



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 19

Magnetostática III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Repaso
- Ley Circuital de Ampere
- 3a Ecuación de Maxwell
- 4ta Ecuación de Maxwell

Roberto Matta, "Abrir el cubo y encontrar la vida"

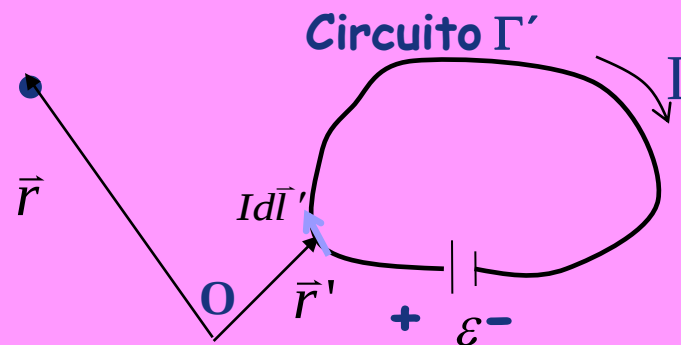




Campo magnético

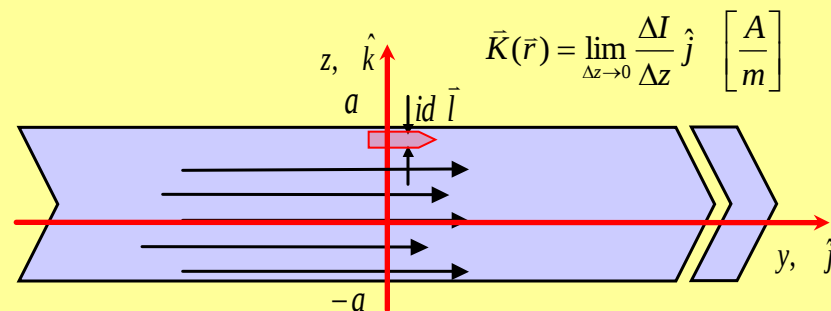
Campo producido por circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



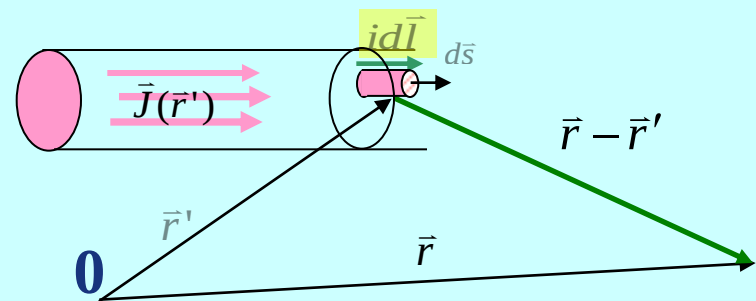
Campo producido por densidad de corriente superficial $\vec{K}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$$



Campo producido por densidad de corriente en volumen $\vec{J}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

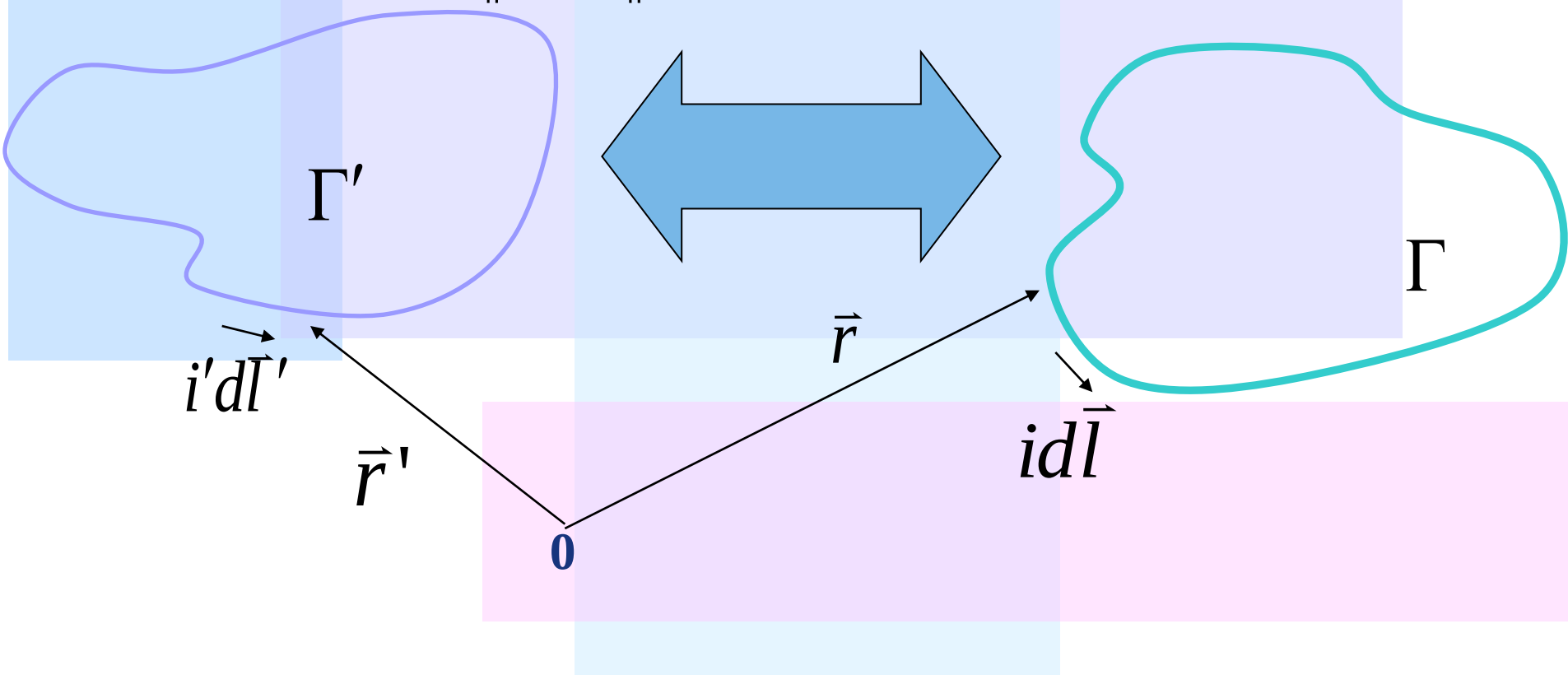




Ley de Biot y Savart

$$d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\therefore d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



