



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 17

Magnetostática I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

Introducción

Fuerza sobre una carga

Campo magnético

Regla de la mano derecha

Campo Línea de corriente infinita

Campo Distribuciones de corriente

Campo carga en movimiento

Campo Magnético Terrestre



Introducción

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Corrientes constantes

Estudiaremos primero régimen estacionario



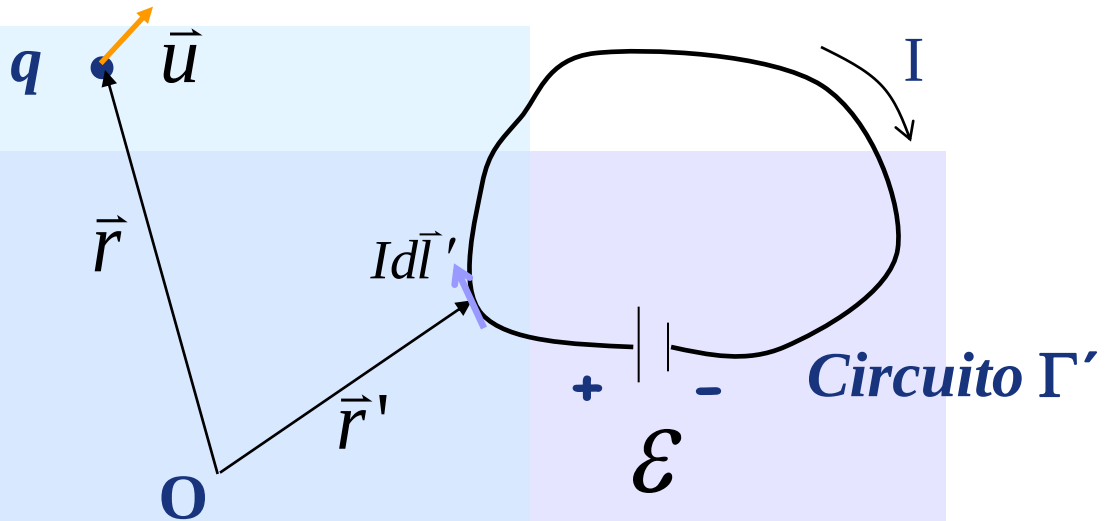
Fuerza sobre una carga

Fuerza sobre q

Se encuentra experimentalmente que

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

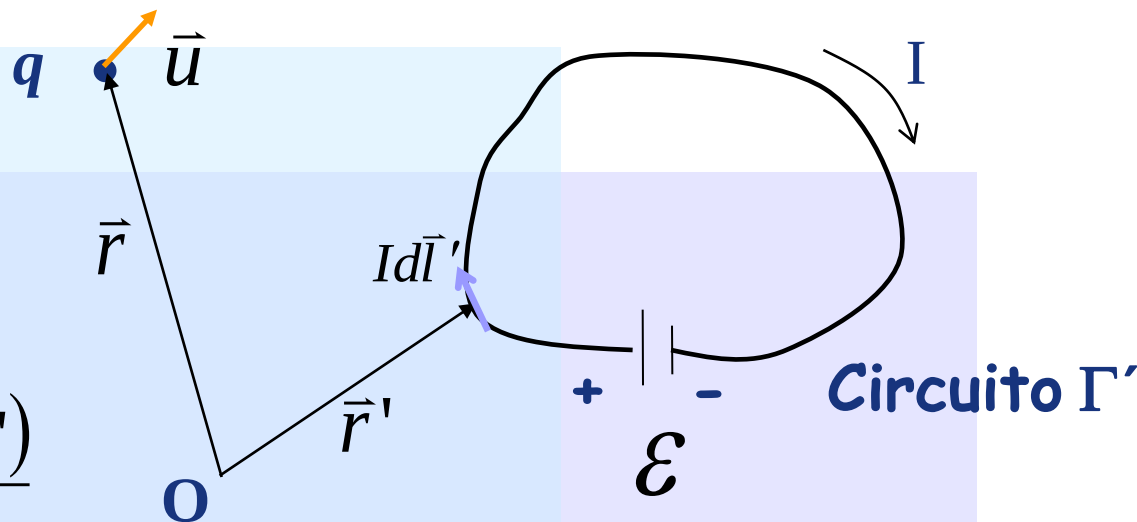
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H / m]$ permeabilidad del aire (constante)





Campo magnético

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Se define el campo magnético
producido por circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Fuerza de Lorentz

Fuerza de Lorentz

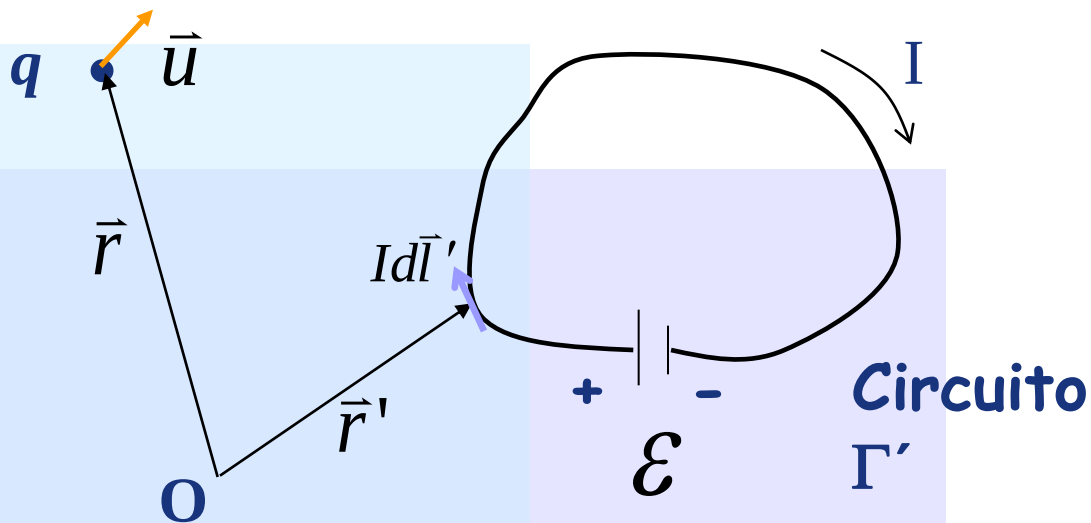
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Unidades del campo

$$[F] = [q][V][B] \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[q][V]} = \frac{[N]}{[C][m/seg]}$$

