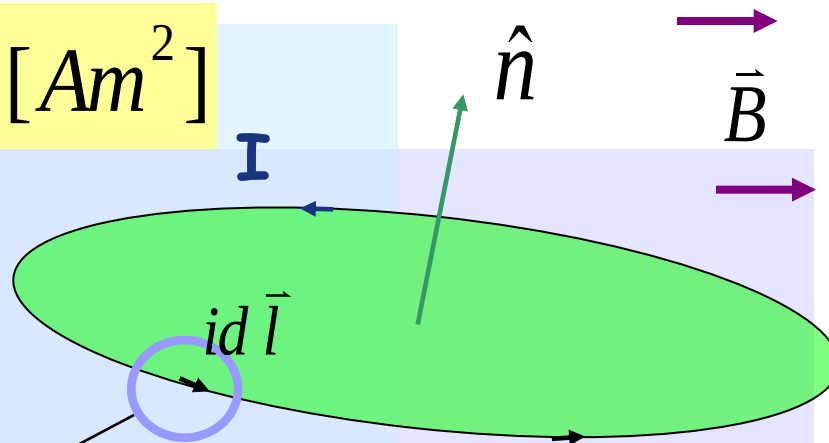


Torque de campo sobre dipolo

Dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$

"Zoom de" $id\vec{l}$



Este lado no contribuye al torque

Luego torque se puede expresar como $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$



Energía potencial de un dipolo

Trabajo del campo externo

$$dW = -Td\theta$$

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$dW = -mB \sin \theta d\theta$$

Este trabajo debe ser igual al cambio de energía potencial del dipolo

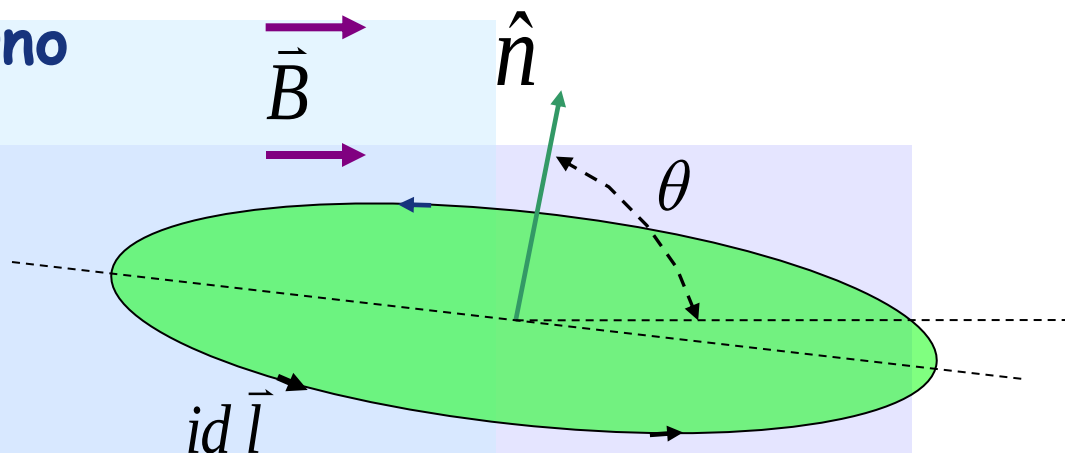
$$dU = -dW = mB \sin \theta d\theta \quad \text{Integrando} \quad \Rightarrow U = -mB \cos \theta + U_0$$

Tomando como referencia de energía $U = 0$ para $\theta = 90^\circ$

$$\Rightarrow U = -mB \cos \theta$$

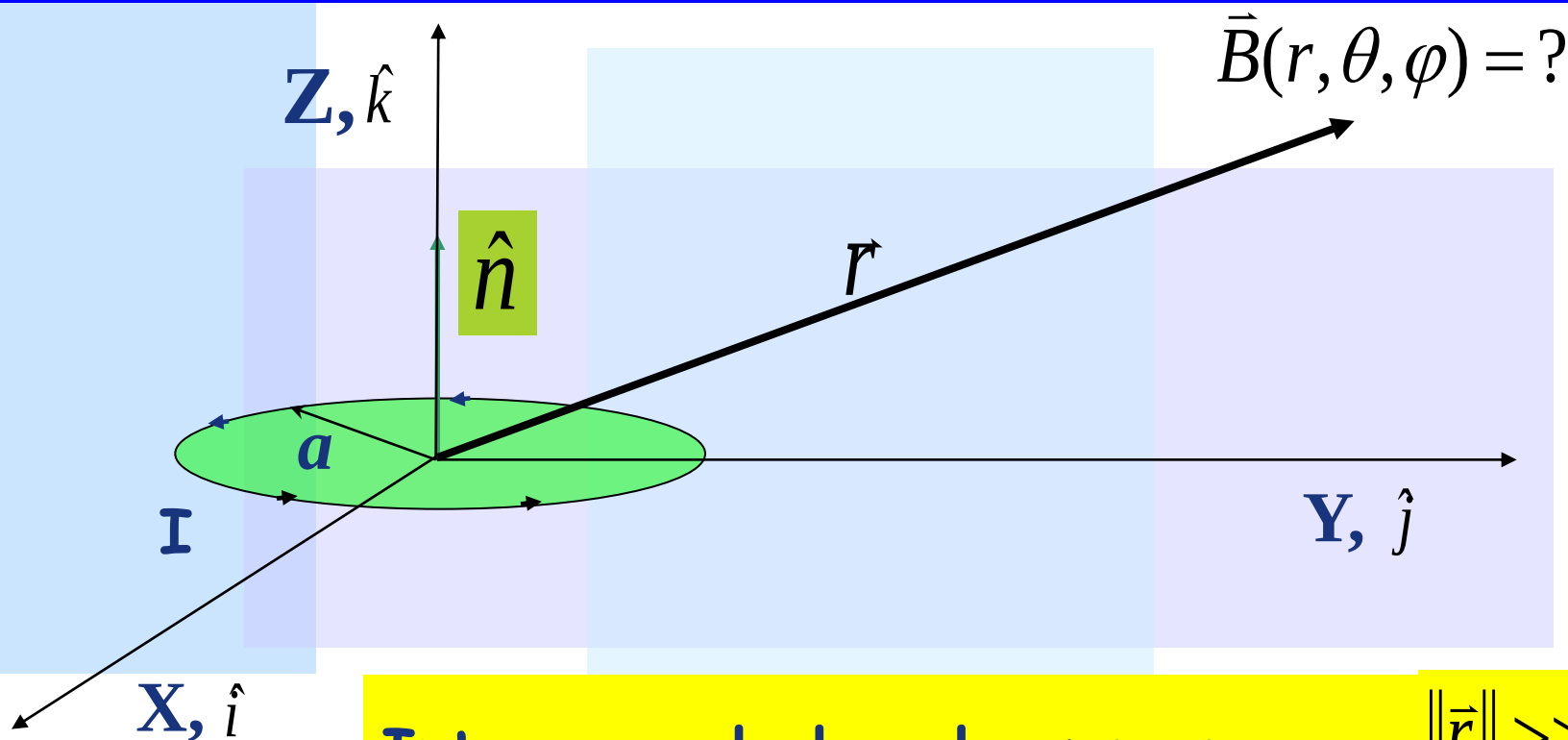
Es decir

$$\Rightarrow U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$





Campo magnético de un dipolo



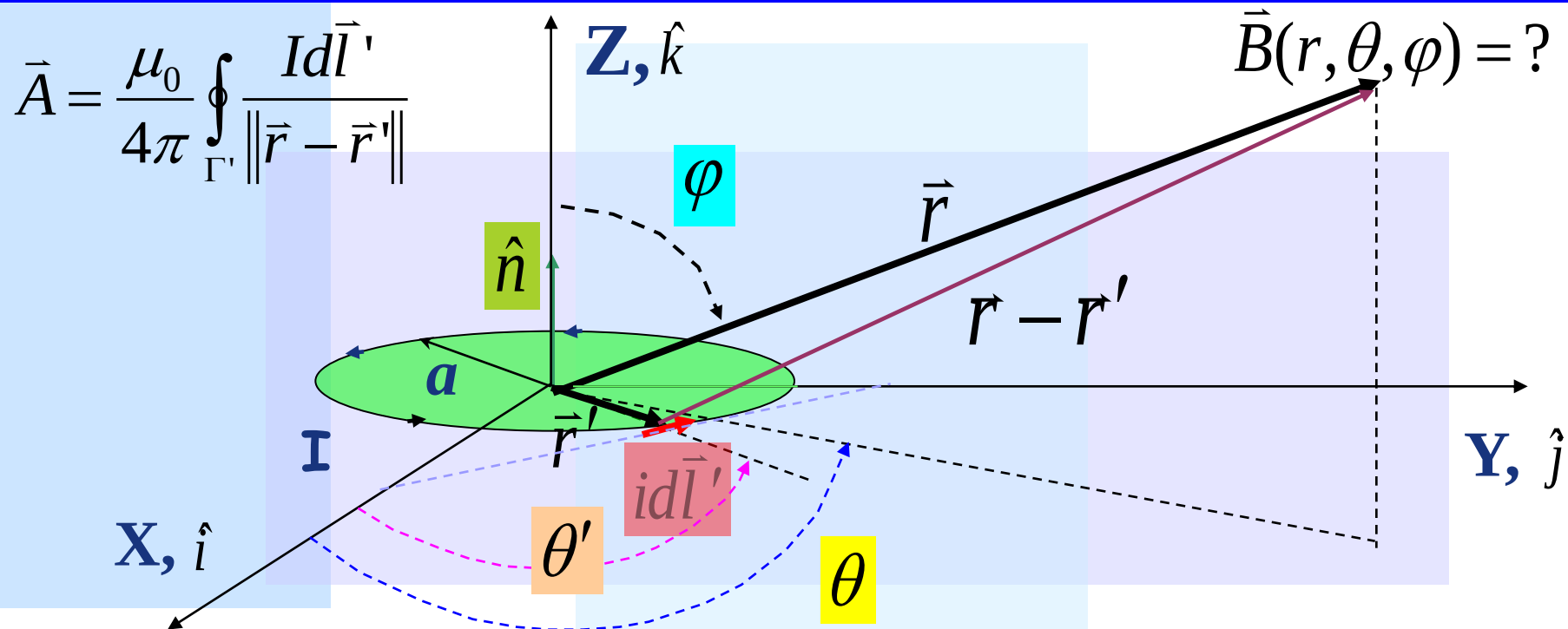
Interesa calcular el campo para $\|\vec{r}\| \gg a$