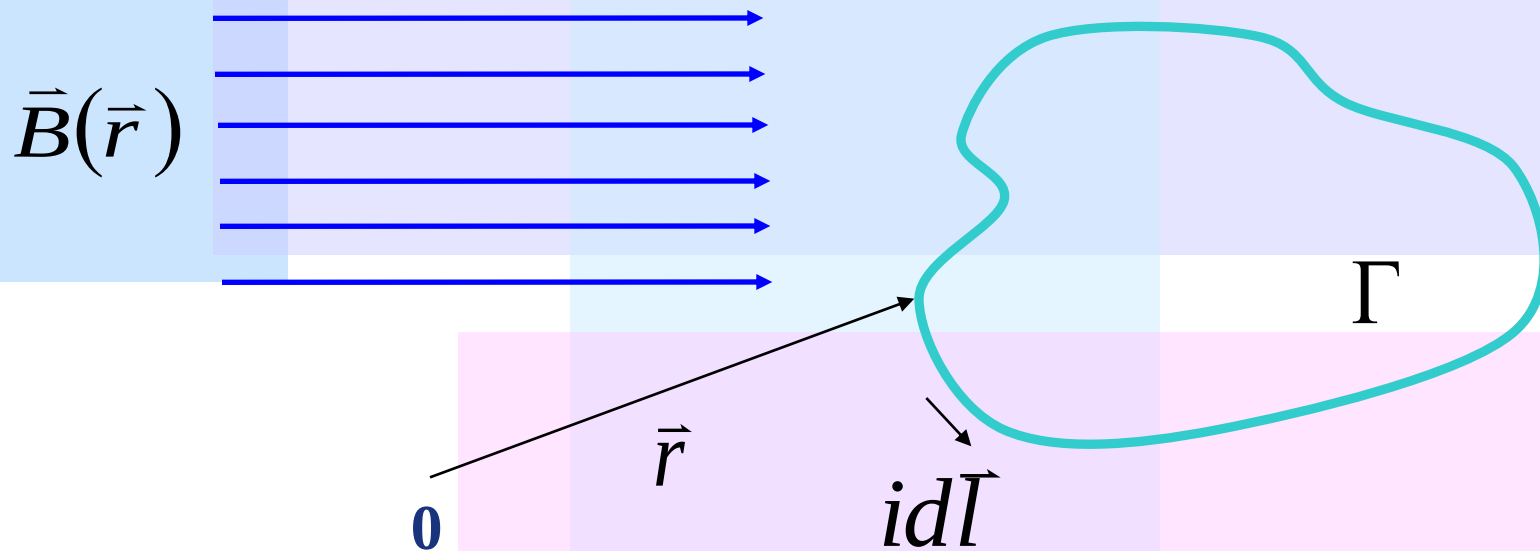


Ley de Biot y Savart

Así, un circuito en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza dada por la ecuación

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

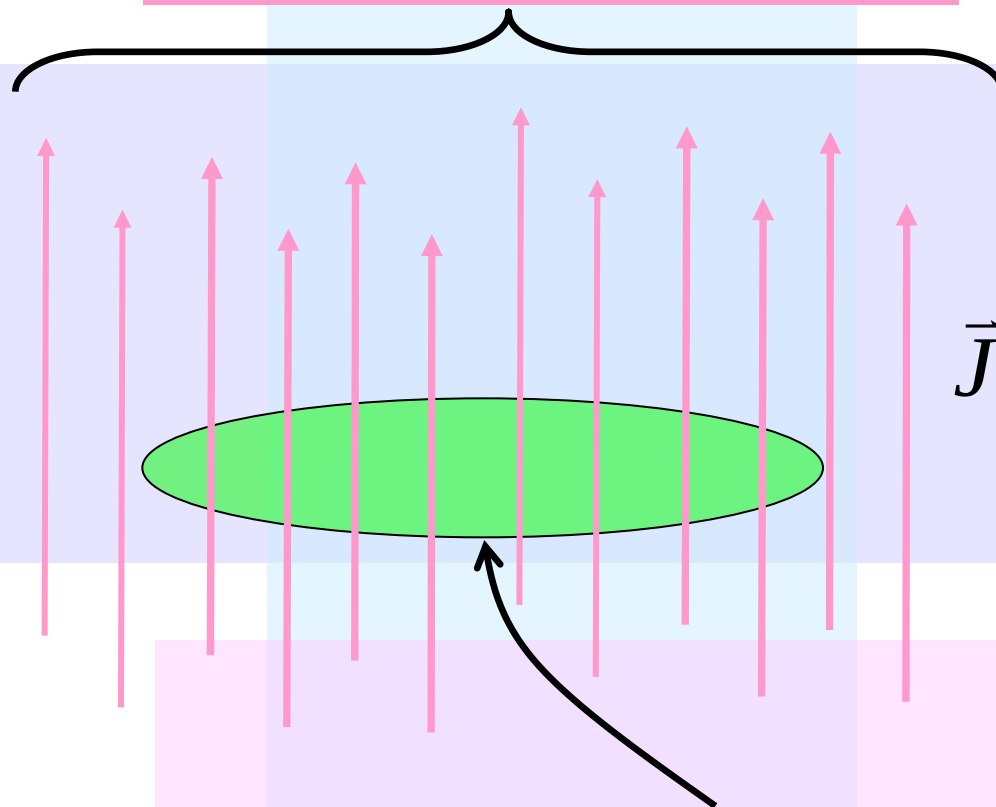
$$\therefore \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$