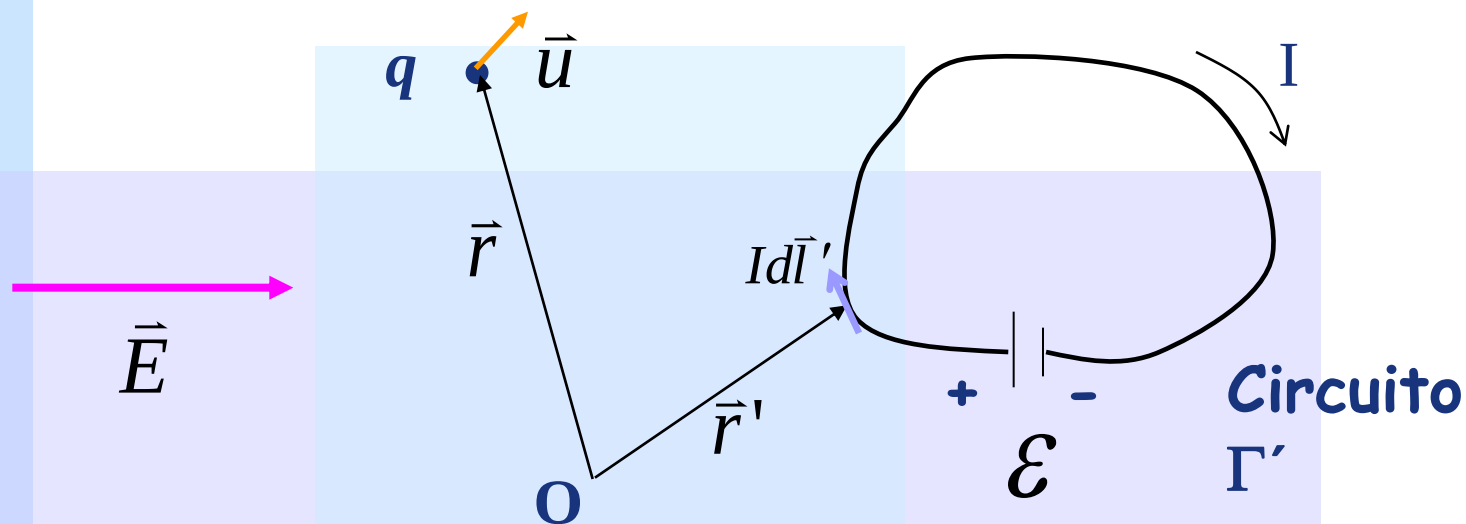
$$1 \text{ Tesla} = [T] = \left[\frac{N}{C \times m/seg} \right]$$

$$1[T] = 10^4[G] \text{ Gauss}$$





Fuerza de Lorentz



Cuando además hay un campo eléctrico la Fuerza de Lorentz es

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$



Ejemplo: Fuerza sobre una carga

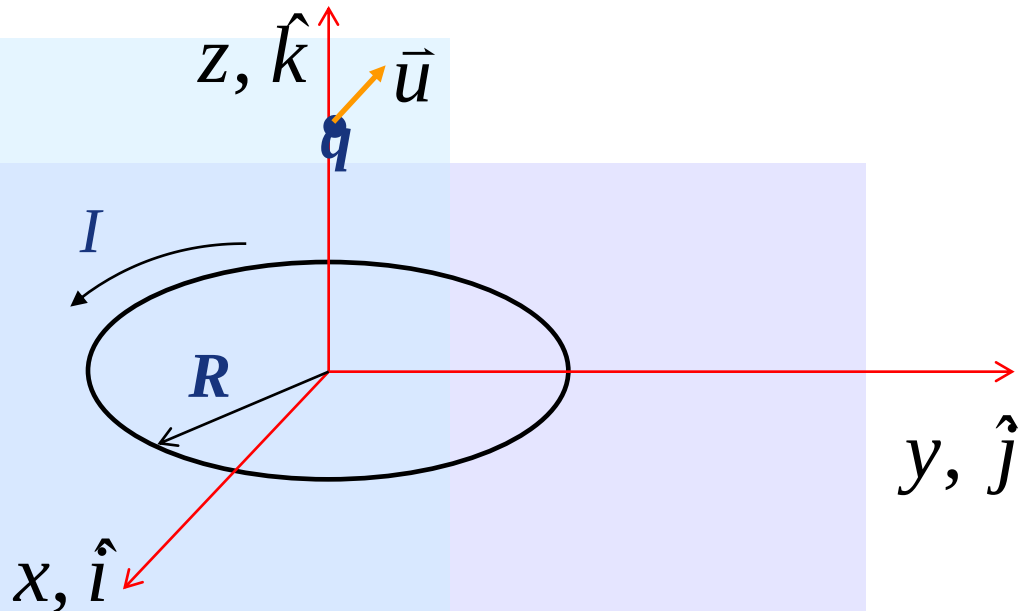
Calcular la fuerza sobre la carga q en los casos:

$$\vec{u} = 0$$

$$\vec{u} = v_o \hat{k}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{j}$$