Usaremos el potencial magnético vector

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Campo magnético de un dipolo



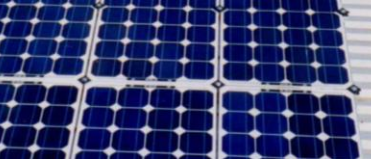
$$id \vec{l}' = Iad \theta' \hat{\theta} = Iad \theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j}$$

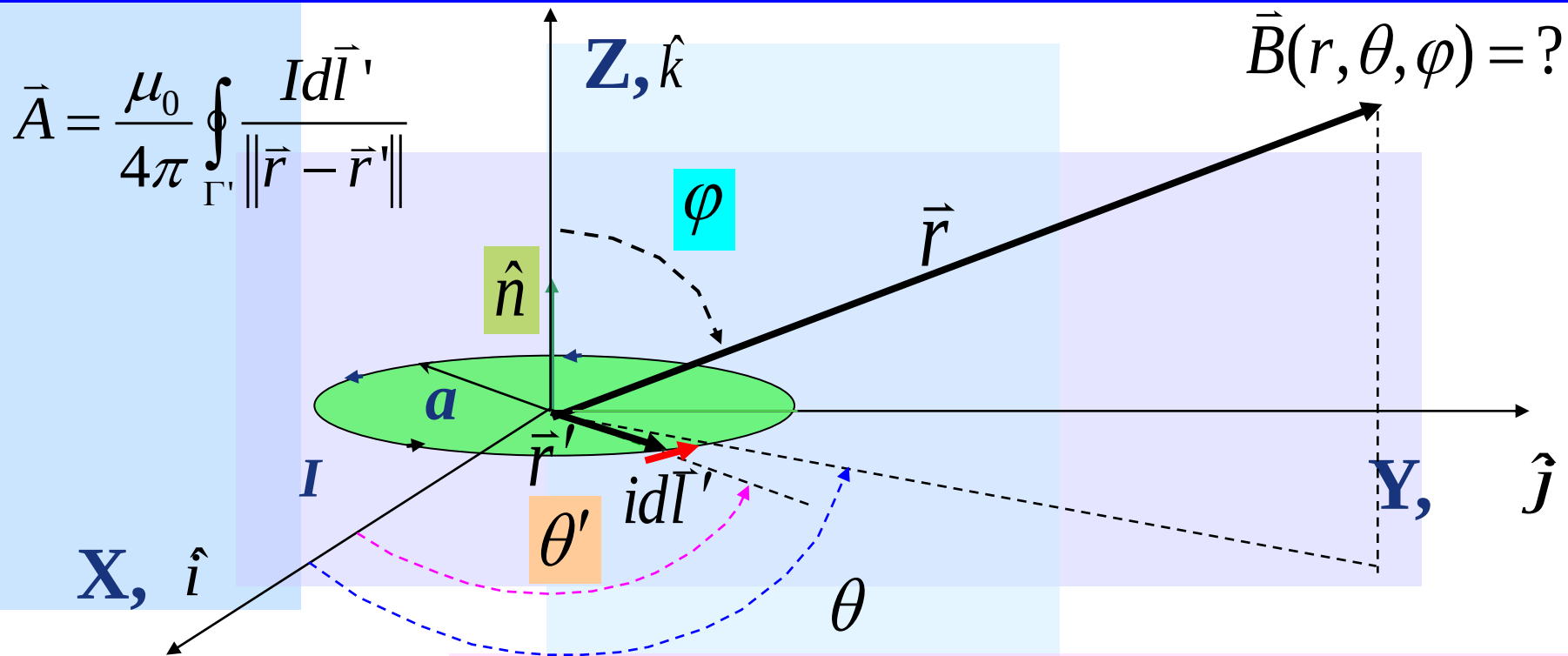
$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + TOS$$

$$\|\vec{r}\| \gg a \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \approx \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3}$$



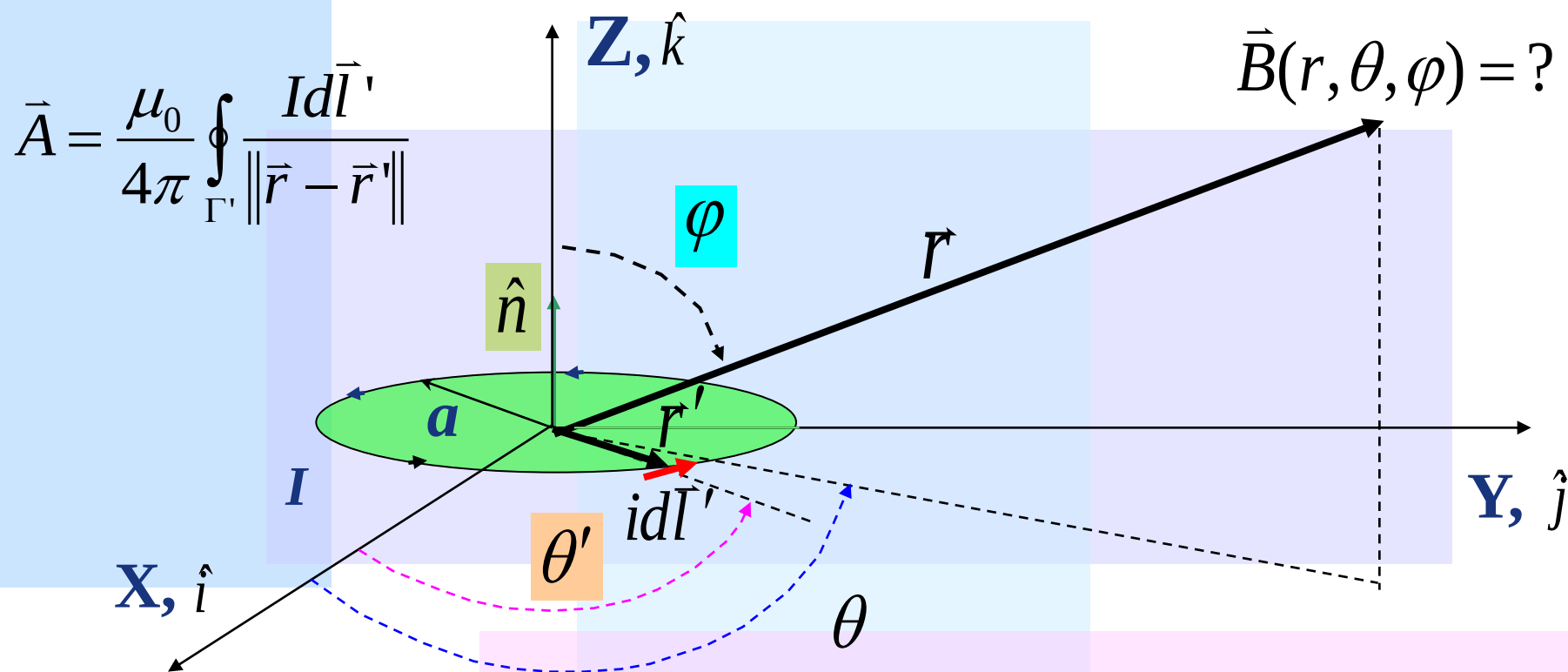
Campo magnético de un dipolo



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} \right) I a d\theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