Ley Circuital de Ampere

Líneas de corriente

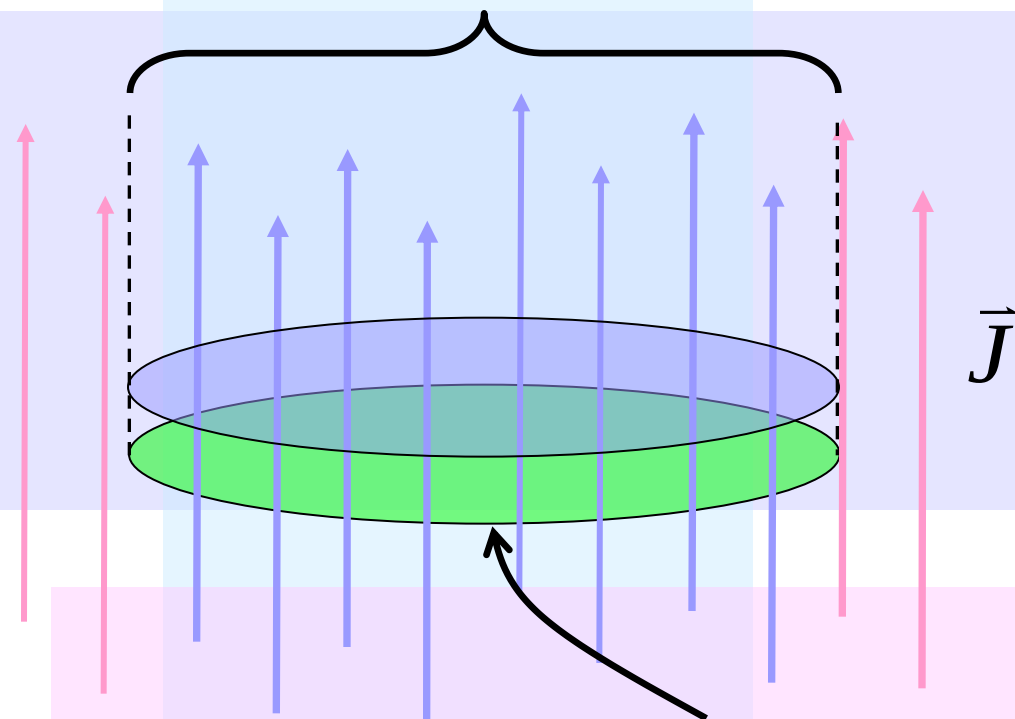


Plano S por donde atraviesan líneas de corriente



Ley Circuital de Ampere

Corriente que atraviesa por S

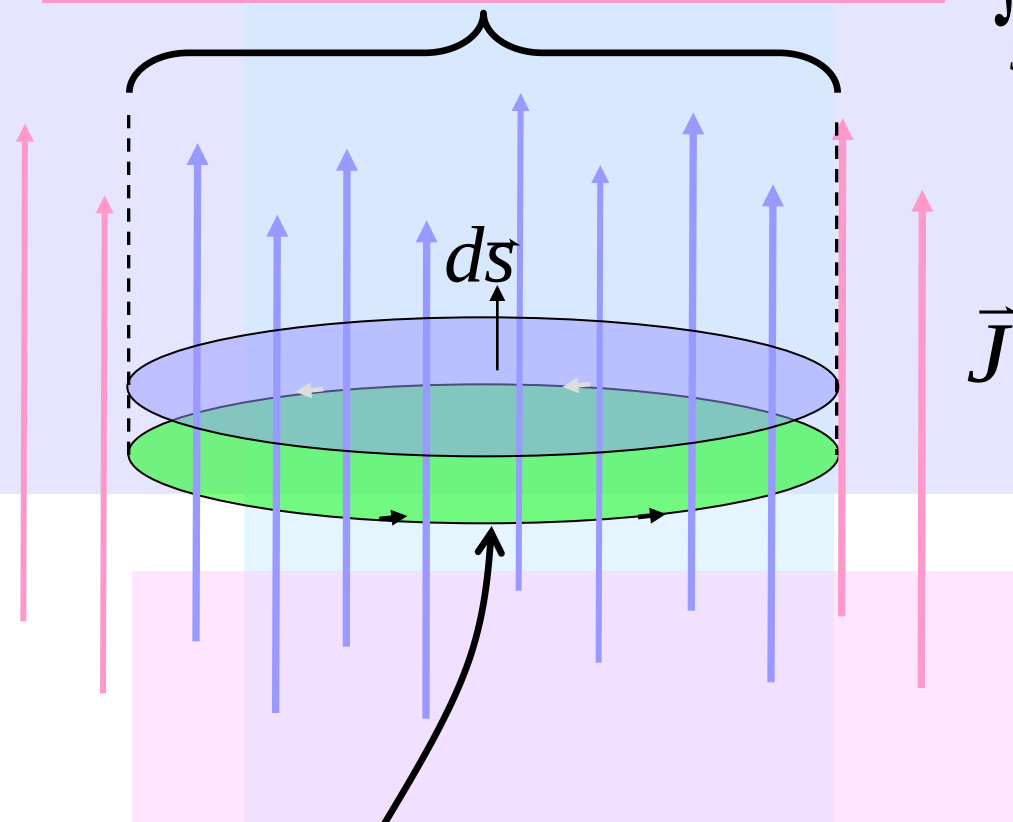


Plano S por donde atraviesan líneas de corriente



Ley Circuital de Ampere

Corriente enlazada por $\Gamma(s) = \iint_S \vec{J} \bullet d\vec{s}$



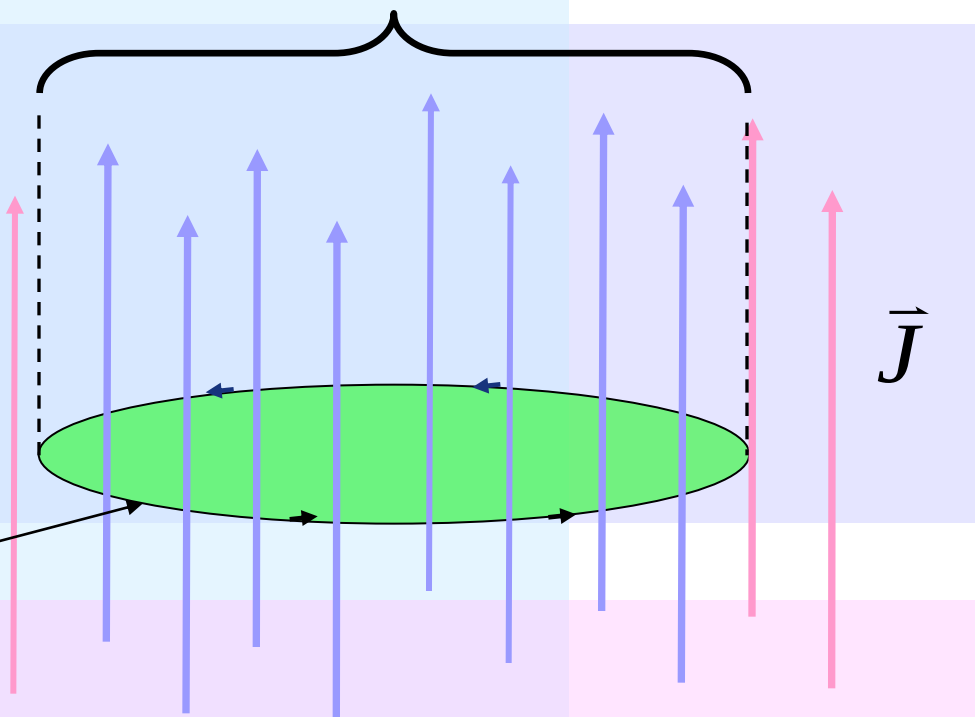
Trayectoria cerrada $\Gamma(S)$



Ley Circuital de Ampere

$I_{\text{enlazada}} = \text{Corriente enlazada por } \Gamma(s)$

Trayectoria
cerrada $\Gamma(s)$



$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}$$

Ley Circuital de Ampere

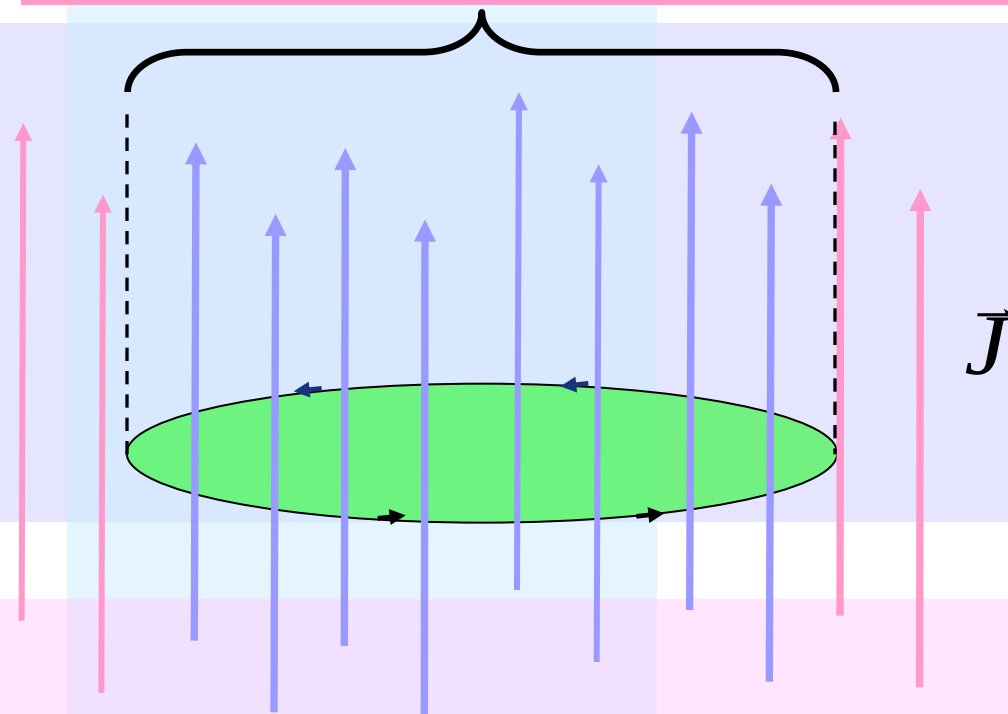


Ley Circuital de Ampere

I_{enlazada} = Corriente enlazada por $\Gamma(s)$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$\vec{H}$: Vector
Intensidad de
Campo
Magnético



$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

Ley Circuital de Ampere



Unidades

	ϕ	$\vec{B}$
Sistema CGS	[líneas]	[líneas/cm ²]
Sistema MKS	[Wb] (Weber)	[Wb/m ²] = [Tesla]
Equivalencias	1 [Wb] = 10 ⁸ [líneas]	1 [Tesla] = 10 ⁴ [Gauss] = 10 [kGauss]