$$\vec{u} = v_o \hat{i}$$



$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

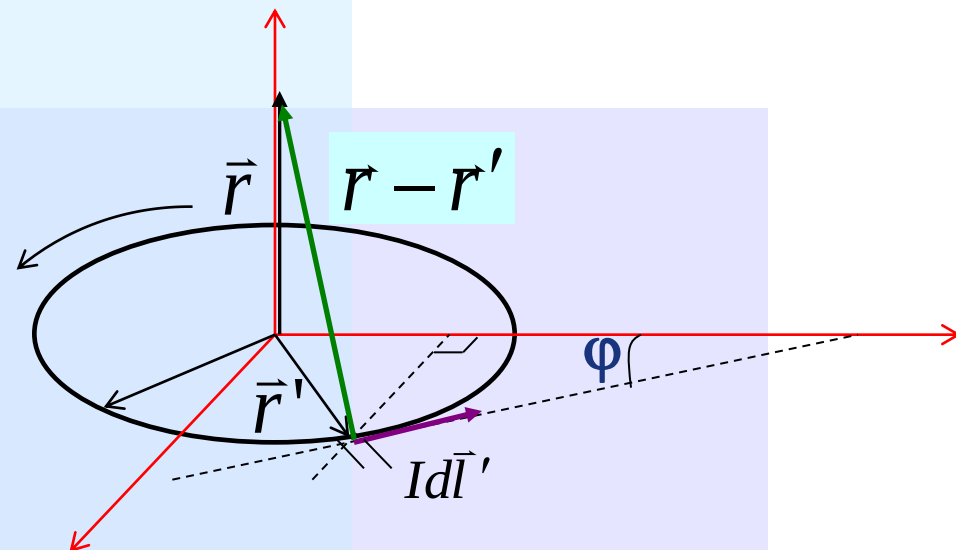
$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Regla de la mano derecha

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

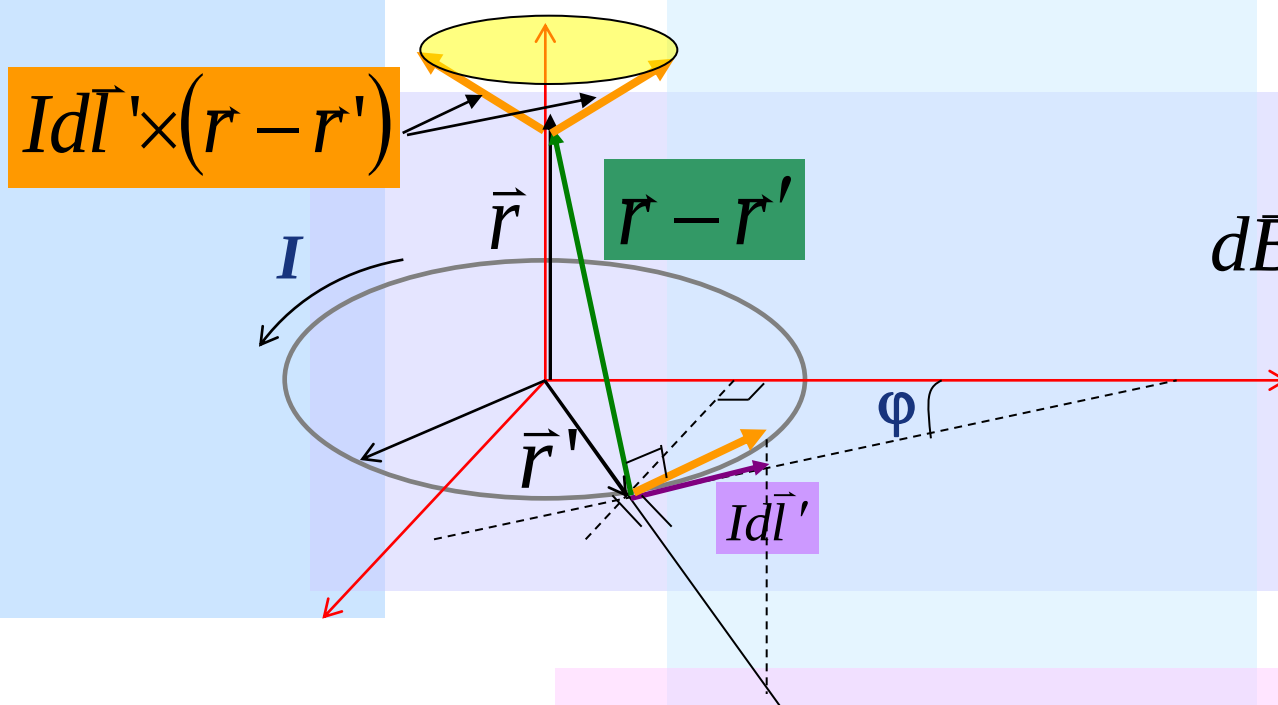


Dirección de campo está dado por el producto

$$Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$



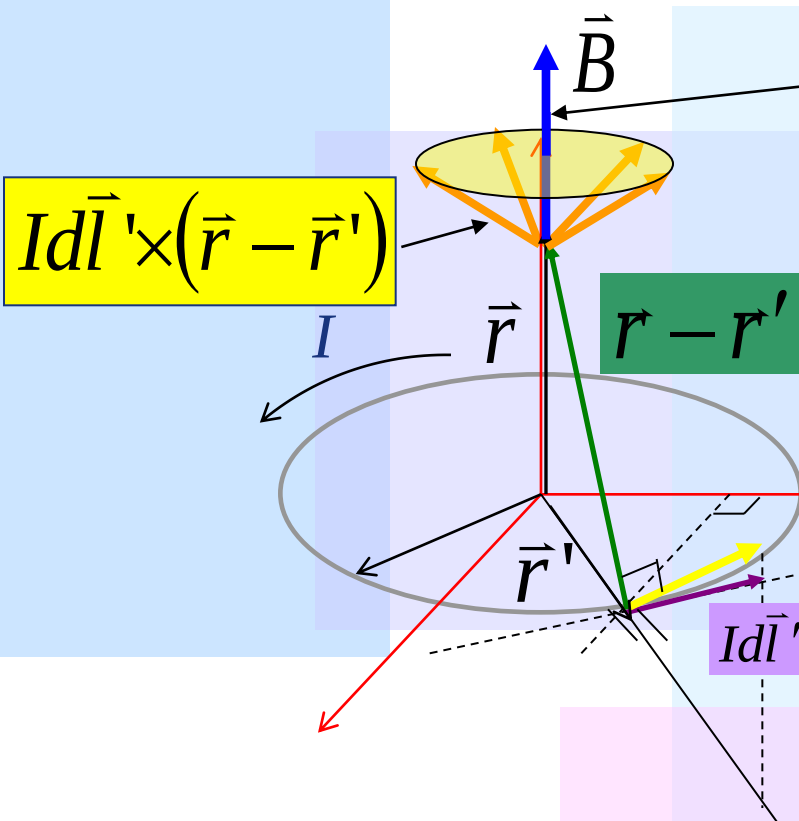
Regla de la mano derecha



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Regla de la mano derecha



Campo magnético resultante sólo tiene dirección según eje z.

