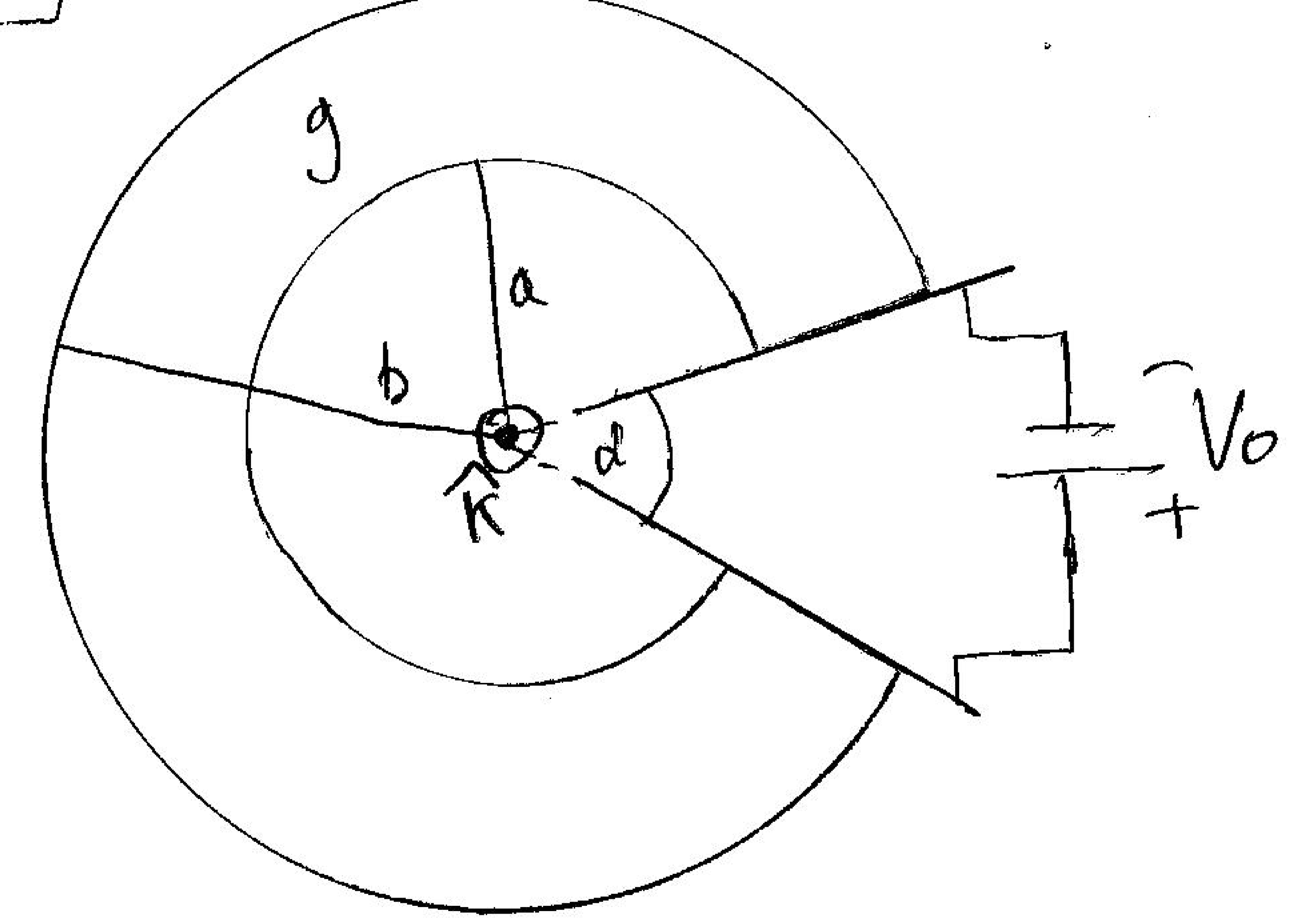
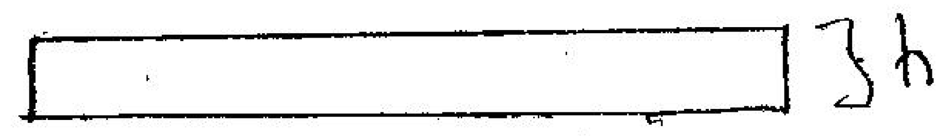
P1 Vista Superior | FI2002 Aux 8 | Vista Lateral





a) ¿$\vec{J}$, $\vec{E}$, $V(\vec{r})$? Suponga $V=V(\theta)$

b) ¿P, R?