Ejemplo 1

Calcular el campo
magnético de una
corriente unifilar
infinita

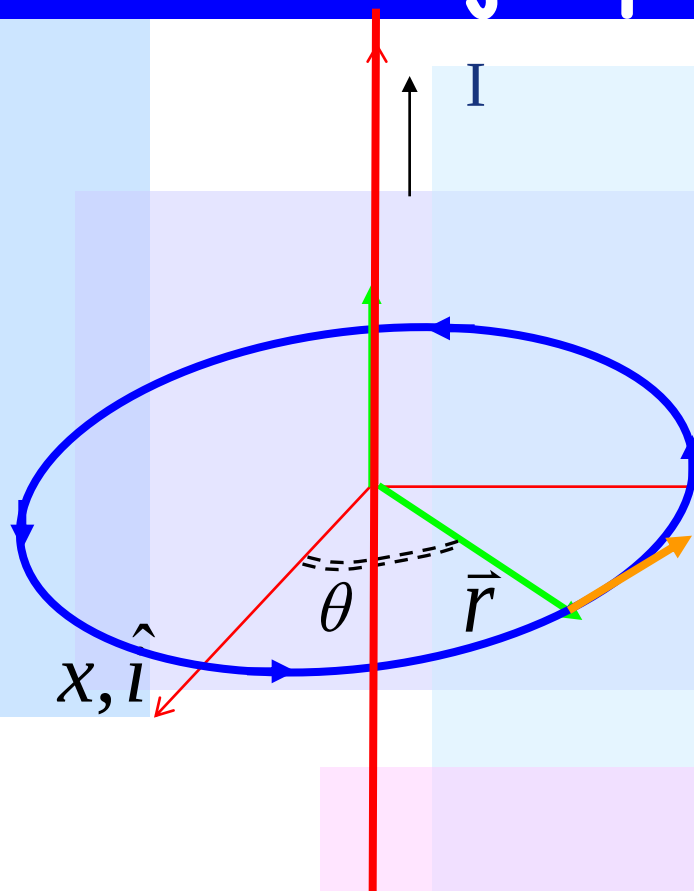
I

$$\vec{B} = ?$$

I



Ejemplo 1



Sabemos que el campo es tangencial a la corriente

$$\vec{B} = B\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H\hat{\theta}$$

$$d\vec{B} = dB\hat{\theta} \quad y, \hat{j}$$

Además sólo depende de la distancia radial r

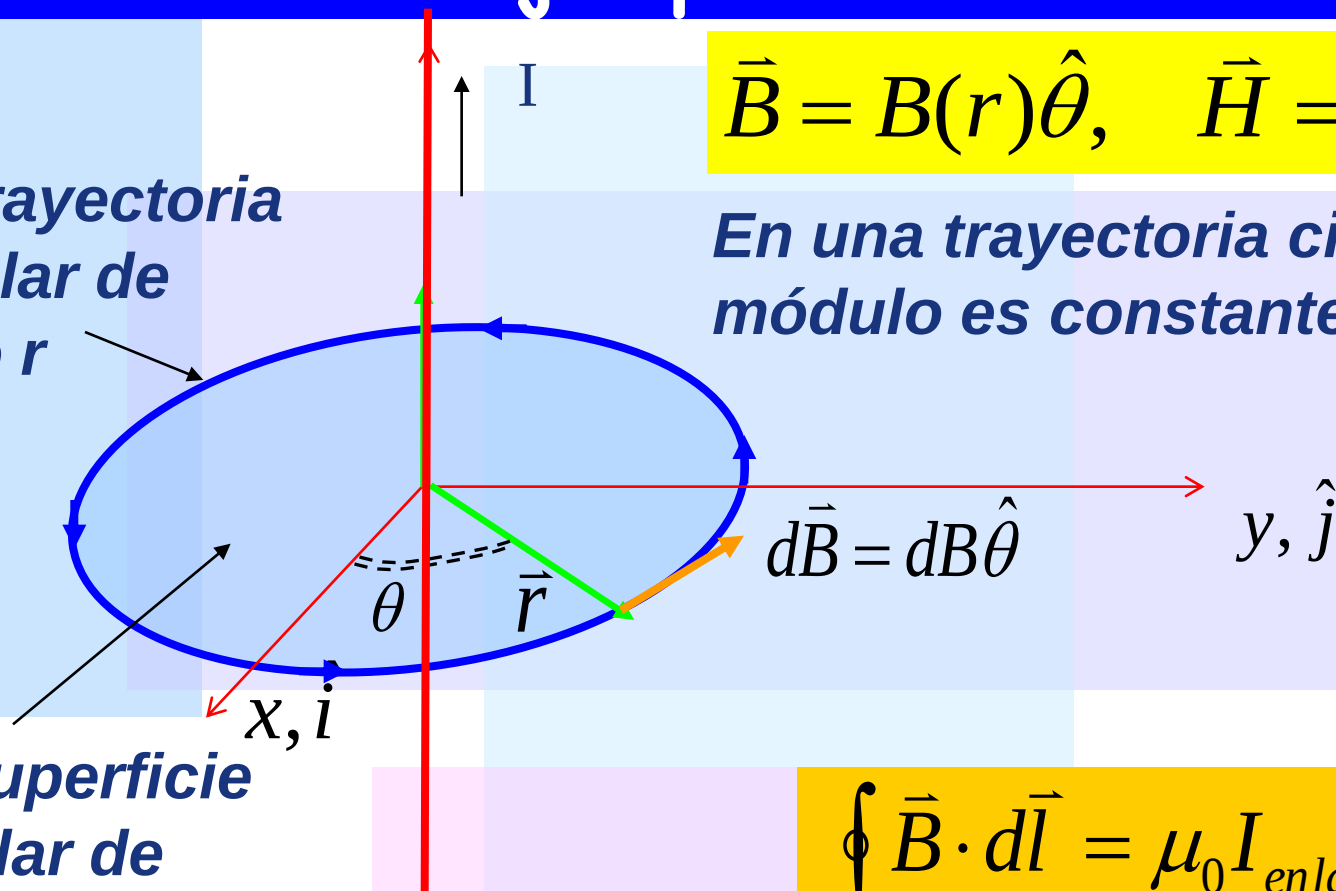
$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$