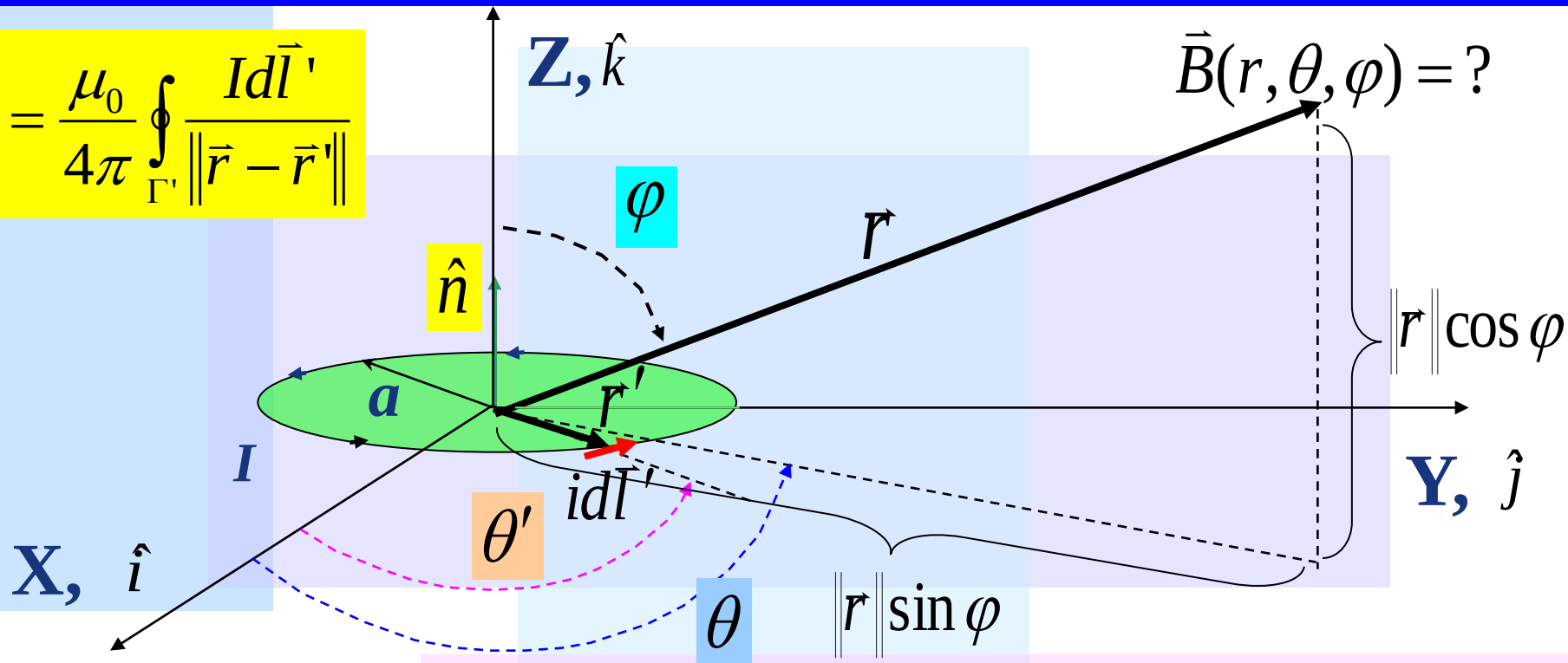


$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \bullet r'}{\|\vec{r}\|^3} I a d\theta' (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



$$\vec{r}' = a \cos \theta' \hat{i} + a \sin \theta' \hat{j}$$

$$\vec{r} = r \sin \varphi \cos \theta \hat{i} + r \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + r \cos \varphi \hat{k}$$

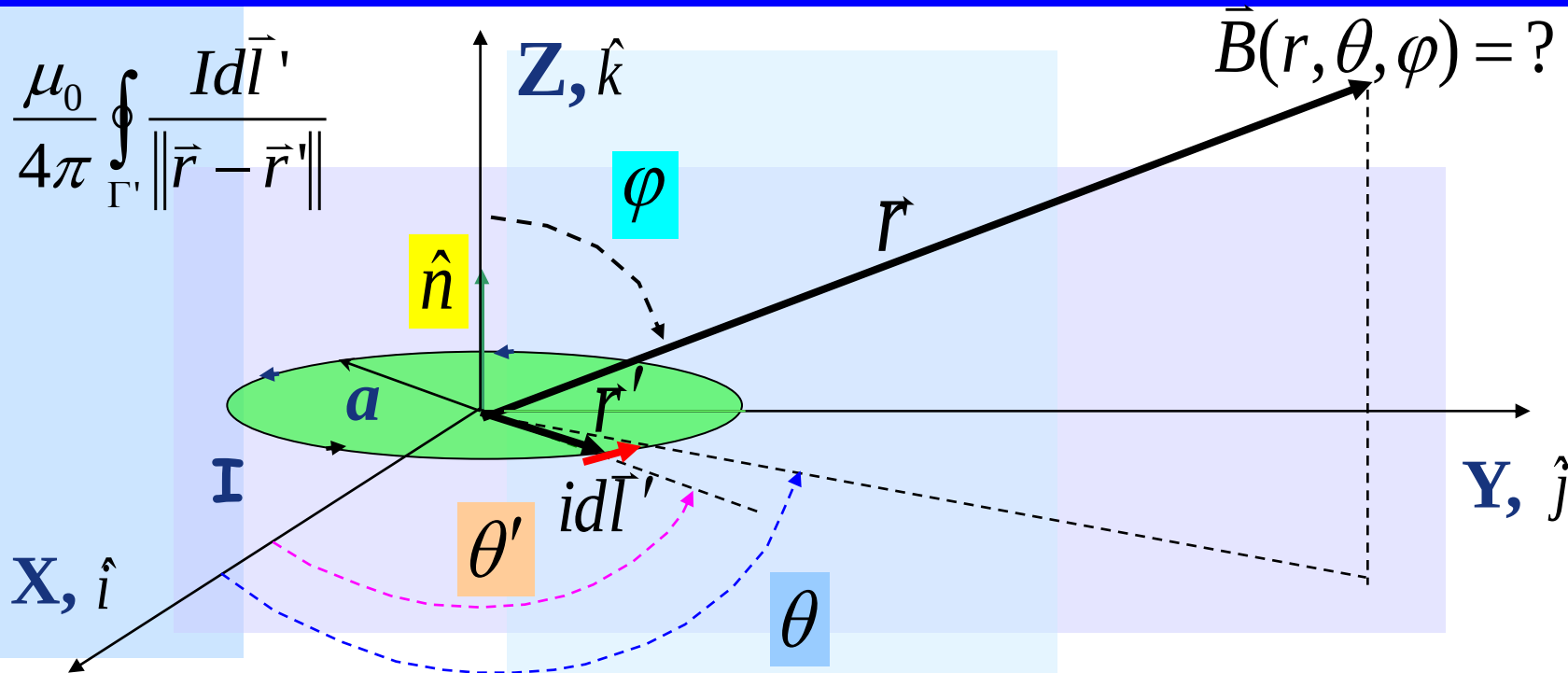
$$\Rightarrow \vec{r} \bullet \vec{r}' = r a \sin \varphi \cos \theta \cos \theta' + r a \sin \varphi \sin \theta \sin \theta'$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$