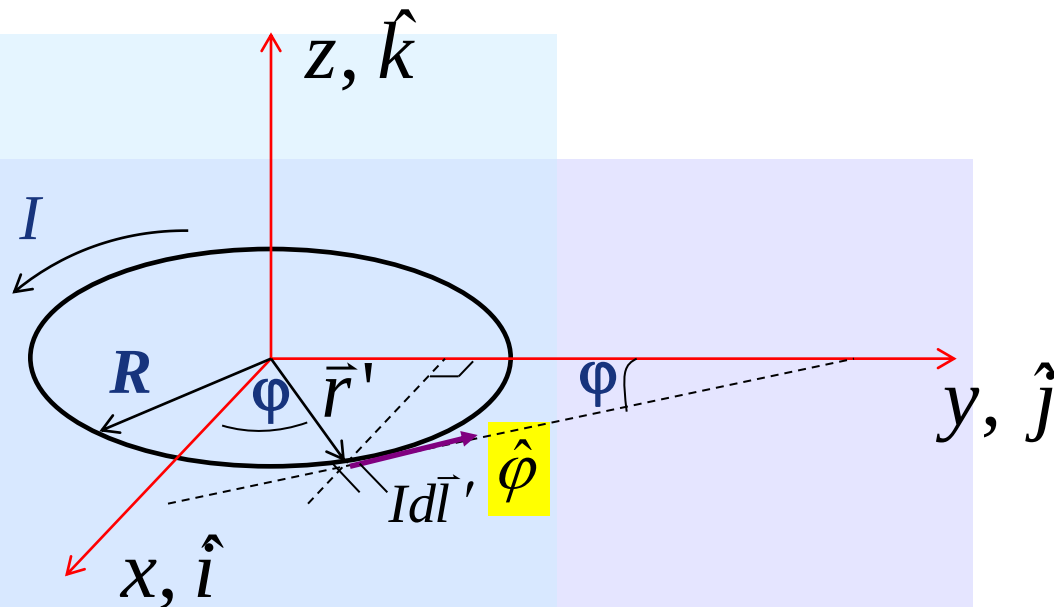
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Ejemplo

Calculemos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



$$Id\vec{l}' = Idl' \hat{\phi} = Idl' (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$

$$Id\vec{l}' = IR d\varphi (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$



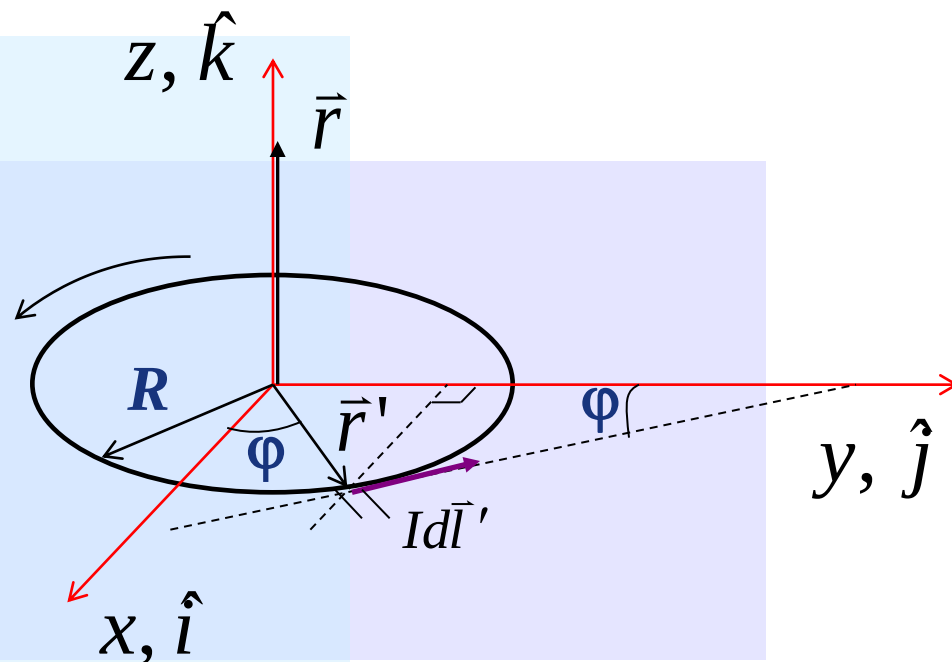
Ejemplo

Calculemos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{r}' = R\hat{\rho} = R(\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j})$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$



$$\vec{r} - \vec{r}' = -R \cos \varphi \hat{i} - R \sin \varphi \hat{j} + z\hat{k}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = [R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi + z^2]^{1/2}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = [R^2 + z^2]^{1/2}$$

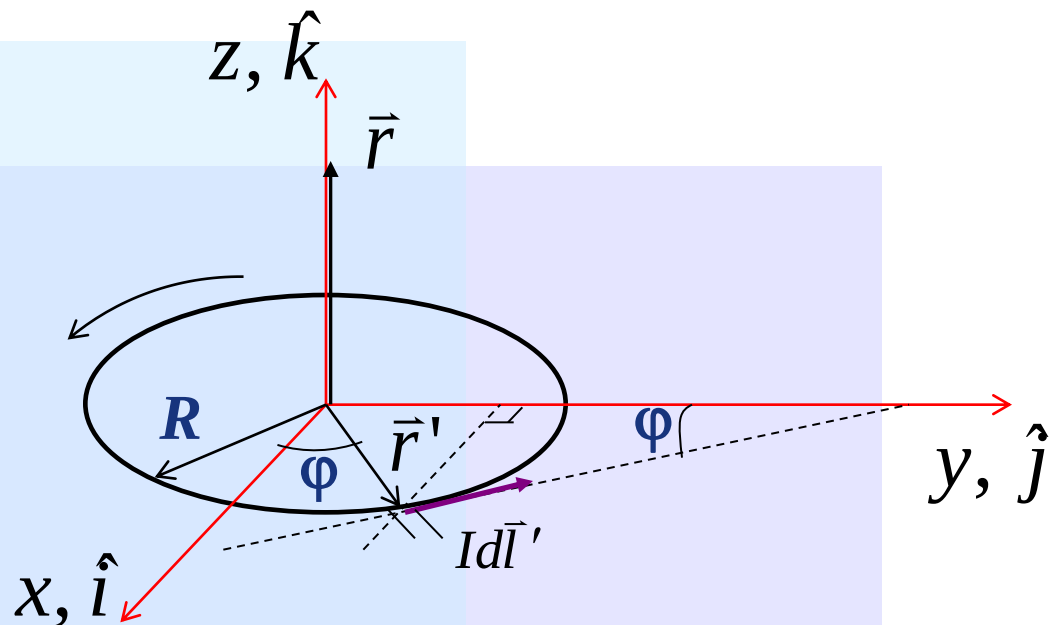


Ejemplo

Calculemos $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Circuito Γ'
 $\varphi = [0, 2\pi]$