Ejemplo 1

Γ : trayectoria
circular de
radio r

S : superficie
circular de
radio r



$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$

En una trayectoria circular el
módulo es constante

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}(S)$$

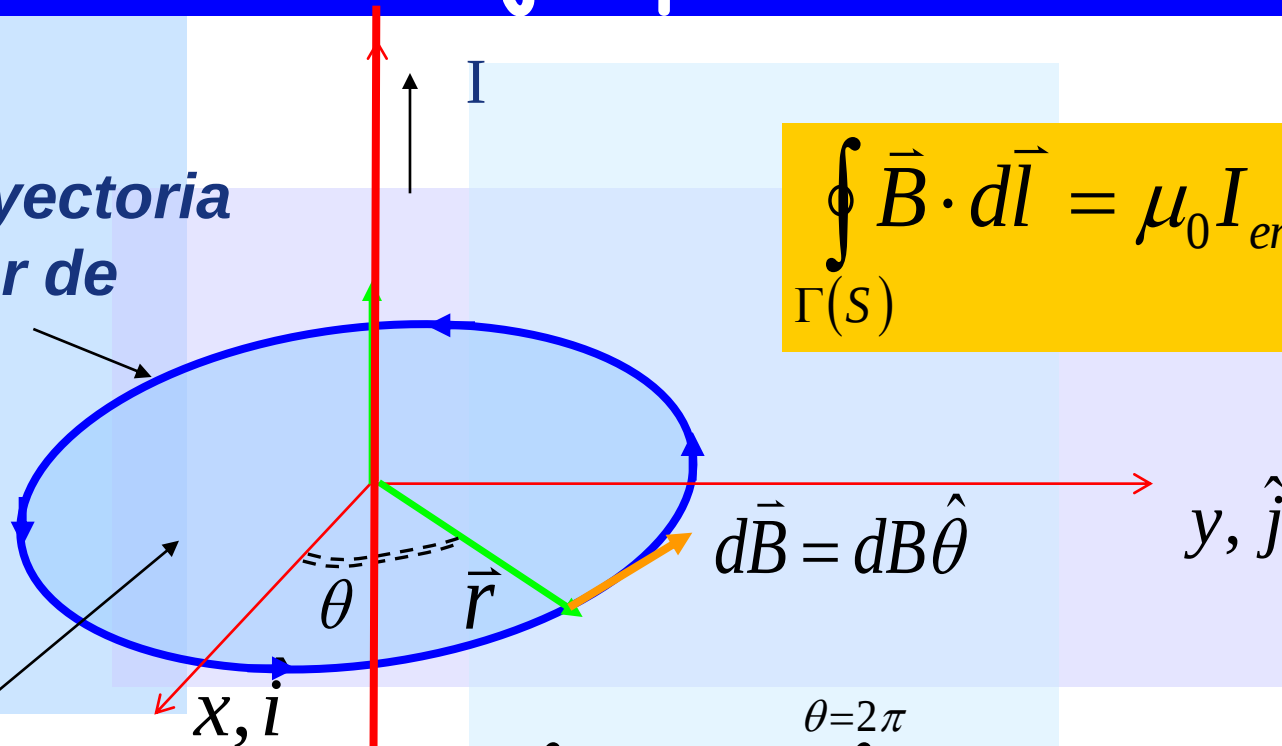


Ejemplo 1

Γ : *trayectoria circular de radio r*

S : *superficie circular de radio r*

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}(S)$$



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} B(r) \hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta} = B(r) r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

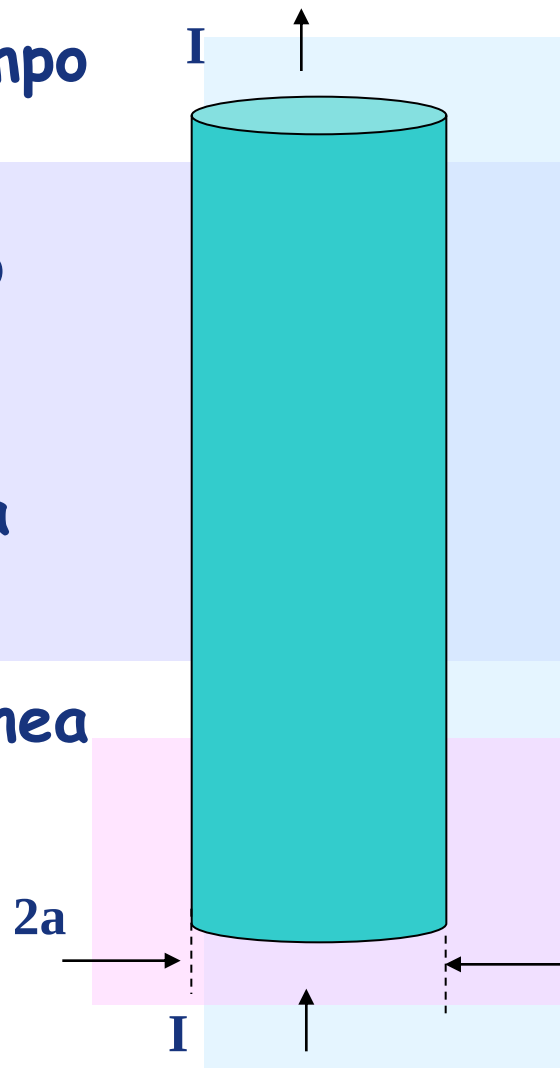
$$\Rightarrow \oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi B(r) r$$



Ejemplo 2

Calcular el campo magnético al interior de un cilindro macizo de corriente infinito.

Suponga que la corriente se distribuye en forma homogénea



$$\vec{B} = ?$$

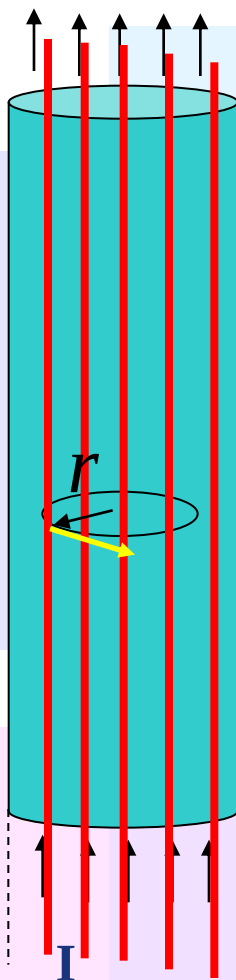


Ejemplo 2

Zona $r < a$

I

$\hat{\theta}$



2a

1ª Observación:

El interior del cilindro puede asimilarse a líneas de corriente paralelas que forman un todo densamente poblado. Luego el campo magnético resultante es la suma de los campos de c/u de las líneas de corriente, es decir, el campo tiene la siguiente forma:

$$\vec{B} = B\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H\hat{\theta}$$

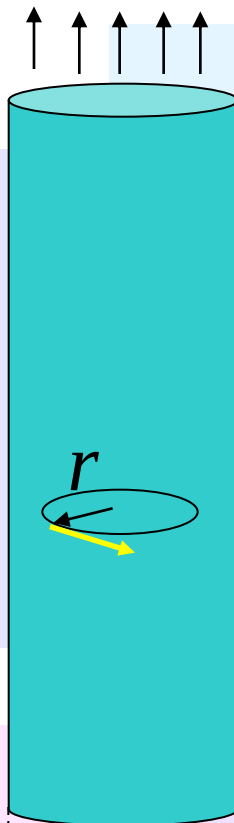


Ejemplo 2

Zona $r < a$

I

$\hat{\theta}$

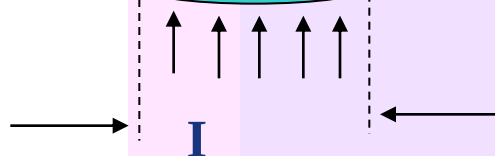


2ª Observación:

Por simetría, el campo para un radio dado no debiera cambiar de magnitud

$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$

2a





Ejemplo 2

Zona $r < a$

I

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} H(r) \hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta}$$

$$= H(r)r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi H(r)r$$

$\hat{\theta}$

$2a$

I



Ejemplo 2

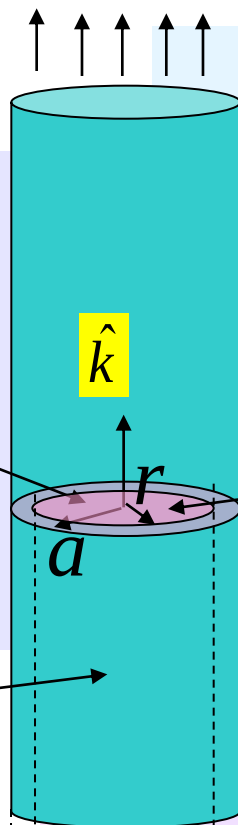
Zona $r < a$

I

S : superficie
circular de
radio r

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{k}$$

2a



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$I_{enlazada}(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=r} \frac{I}{\pi a^2} \hat{k} r d\theta dr \hat{k}$$