Sol: a) Ecuación de Poisson: $\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$, como no hay cargas libres: $\rho=0$

$\Rightarrow$ Se cumple la ecuación de Laplace: $\nabla^2 V = 0$, por enunciado podemos supones

$$V=V(\theta) \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \Rightarrow V(\theta) = A\theta + B$$

C. de Borde:
- $V(0) = 0 \Rightarrow V(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0$
- $V(2\pi-\alpha) = V_0 \Rightarrow V(2\pi-\alpha) = A(2\pi-\alpha) = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{2\pi-\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{V(\theta) = \frac{V_0\cdot\theta}{2\pi-\alpha}}$ Calculamos $\vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$, como $V=V(\theta)$

$$\vec{E} = -\nabla V(\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{V_0}{(2\pi-\alpha)}\hat{\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{-V_0}{(2\pi-\alpha)}\cdot\frac{\hat{\theta}}{r}}$$

Como $\vec{J} = g\cdot\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = -\frac{gV_0}{(2\pi-\alpha)r}\cdot\hat{\theta}}$

b) Calculamos la potencia, mediante la relación: $P = \iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$, donde V corresponde al volumen por el que circula la corriente.

$$\Rightarrow P = \int_0^{2\pi-\alpha}\int_0^h\int_a^b \frac{g\cdot V_0^2}{(2\pi-\alpha)^2 \cancel{r^2}}\cancel{r}\,dr\,dz\,d\theta = \frac{gV_0^2 h}{2\pi-\alpha}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow P = \frac{gV_0^2 h\ln(b/a)}{2\pi-\alpha}$$

Para calcular R, usamos la relación: $P = R\cdot I^2$, calculamos la corriente I con el vector $\vec{J}$:

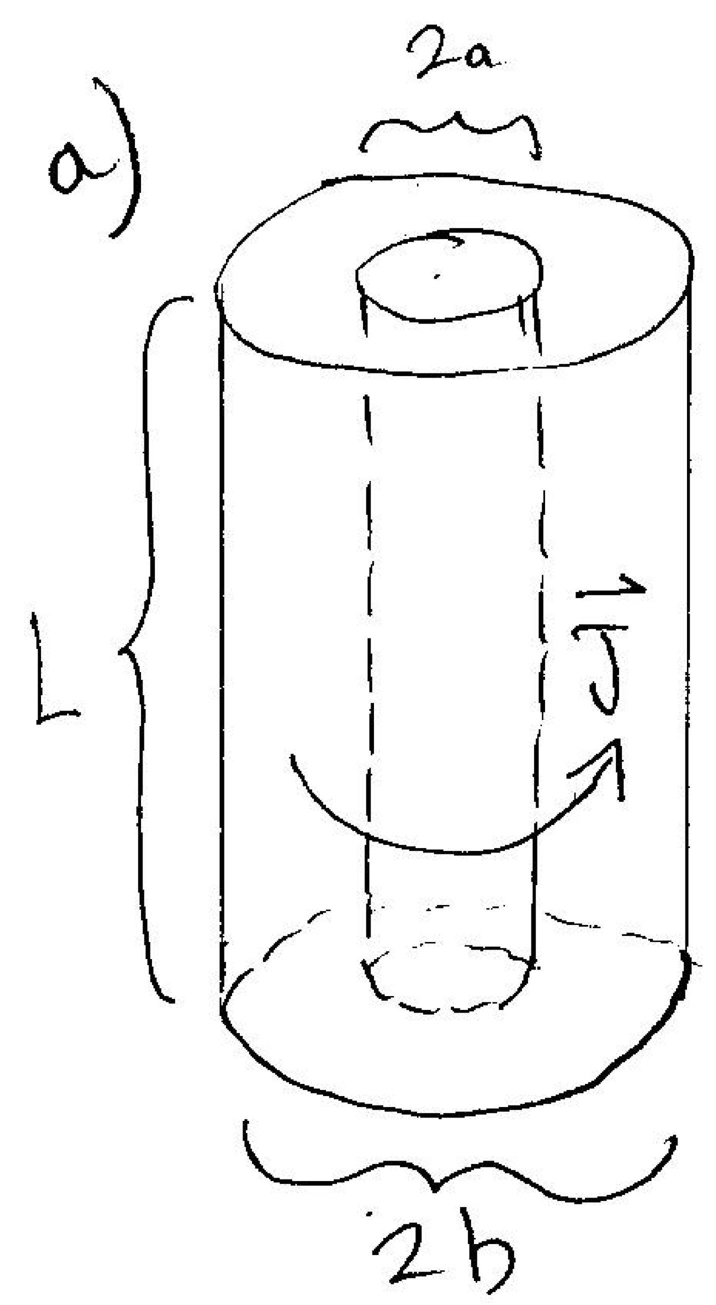
$$d\vec{S} = dr\,dz(-\hat{\theta}) \Rightarrow I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^h\int_a^b +\frac{gV_0}{2\pi-\alpha}\cdot\frac{dr\,dz}{r} = +\frac{gV_0 h}{2\pi-\alpha}\ln(b/a)$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{g^2 V_0^2 h^2}{(2\pi-\alpha)^2} \cdot \ln(b/a)^2$$