$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{[R^2 + z^2]^{3/2}} (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) \times (-R \cos \varphi \hat{i} - R \sin \varphi \hat{j} + z \hat{k})$$

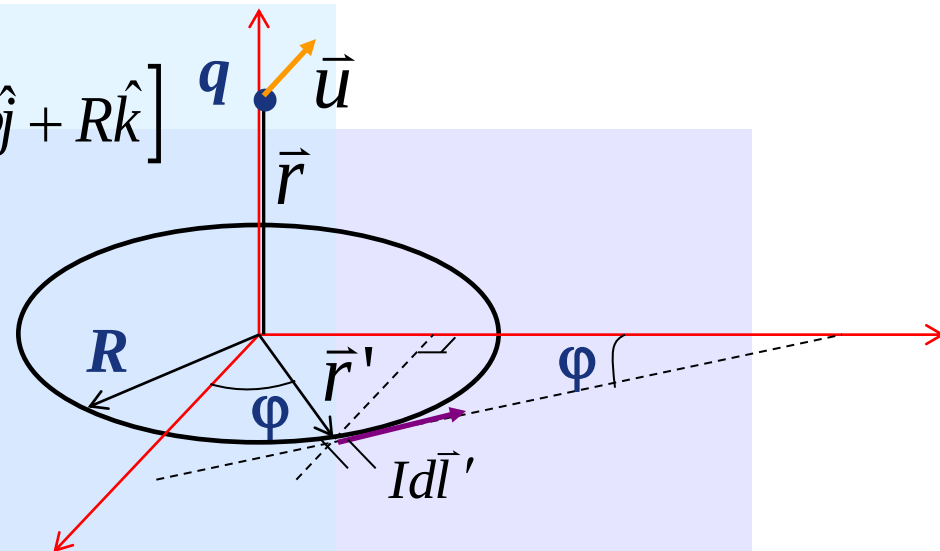
$$\Rightarrow \oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR d\varphi}{4\pi [R^2 + z^2]^{3/2}} [R \sin^2 \varphi \hat{k} + z \sin \varphi \hat{j} + R \cos^2 \varphi \hat{k} + z \cos \varphi \hat{i}]$$



Ejemplo

$$\oint_{\Gamma'} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR d\varphi}{4\pi [R^2 + z^2]^{3/2}} [z \cos \varphi \hat{i} + z \sin \varphi \hat{j} + R \hat{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2 2\pi}{4\pi [R^2 + z^2]^{3/2}} \hat{k}$$



Campo sólo tiene componente según z!

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{u} \times \frac{\mu_0 IR^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \hat{k}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q\mu_0 IR^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{u} \times \hat{k}$$



Ejemplo: Fuerza sobre una carga

$$\vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{u} \times \hat{k}$$

La fuerza sobre la carga q en cada caso es:

$$\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$$

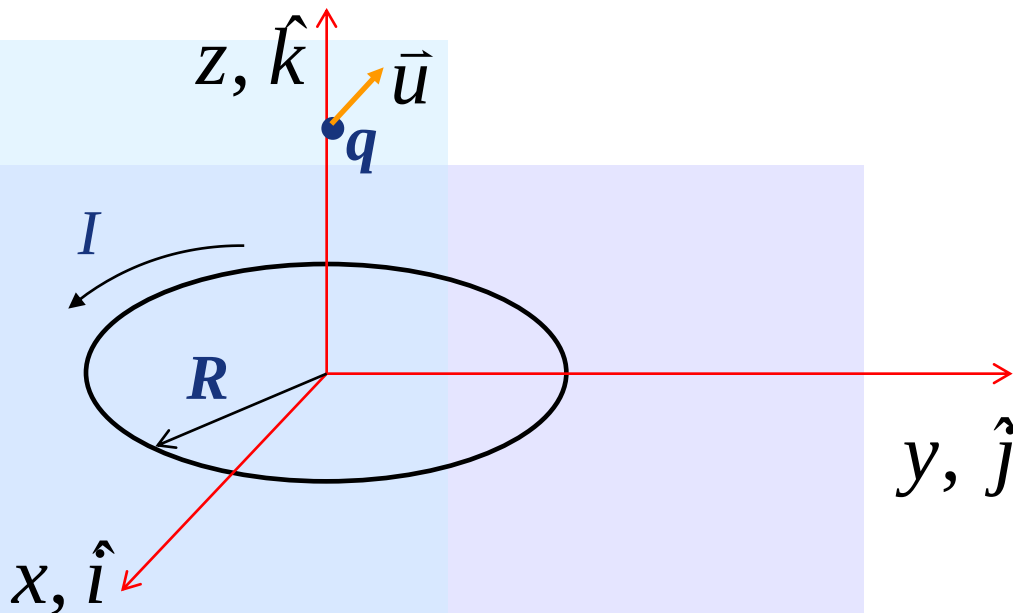
$$\vec{u} = v_0 \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{q\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} v_0 \hat{i}$$

$$\vec{u} = v_0 \hat{k} \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{u} = v_0 \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{q\mu_0 I R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} v_0 \hat{j}$$