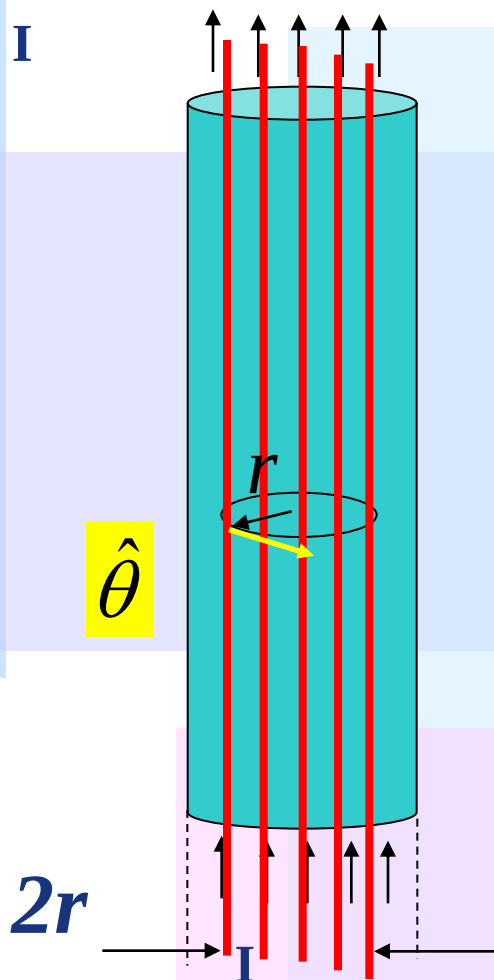
$$I_{enlazada}(S) = \frac{I r^2}{a^2}$$



Ejemplo 2

Zona $r < a$

I



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$\Rightarrow 2\pi H(r)r = \frac{Ir^2}{a^2}$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \hat{\theta}$$



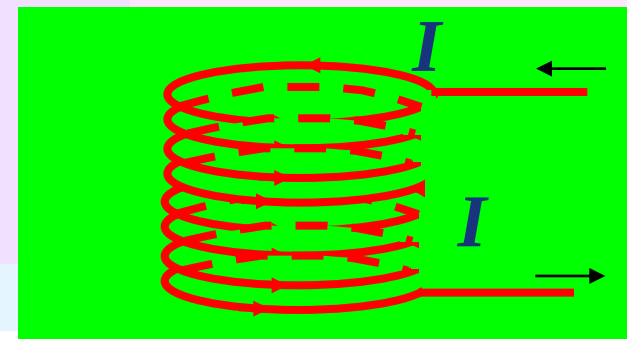
Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

- Requiere ver el campo magnético con antelación
- Requiere destreza para escoger apropiadamente la trayectoria de integración $\Gamma(s)$

Propuesto: Calcular campo magnético de bobina infinita con N vueltas por unidad de largo.
Hint campo afuera es nulo y constante adentro.



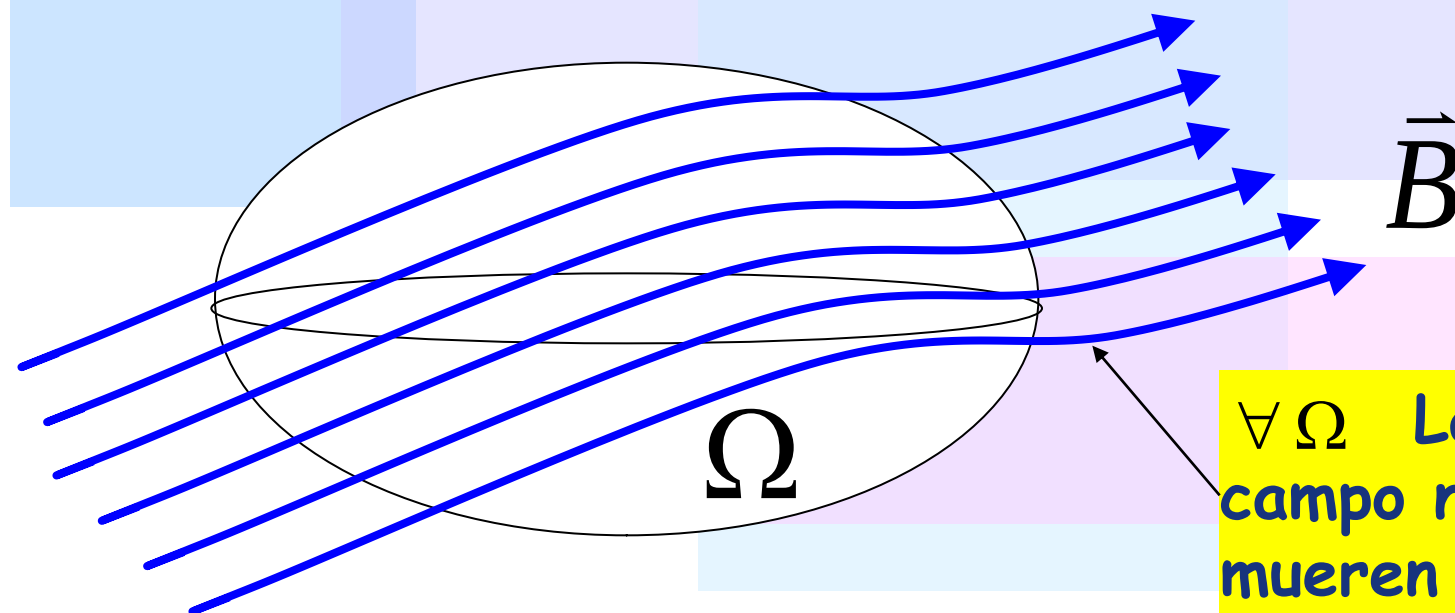


3ª Ecuación de Maxwell

Hasta hoy no se han encontrado fuentes desde donde nazcan líneas de campo, es decir, no hay "cargas magnéticas"

$$\therefore \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell



$\forall \Omega$ Las líneas de campo no nacen ni mueren en parte alguna



4ª Ecuación de Maxwell

Ley Circuital de Ampere $\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Podemos escribir $\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$

Además $I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{Válido } \forall S$$

$$\therefore \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell



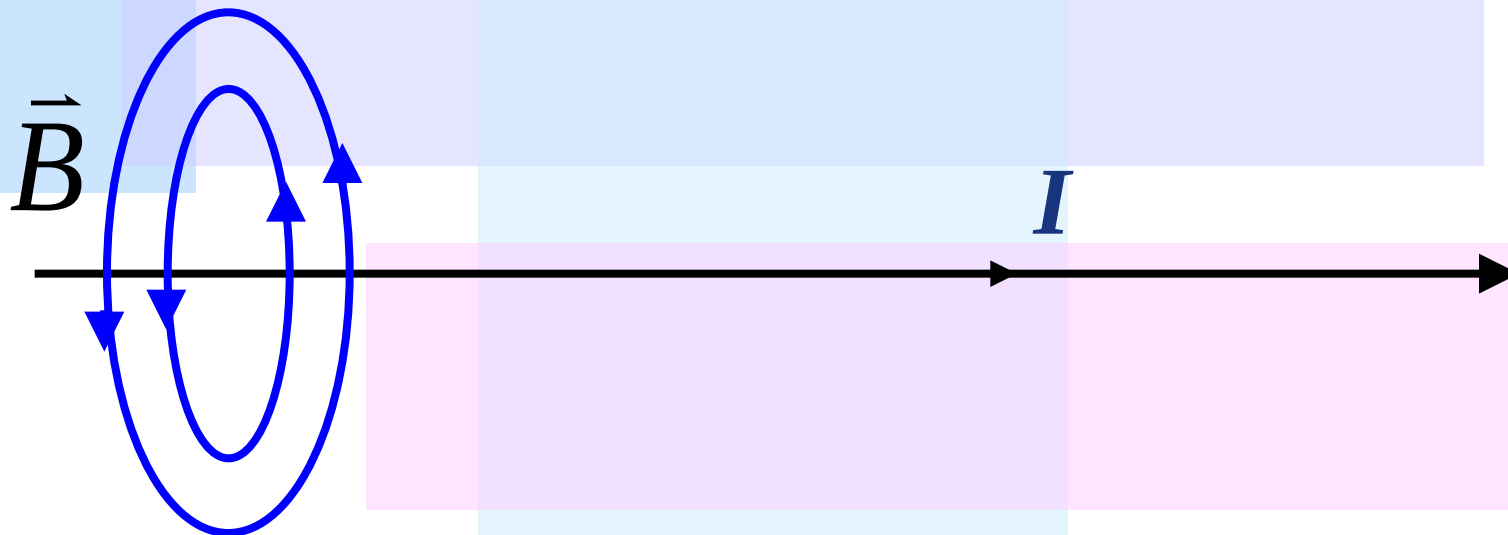
Origen del campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell