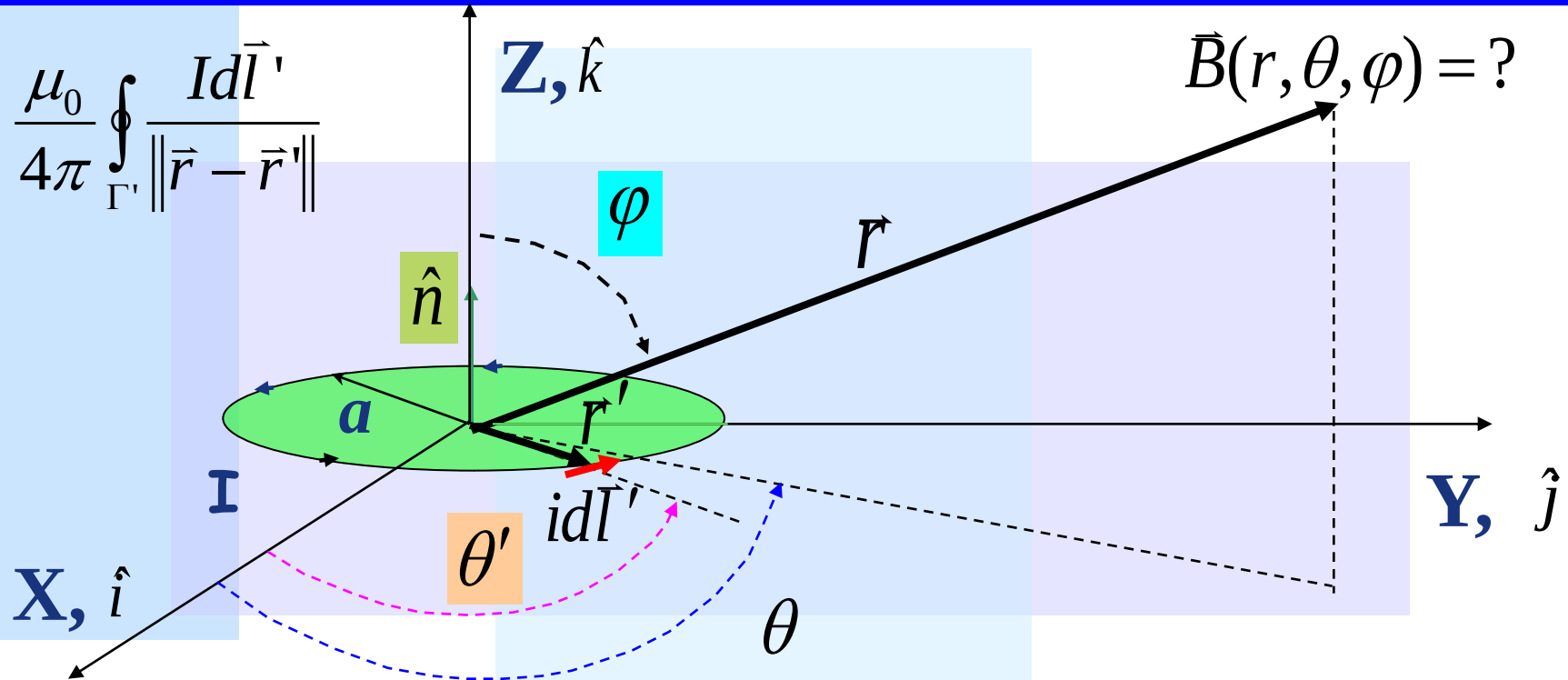


$$\vec{A} = \frac{Ira^2 \sin \varphi \mu_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

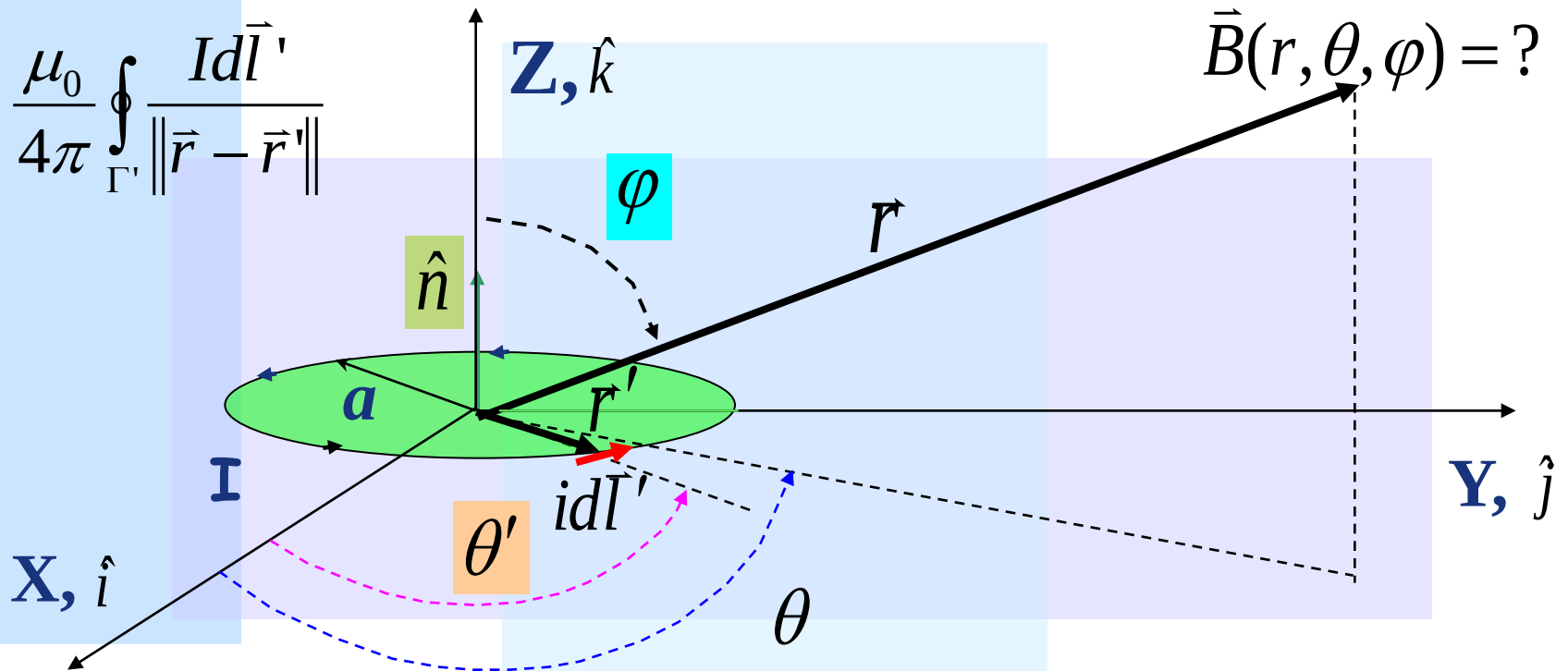


$$\vec{A} = \frac{Ira^2 \sin \varphi \mu_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') (-\sin \theta' \hat{i} + \cos \theta' \hat{j})$$



Campo magnético de un dipolo

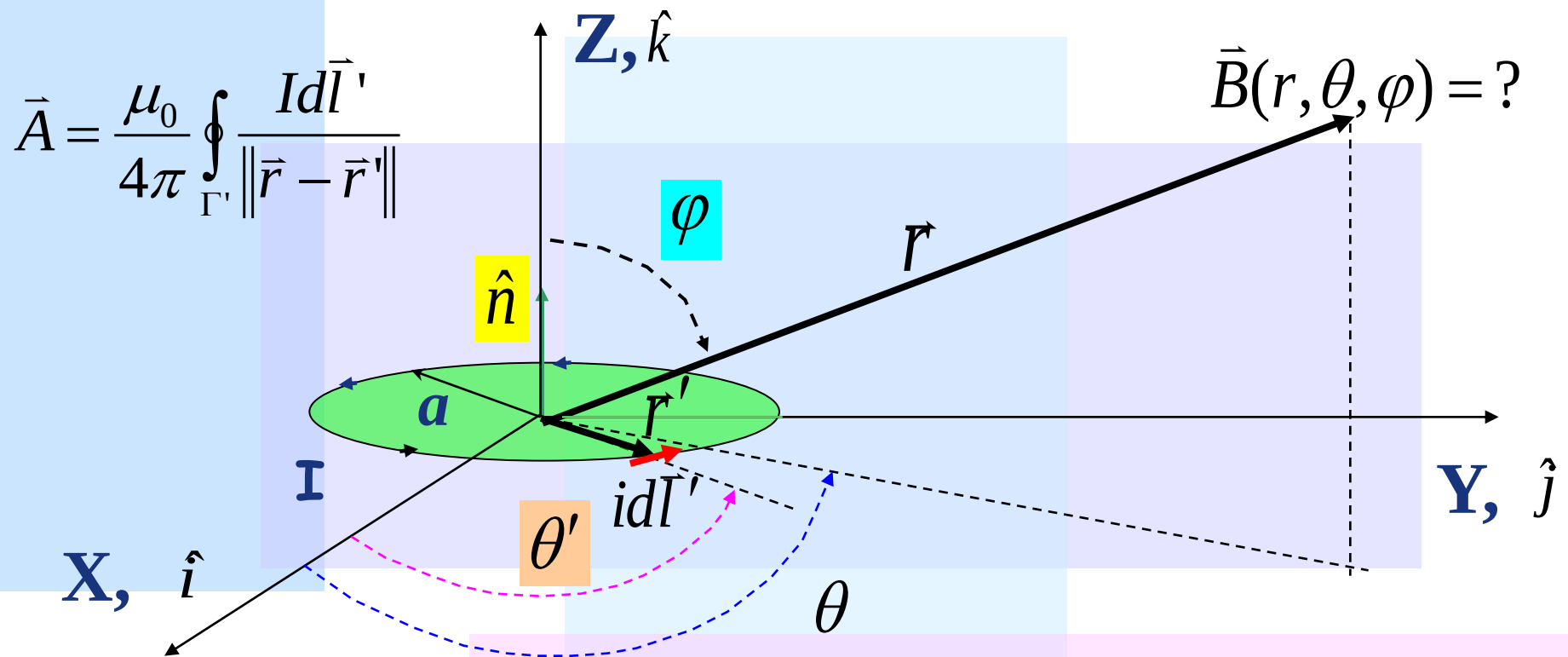
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \cos \theta'^2 \hat{j} - \sin \theta \sin \theta'^2 \hat{i}) d\theta'$$



Campo magnético de un dipolo



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta'^2 d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta'}{2} d\theta' = \pi$$