Luego, como $P = R \cdot I^2 \Rightarrow R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{\dfrac{\cancel{g}\,\cancel{h}\,\cancel{V_0}\,\cancel{\ln(b/a)}}{\cancel{2\pi-\alpha}}}{\dfrac{g^{\cancel{2}} h^{\cancel{2}} \cancel{V_0^2} \ln(b/a)^{\cancel{2}}}{(2\pi-\alpha)^{\cancel{2}}}}$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{(2\pi-\alpha)}{g\, h \ln(b/a)}}$$

P2 | a) | FI2002 Aux8



ε, g

$\vec{J} = J_0 r \hat{\theta}$, determine:

1) $\vec{E}$ en el cilindro
2) P disipada
3) I que atraviesa un plano de altura unitaria

Sol: 1) Sabemos que $\vec{J} = g \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{g} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{J_0 r \hat{\theta}}{g}}$

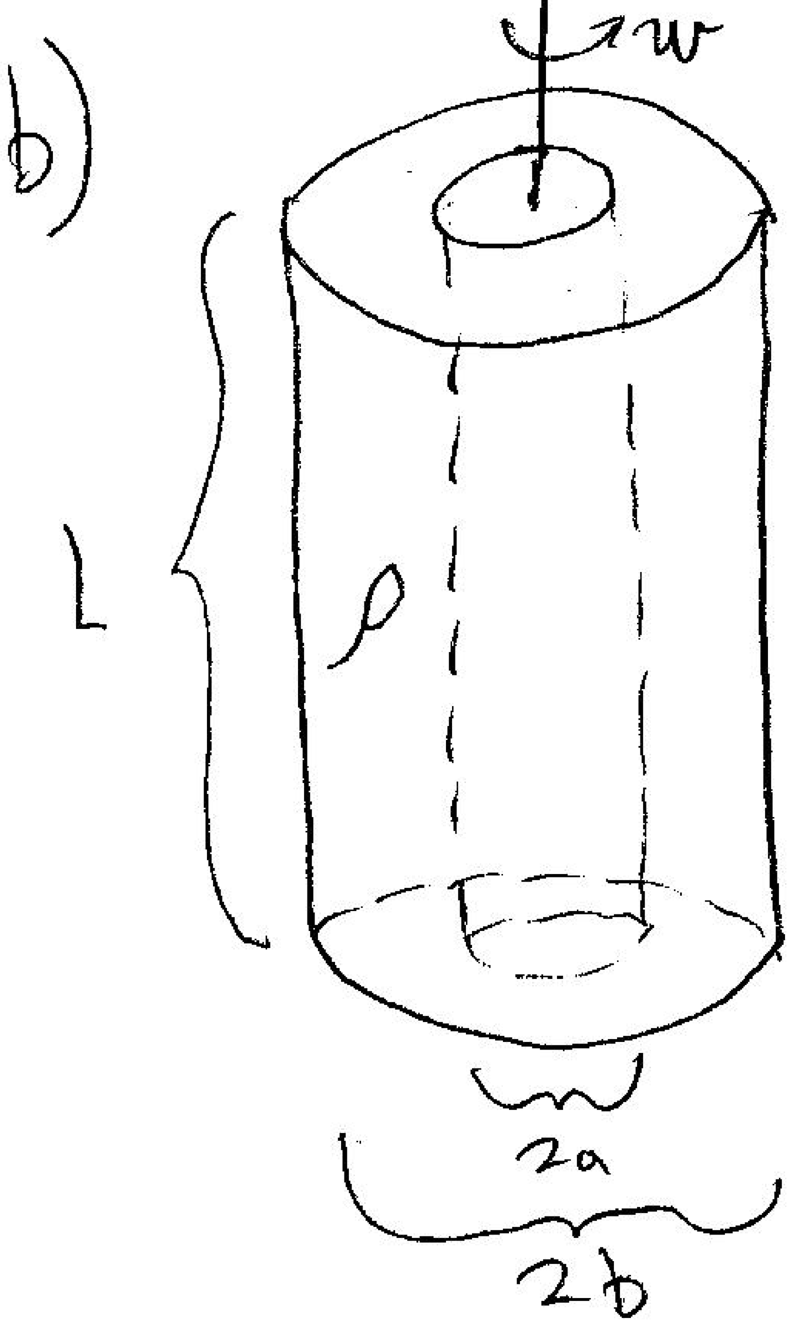
2) Sabemos que $P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{L} \int_a^{b} \dfrac{J_0^2 r^2}{g} r\, dr\, d\theta\, dz = \dfrac{2\pi L J_0^2}{g} \cdot \dfrac{r^4}{4}\Big|_a^b$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{\pi L J_0^2 (b^4 - a^4)}{2g}}$$