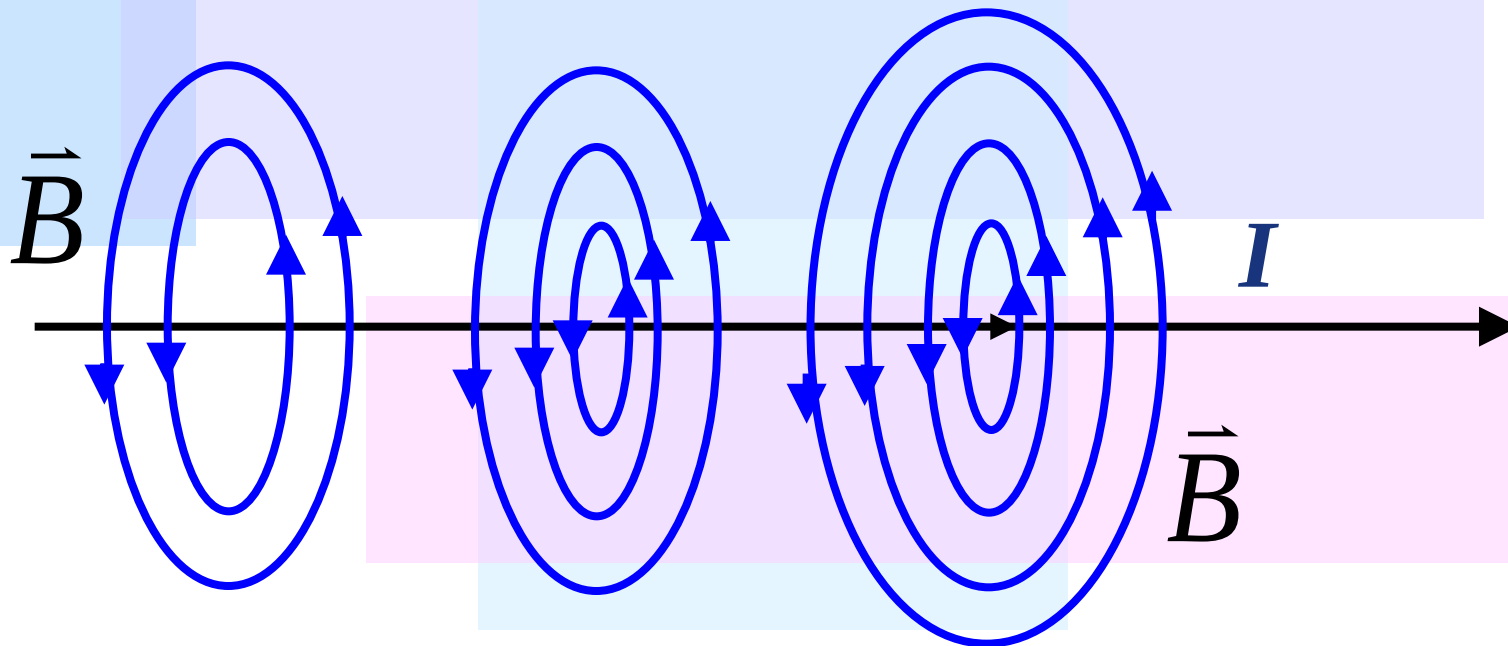
Origen del campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell





Potencial Magnético Vector

Un campo vectorial cualquiera cumple con $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Por otra parte todo campo magnético cumple $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{A}$ es el potencial magnético vector

Usaremos la definición de campo magnético para encontrar una expresión del potencial magnético vector



Potencial Magnético Vector

Usaremos la identidad $\nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Recordemos que el campo magnético de circuitos lineales es $\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Luego podemos escribir $\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} I d\vec{l}' \times \left(\nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

Usando ahora la identidad $\nabla \times (f \vec{F}) = f \nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

$$\nabla_r \times \left(\frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla_r \times I d\vec{l}' + \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times I d\vec{l}' \quad \text{pero } \nabla_r \times I d\vec{l}' = 0$$



Potencial Magnético Vector

$$\Rightarrow \nabla_r \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$$

Invirtiendo el producto cruz $Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$

$$\Rightarrow Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$



Potencial Magnético Vector

Notemos que
$$\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

tiene la forma
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Luego
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Es el potencial magnético vector de una corriente I en un circuito

$$[\vec{A}] = \frac{T}{m}$$



Potencial Magnético Vector

Por extensión, y siguiendo un análisis similar, se concluye que para distribuciones continuas de corriente

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes superficiales $[\vec{K}] = \frac{A}{m}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes en volumen $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$



Formas de calcular Campo Magnético

Usando la definición

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Usando el potencial magnético vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

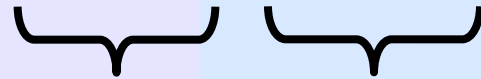
4ª Ecuación de Maxwell



Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz



Producida
por campo
eléctrico

Producida
por campo
magnético



Cargas en Campos Magnéticos

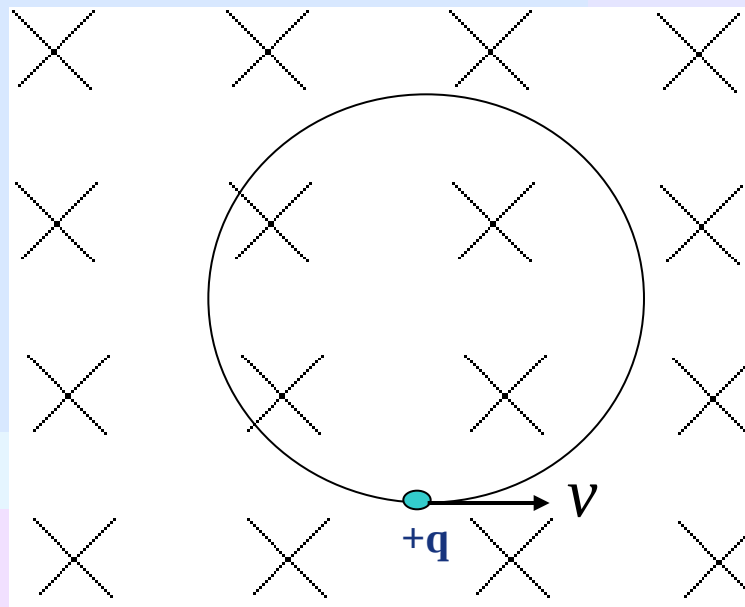
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$qB = \frac{mv}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$