Campo Magnético Línea Infinita

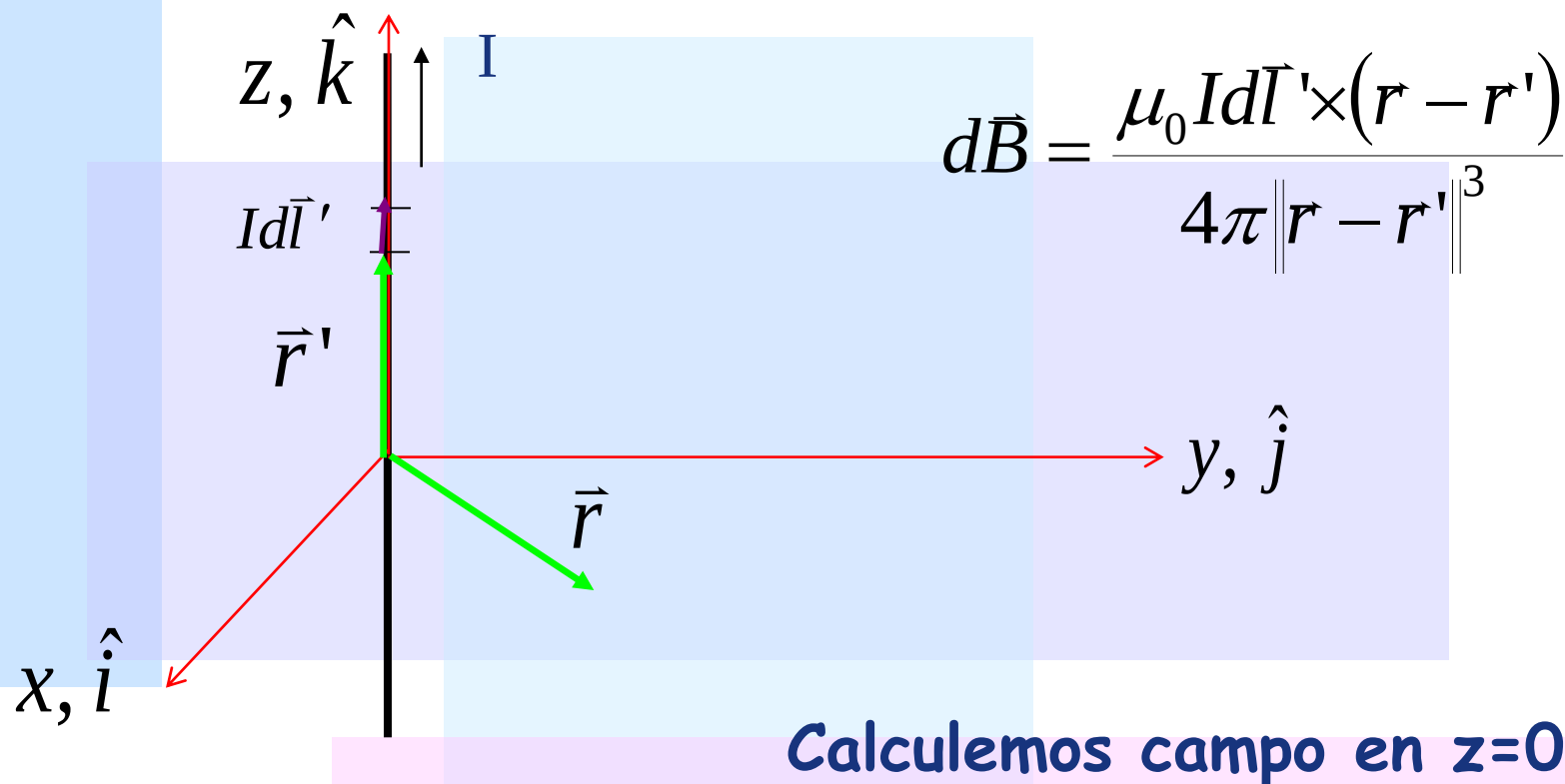


$$\vec{B} = ?$$

Dado que el conductor es infinito, el campo no varía según z .