3) Podemos calcular la corriente que atraviesa una superficie S como:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_a^b J_0 r \cdot dr\, dz = J_0 \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_a^b = \boxed{\frac{J_0 (b^2 - a^2)}{2} = I}$$

b)



$\rho = \rho_0 \cdot r$, determine:

1) $\vec{E}$ en el cilindro

2) P disipada

3) I que atraviesa un plano unitario, w tq I sea igual a la de la parte a) 3)

Sol: 3) $\vec{J}$ es la densidad de corriente y la corriente corresponde a: $I = \frac{dQ}{dt}$

Sabemos que: $\vec{J} = \frac{dI}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}\hat{i}$, donde $\hat{i}$ corresponde a la dirección de I

En este caso $\hat{i} = \hat{\theta}$, $dQ = \rho \cdot dV \Rightarrow \vec{J} = \frac{\rho\, dV \hat{\theta}}{dS \cdot dt} = \frac{\rho \cdot \cancel{dS} \cdot dl \cdot \hat{\theta}}{\cancel{dS} \cdot dt} = \frac{\rho \cdot dl\, \hat{\theta}}{dt}$

pero $\frac{dl}{dt} = v = r \cdot w \Rightarrow \vec{J} = \rho \cdot r \cdot w\, \hat{\theta}$, $\rho = \rho_0 r \Rightarrow \vec{J} = \rho_0 w r^2 \cdot \hat{\theta}$

$\Rightarrow$ Al igual que en la parte a) $I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_a^b \rho_0 w r^2 \cdot dr\,dz$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\rho_0 w (b^3 - a^3)}{3}}$ Imponemos que sea igual a la de la parte a):

$$\frac{\rho_0 w (b^3 - a^3)}{3} = \frac{J_0 (b^2 - a^2)}{2} \Rightarrow \boxed{w = \frac{3 J_0 (b^2 - a^2)}{2 \rho_0 (b^3 - a^3)}}$$

1) Aplicando la ley de Gauss: $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}$, como $\rho(\vec{r}) = \rho_0 r$ podemos suponer que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$

$\Rightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^L D(r) r\,dz\,d\theta = 2\pi L r D(r)$, $Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_a^r \rho_0 r^2 dr\,d\theta\,dz$

$\Rightarrow Q_{enc} = \frac{2\pi L \rho_0 r^3}{3}\Big|_a^r \Rightarrow \cancel{2\pi L} r D(r) = \frac{\cancel{2\pi L} \rho_0 (r^3 - a^3)}{3} \Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{\rho_0 (r^3 - a^3)}{3r}\hat{r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 (r^3 - a^3)}{3 \varepsilon_0 r}\hat{r}}$ 2) $P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}$, pero $\vec{J}$ va según $\hat{\theta}$ y $\vec{E}$ según $\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{J} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{P = 0}$

P2 Aux8
2/2