$\vec{B}$

Trayectoria circular



Cargas en Campos Magnéticos

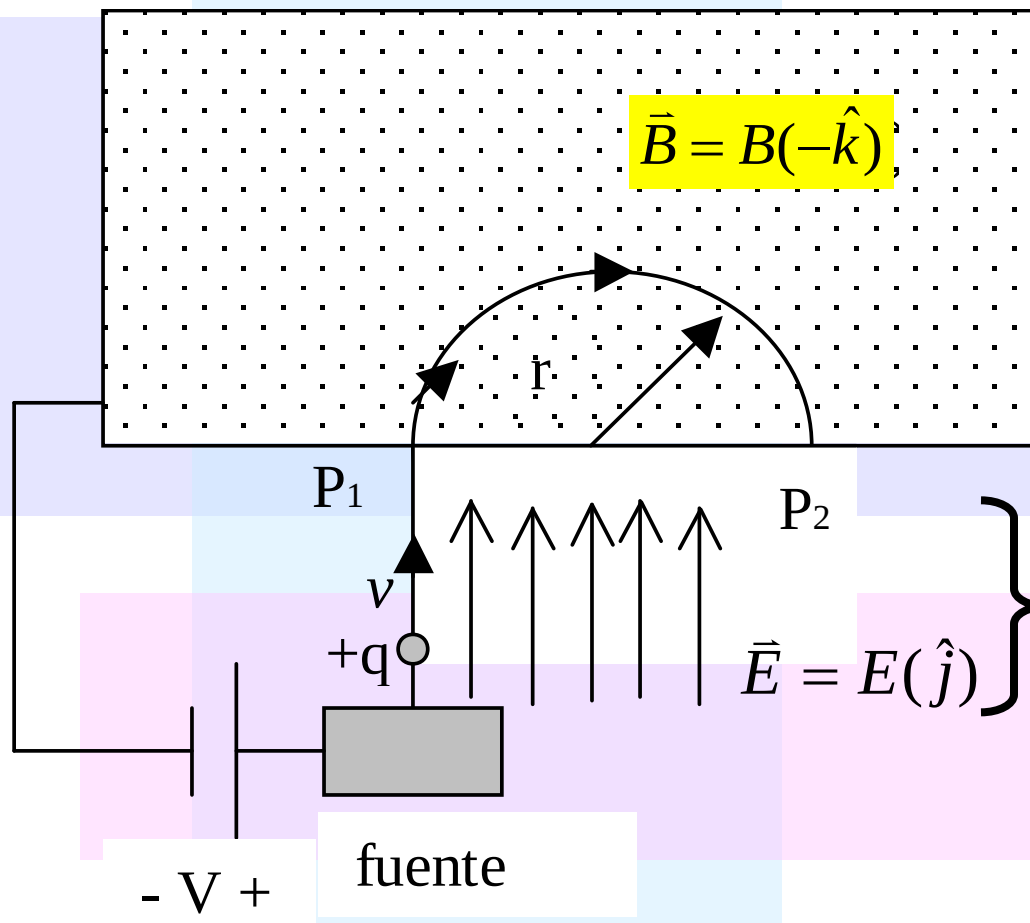
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

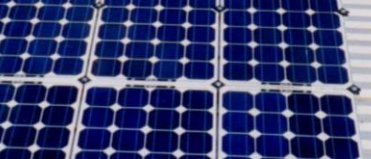
$$r = \frac{mv}{qB}$$

*Radio r
depende de
la razón
masa/carga*

Espectrógrafo de Masas



$\vec{F} = q\vec{E}$
*Campo
eléctrico
acelera las
cargas*



Cargas en Campos Magnéticos

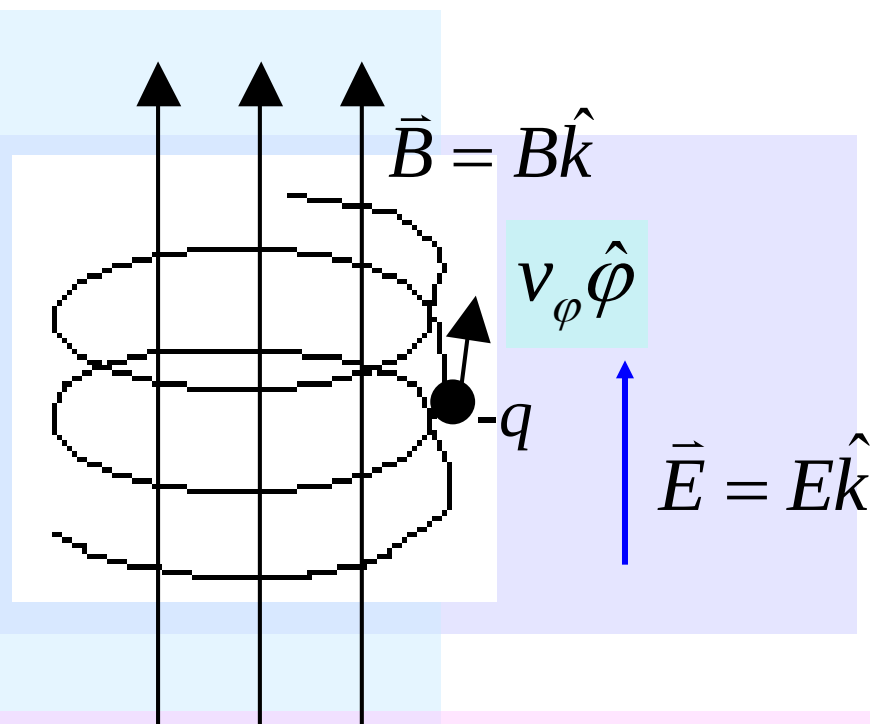
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$qv_{\phi}B = \frac{mv_{\phi}^2}{r}$$

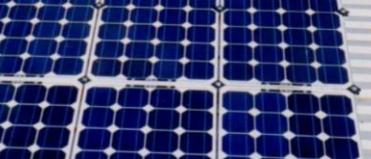
$$r = \frac{mv_{\phi}}{qB}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = qE$$

$$\Rightarrow v_z = qEt + v_{z_0}$$



Trayectoria helicoidal

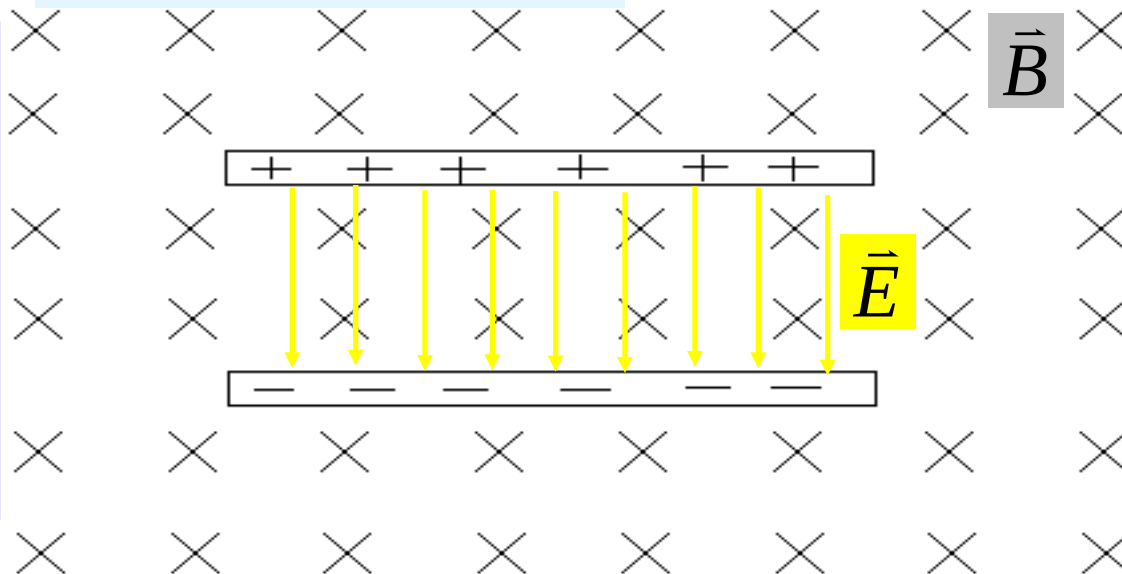
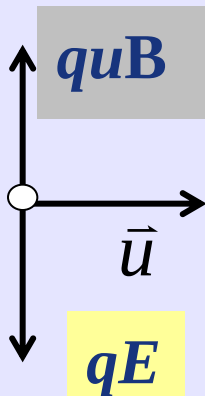


Cargas en Campos Magnéticos

Selector de Velocidades

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

*Fuerza y
velocidad*



$$\vec{F} = 0 \Rightarrow q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = 0$$

$$\therefore u = \frac{B}{E}$$

Independiente de la masa y carga