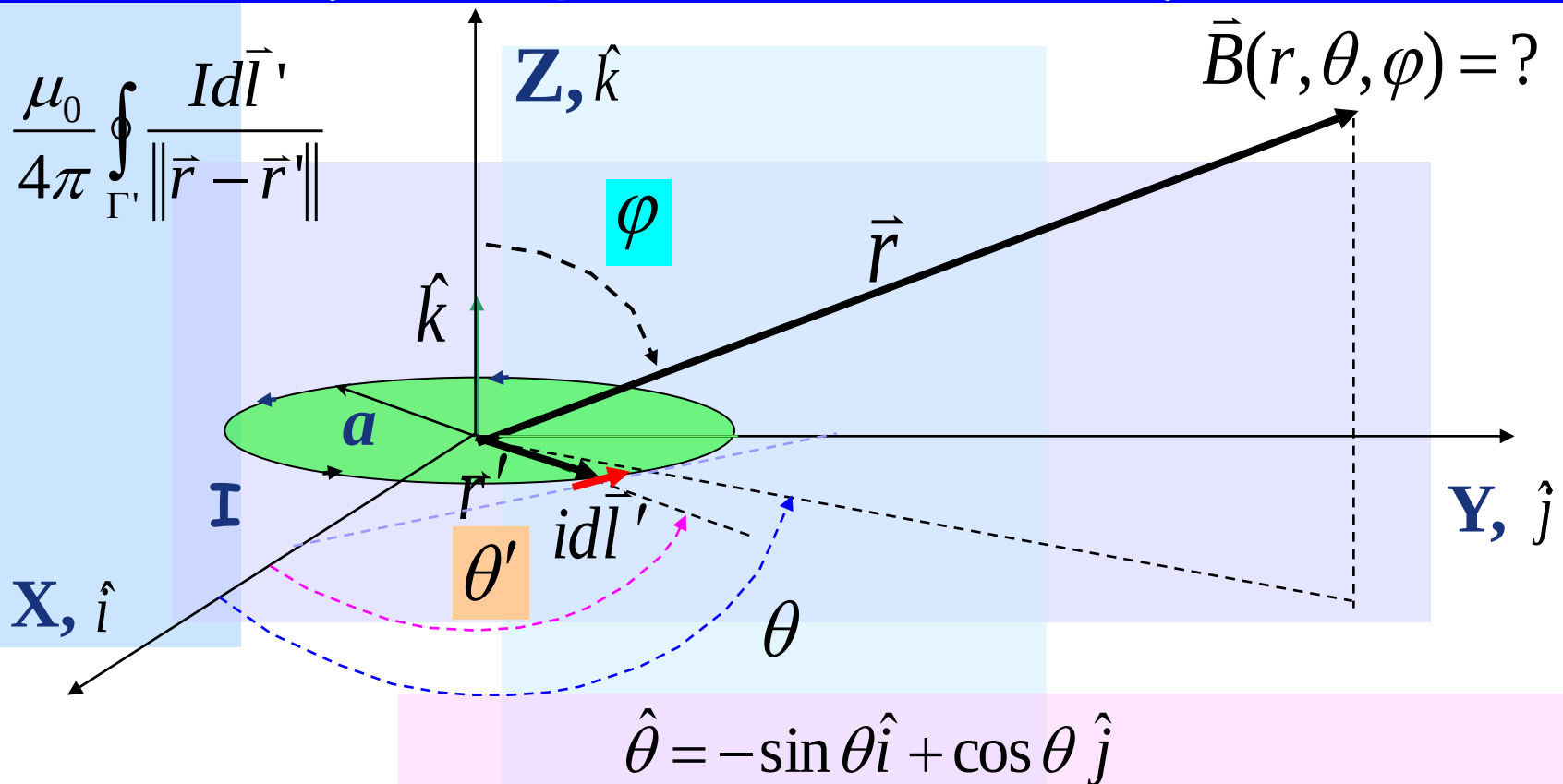
$$\int_0^{2\pi} \sin \theta'^2 d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta'}{2} d\theta' = \pi$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i})$$

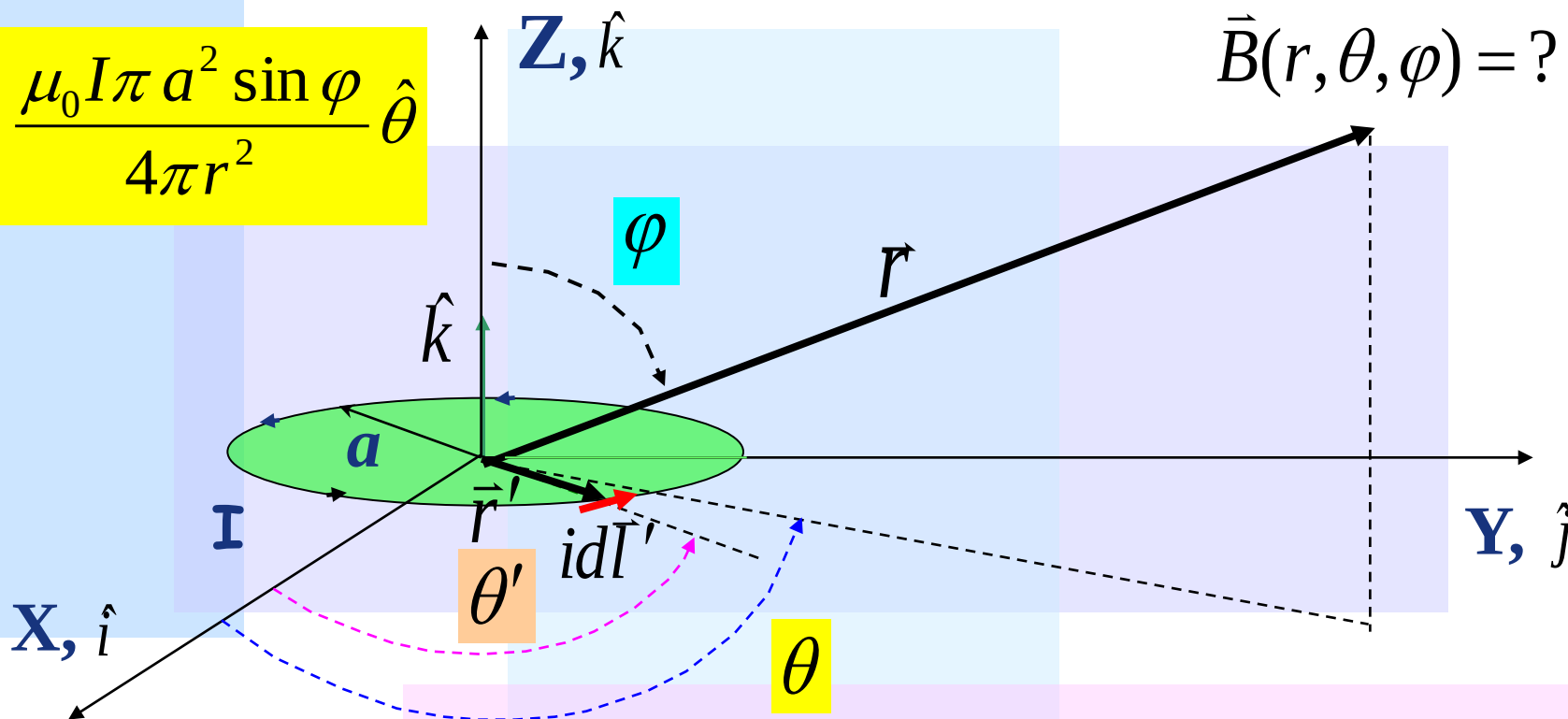
$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$



Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \varphi}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



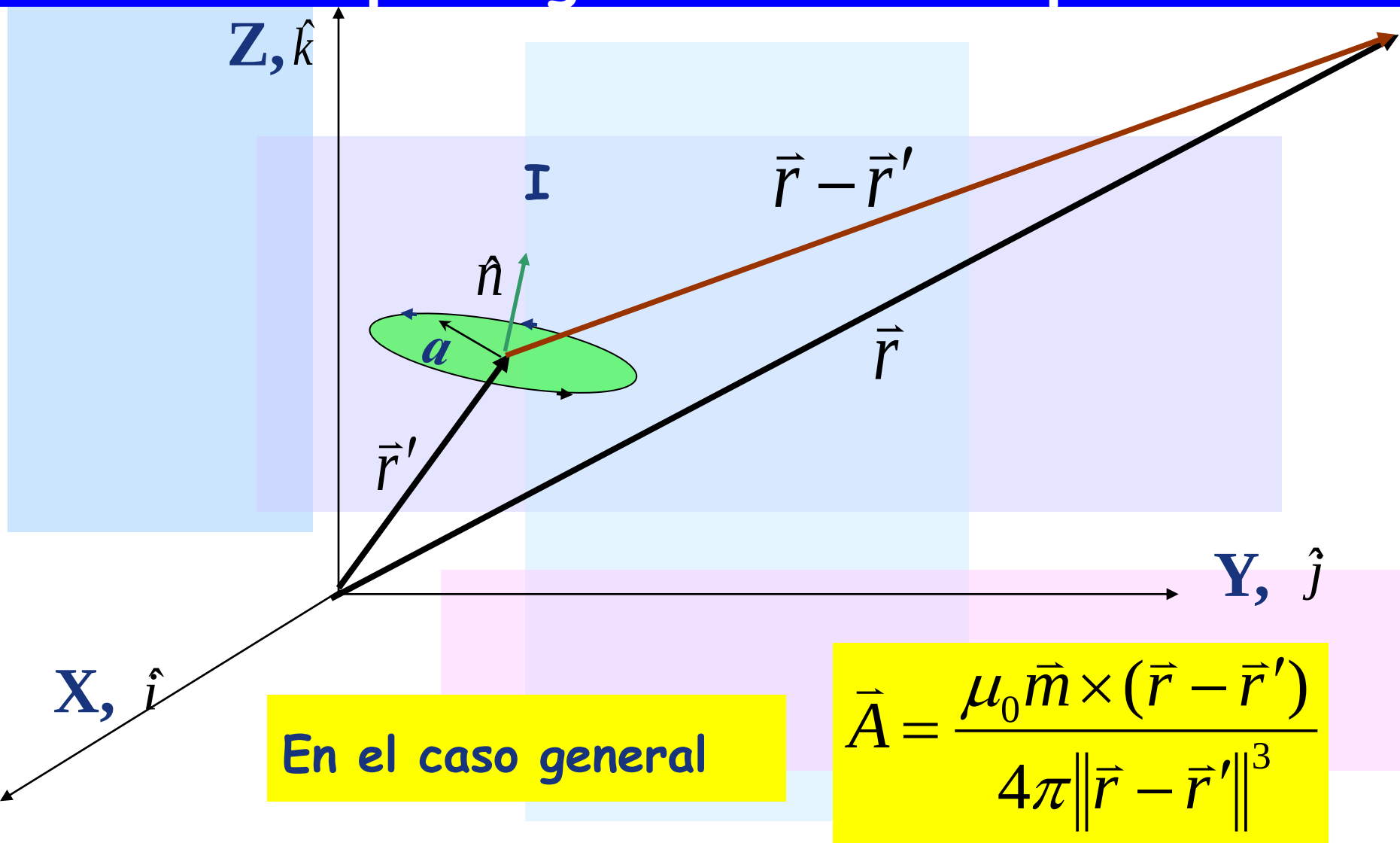
pero

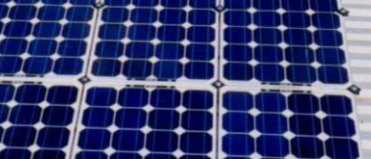
$$\vec{m} = IS \hat{n} = I\pi a^2 \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$



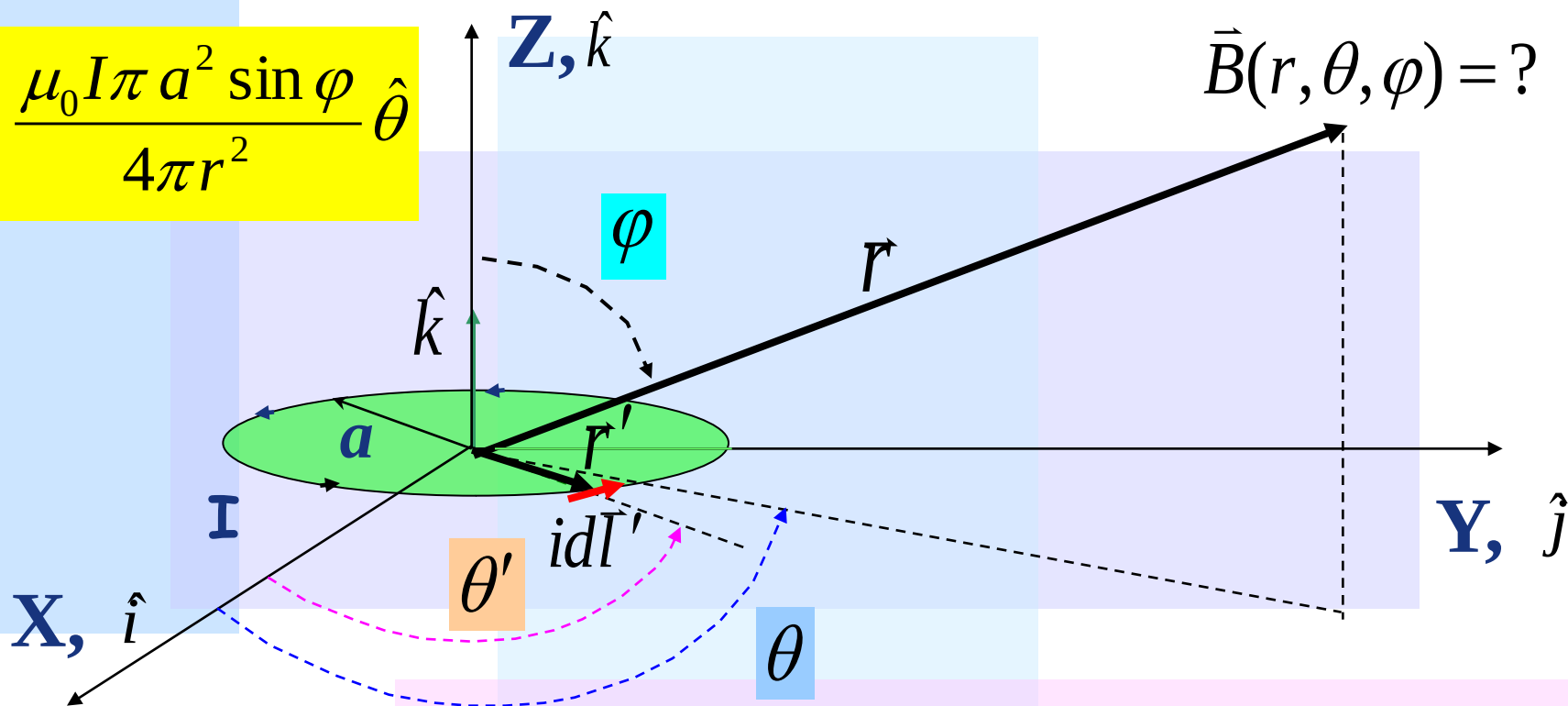
Campo magnético de un dipolo





Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \phi}{4\pi r^2} \hat{\theta}$$



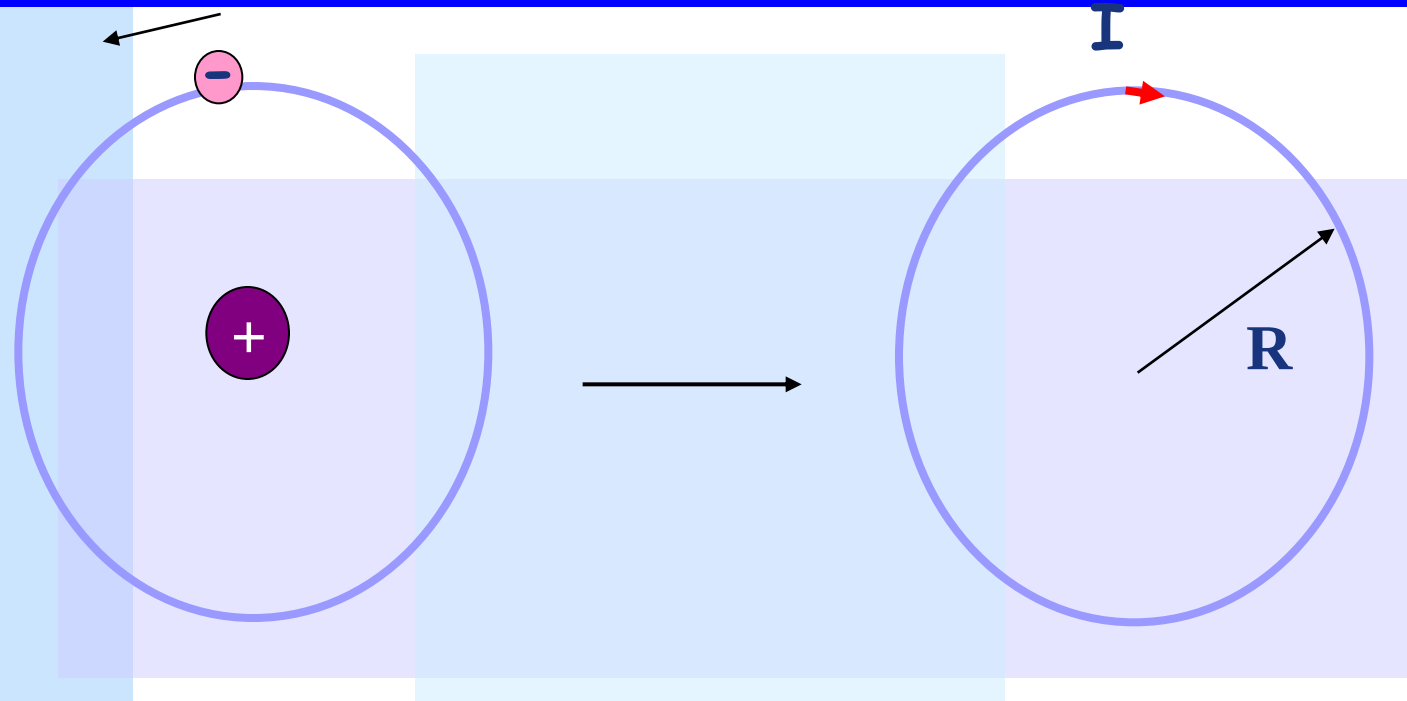
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\phi})$$



Modelo atómico de los materiales

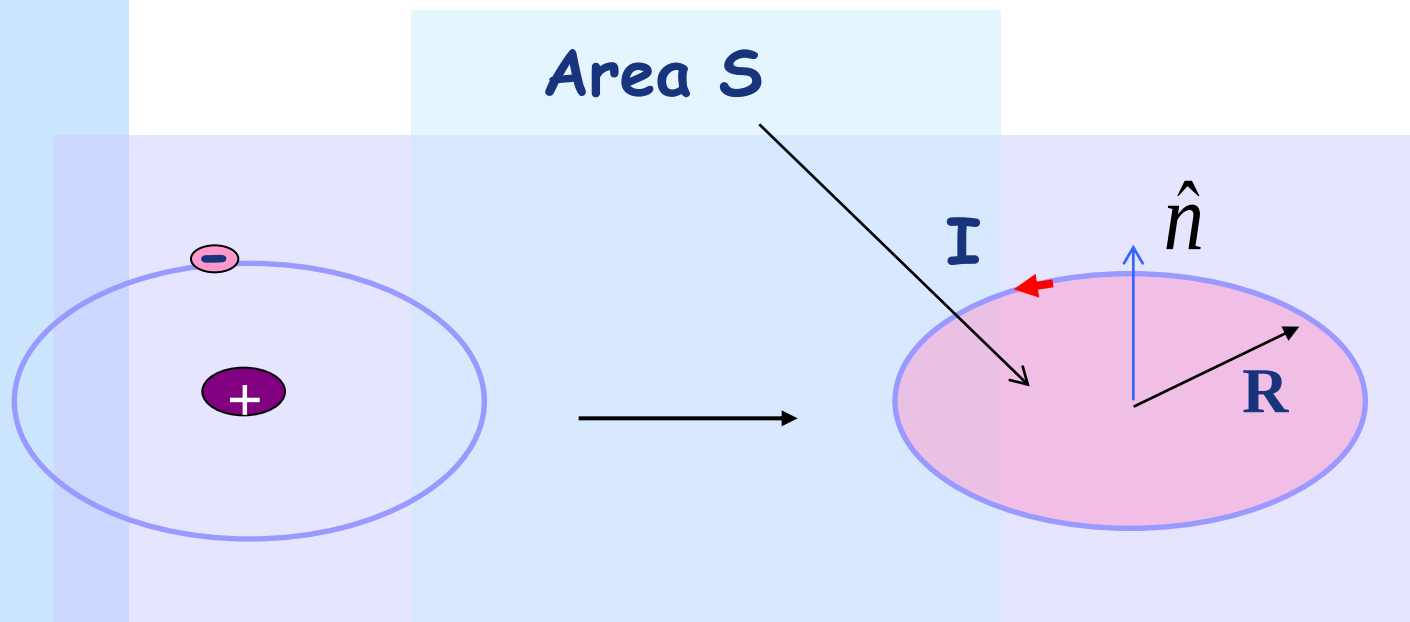


Movimiento de electrones se puede modelar como una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{qu}{2\pi R}$$



Modelo atómico de los materiales



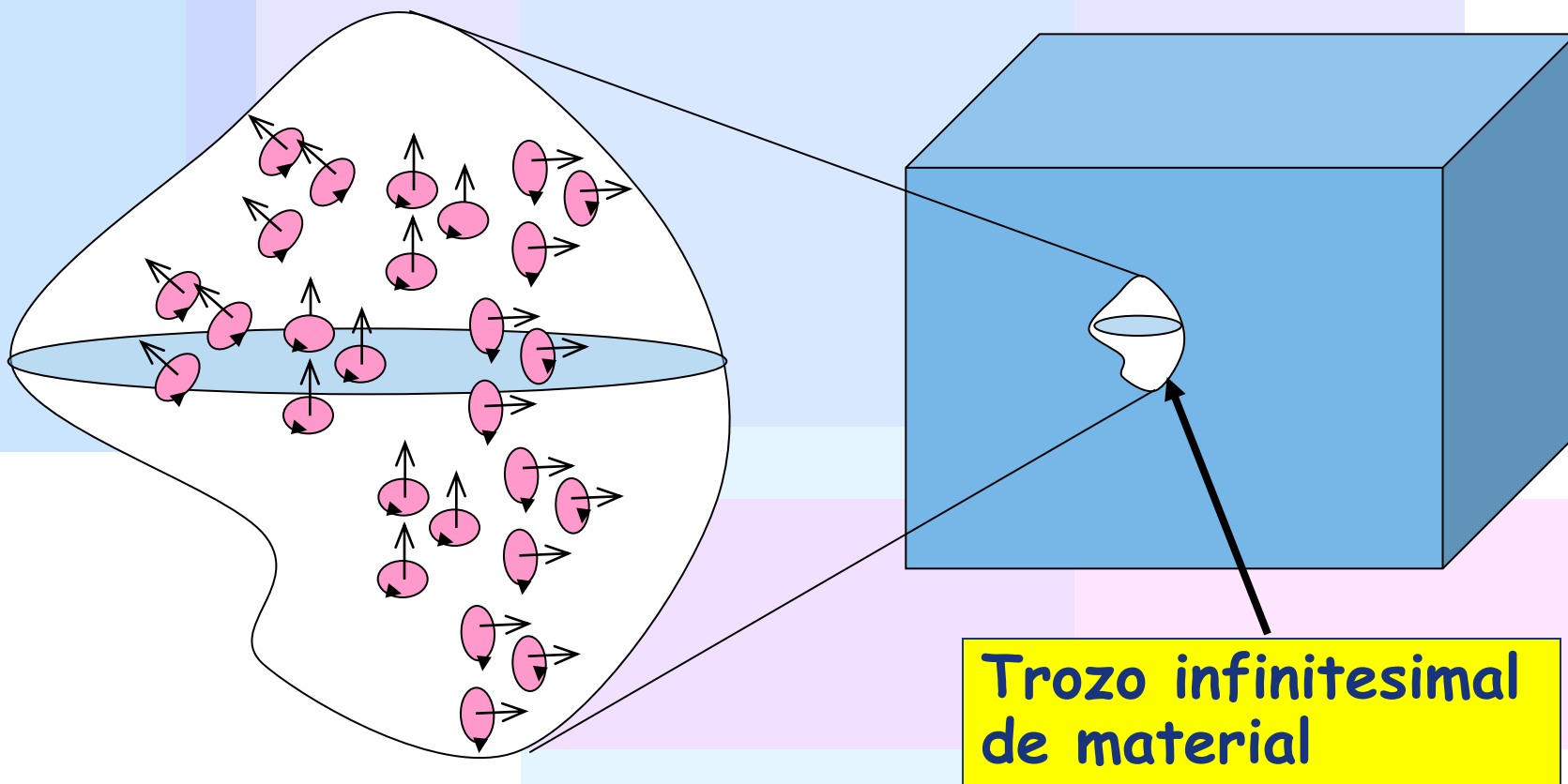
Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



Modelo atómico de los materiales

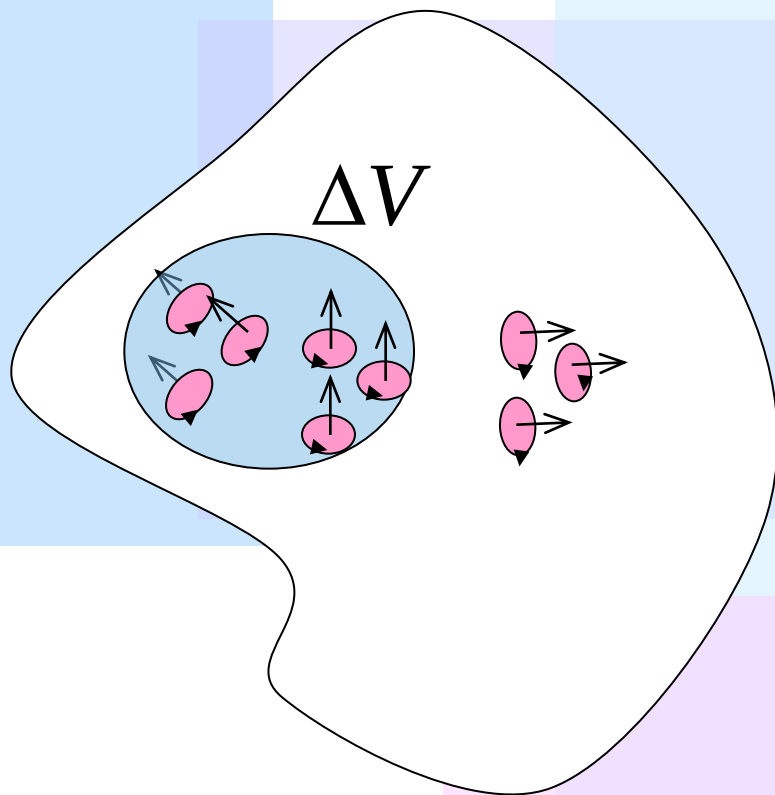
En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)





Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$

En medios materiales se cumple

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

Permeabilidad
magnética



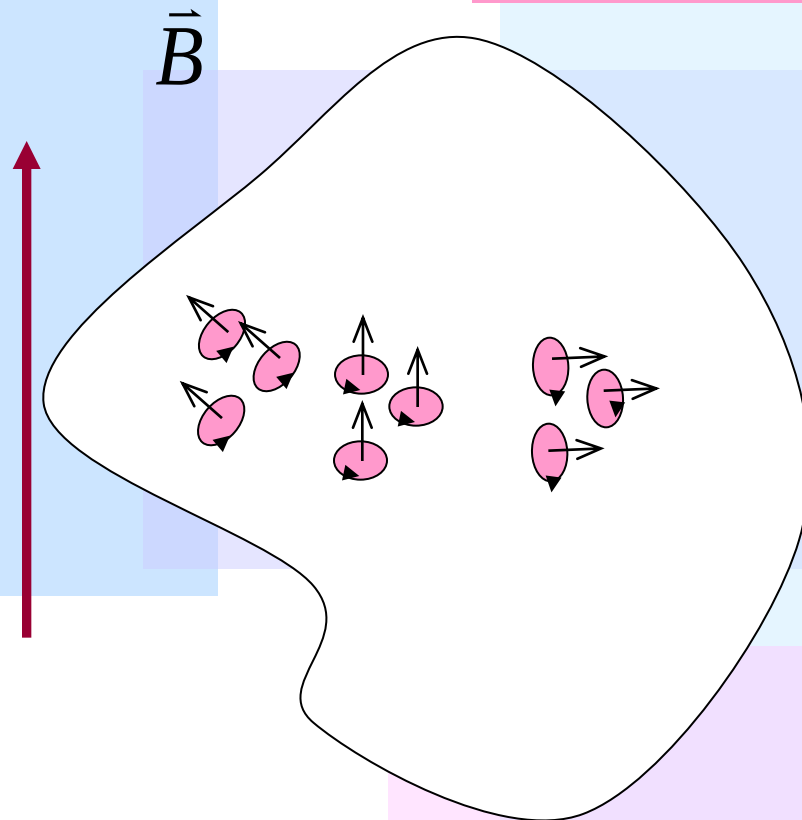
Clasificación de los Materiales Magnéticos

<i>Material</i>	<i>μ_R</i>
Diamagnéticos	
Bismuto	0.999833
Mercurio	0.999968
Plata	0.9999736
Plomo	0.9999831
Cobre	0.9999906
Agua	0.9999912
Hidrógeno (s.t.p.)	≈ 1.0
Paramagnéticos	
Oxígeno (s.t.p.)	0.999998
Aire	1.00000037
Aluminio	1.000021
Tungsteno	1.00008
Platino	1.0003
Manganeso	1.001
Ferromagnéticos	
Cobalto	250
Níquel	600
Hierro Suave	5000
Hierro-Silicio	7000



Modelo atómico de los materiales

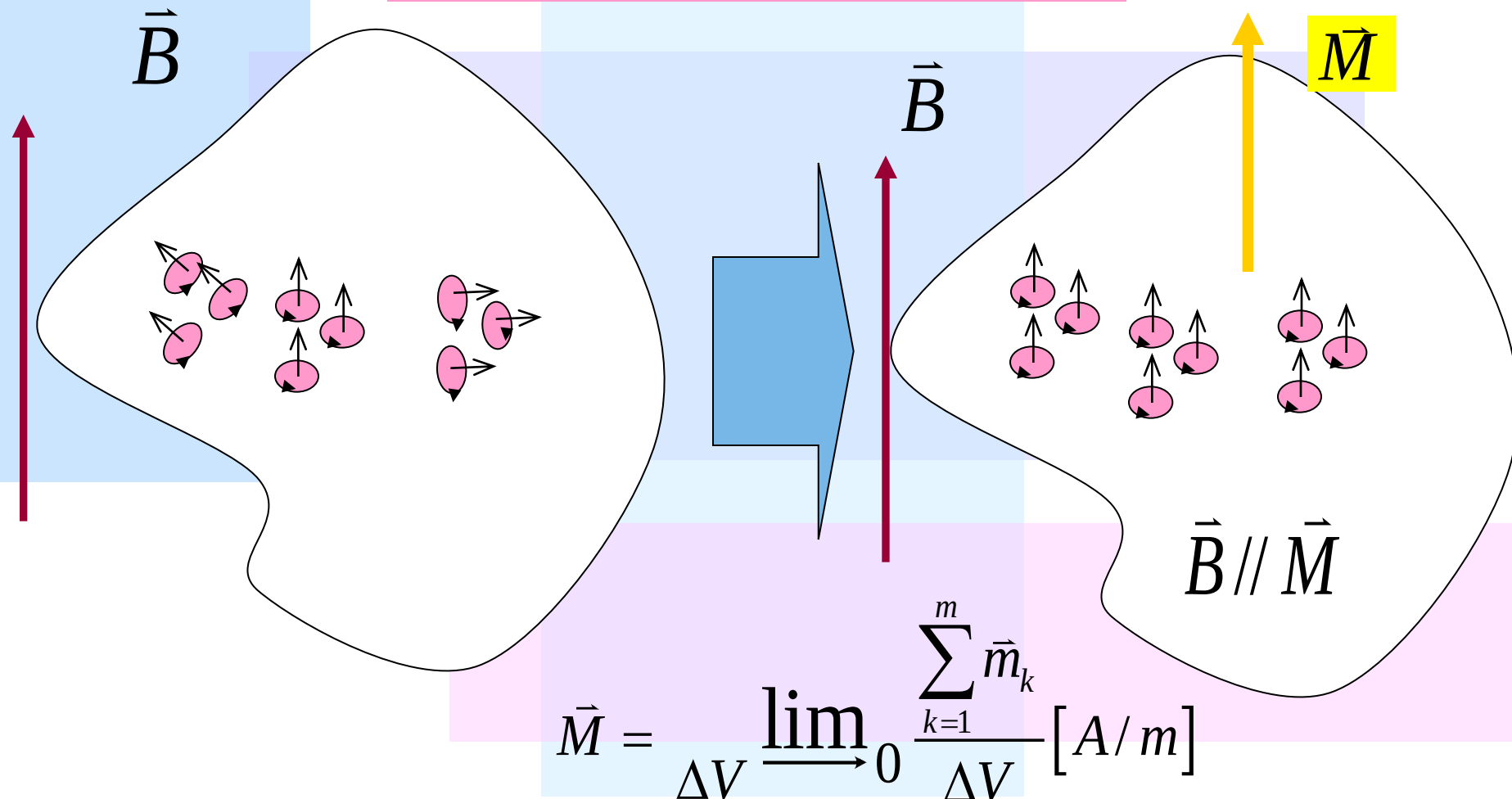
Vector magnetización





Modelo atómico de los materiales

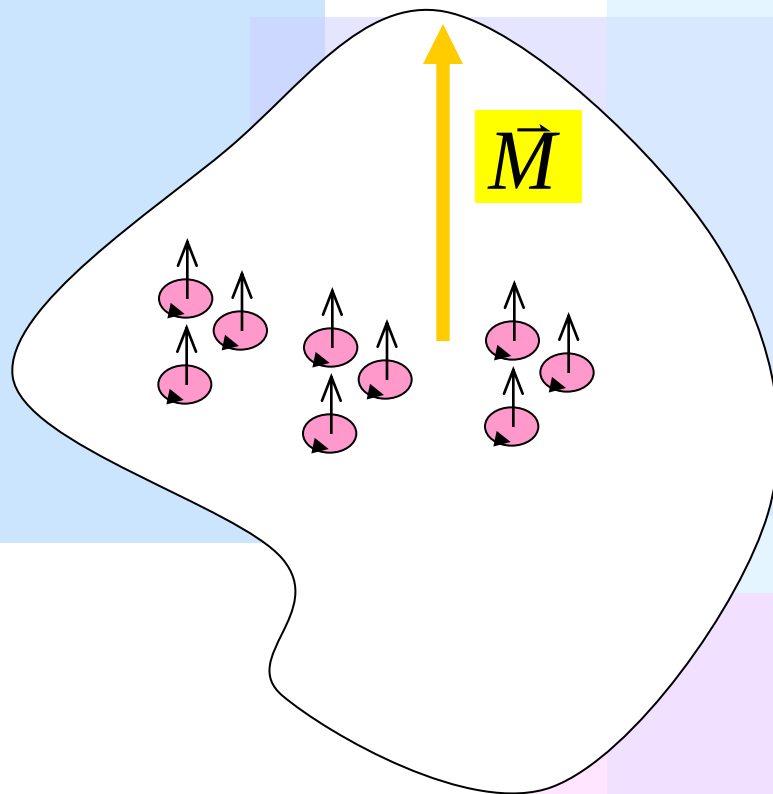
Vector magnetización





Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



si $\vec{B} = 0$

¿Qué ocurre
para $t \rightarrow \infty$?

$\vec{M} = ?$



Modelo atómico de los materiales

Algunos Materiales
mantienen la magnetización

Pero la mayoría la
pierde

$\vec{M}$

$\vec{M} = 0$