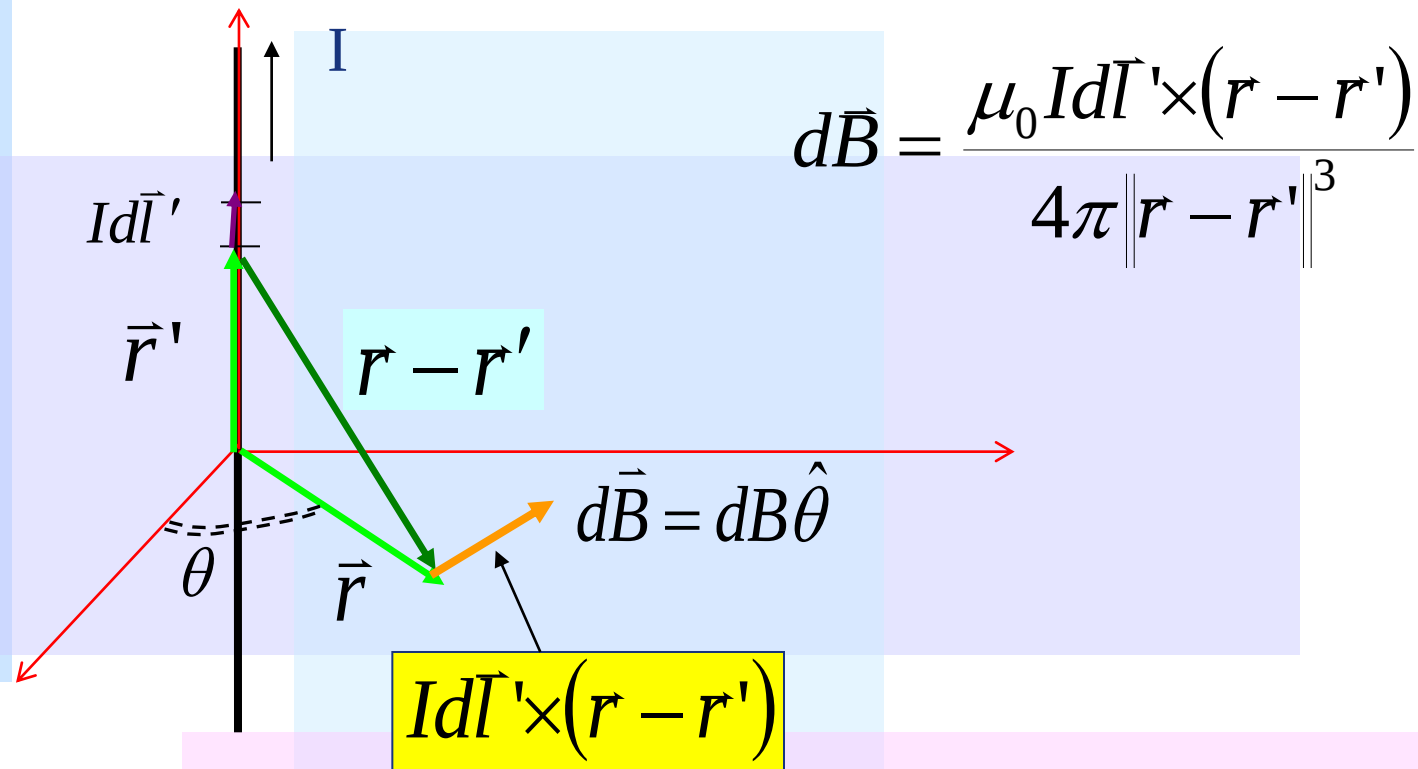


Campo Magnético Línea Infinita



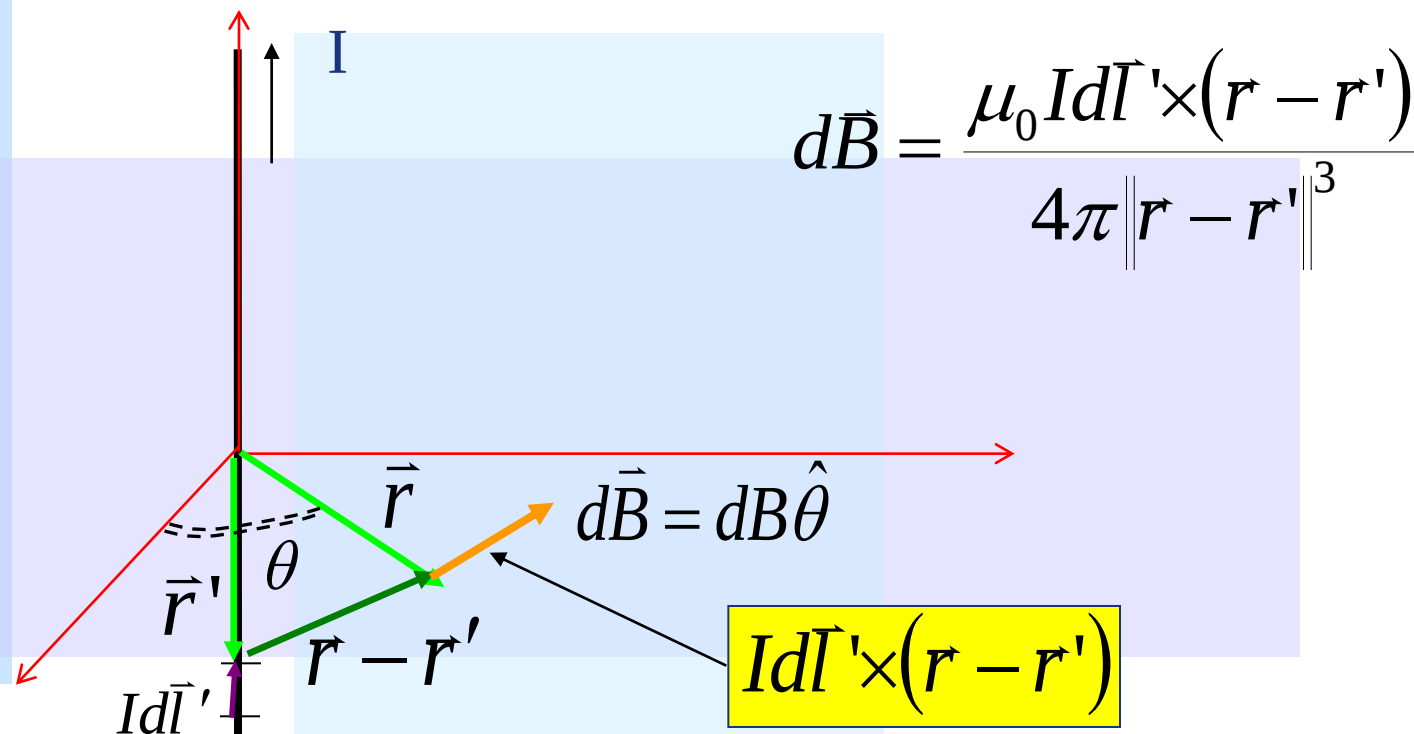


Campo Magnético Línea Infinita





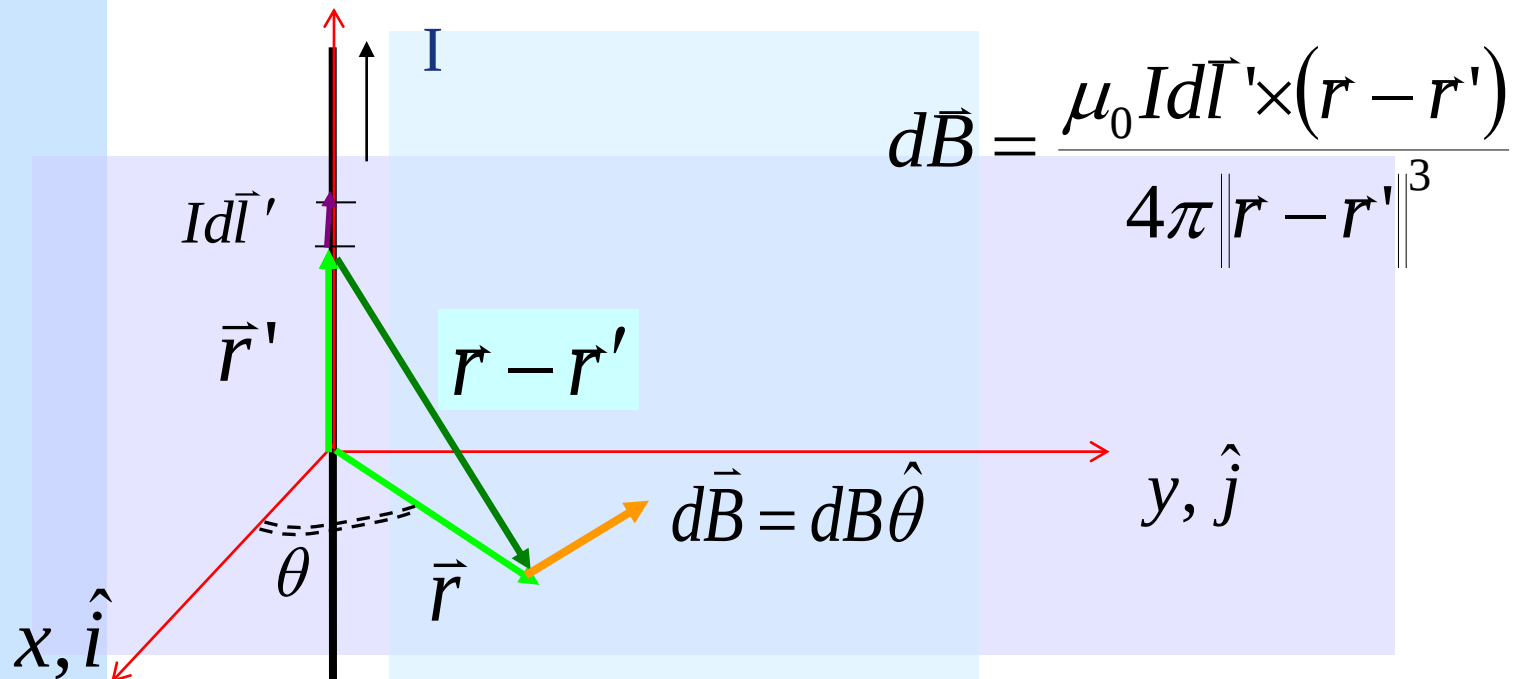
Campo Magnético Línea Infinita



Notar que la contribución de todos los elementos de corriente tiene la misma dirección según $\hat{\theta}$



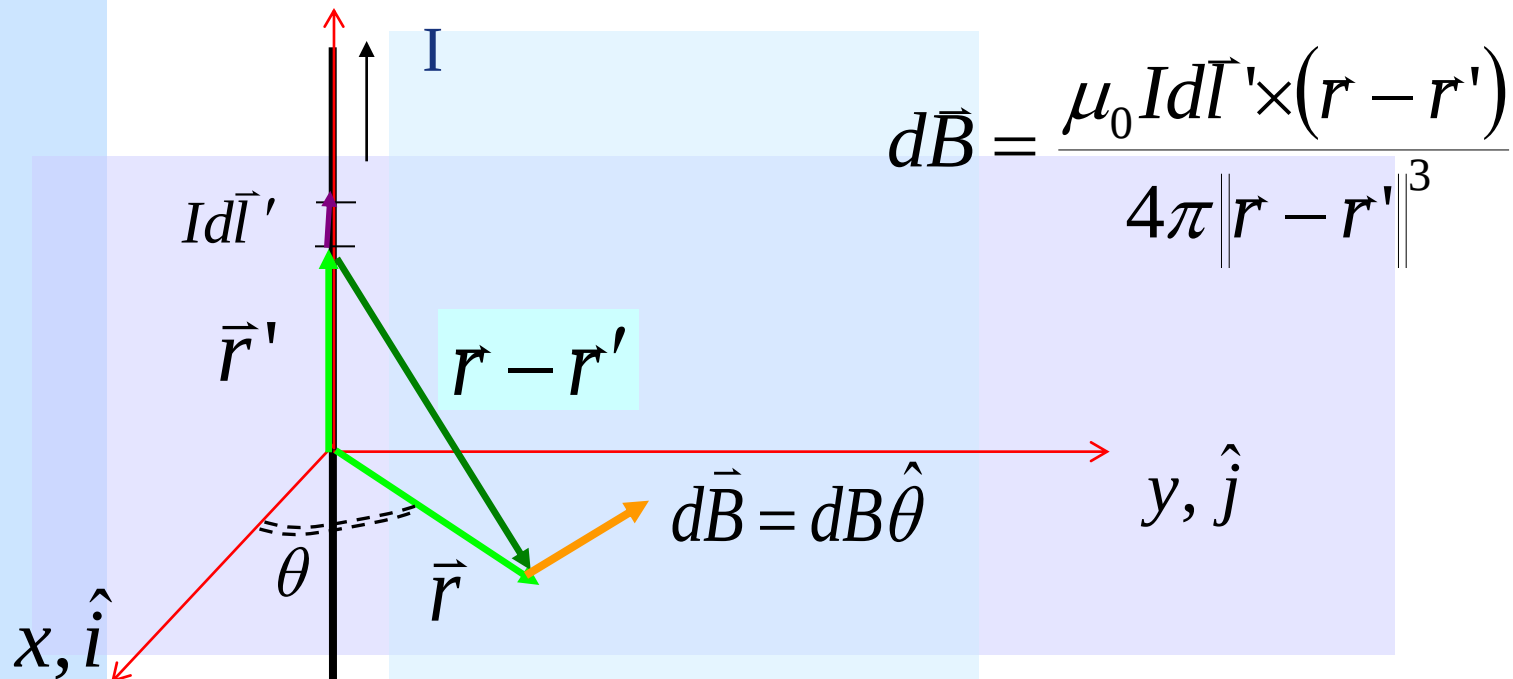
Campo Magnético Línea Infinita



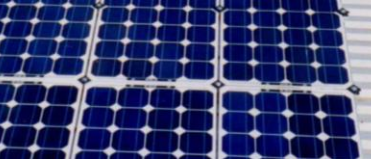
$$\left. \begin{aligned} \vec{r}' &= z'\hat{k} \\ \vec{r} &= r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \\ Id\vec{L}' &= Idz'\hat{k} \end{aligned} \right\} d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idz'\hat{k} \times (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} - z'\hat{k})}{4\pi [r^2 + z'^2]^{3/2}}$$



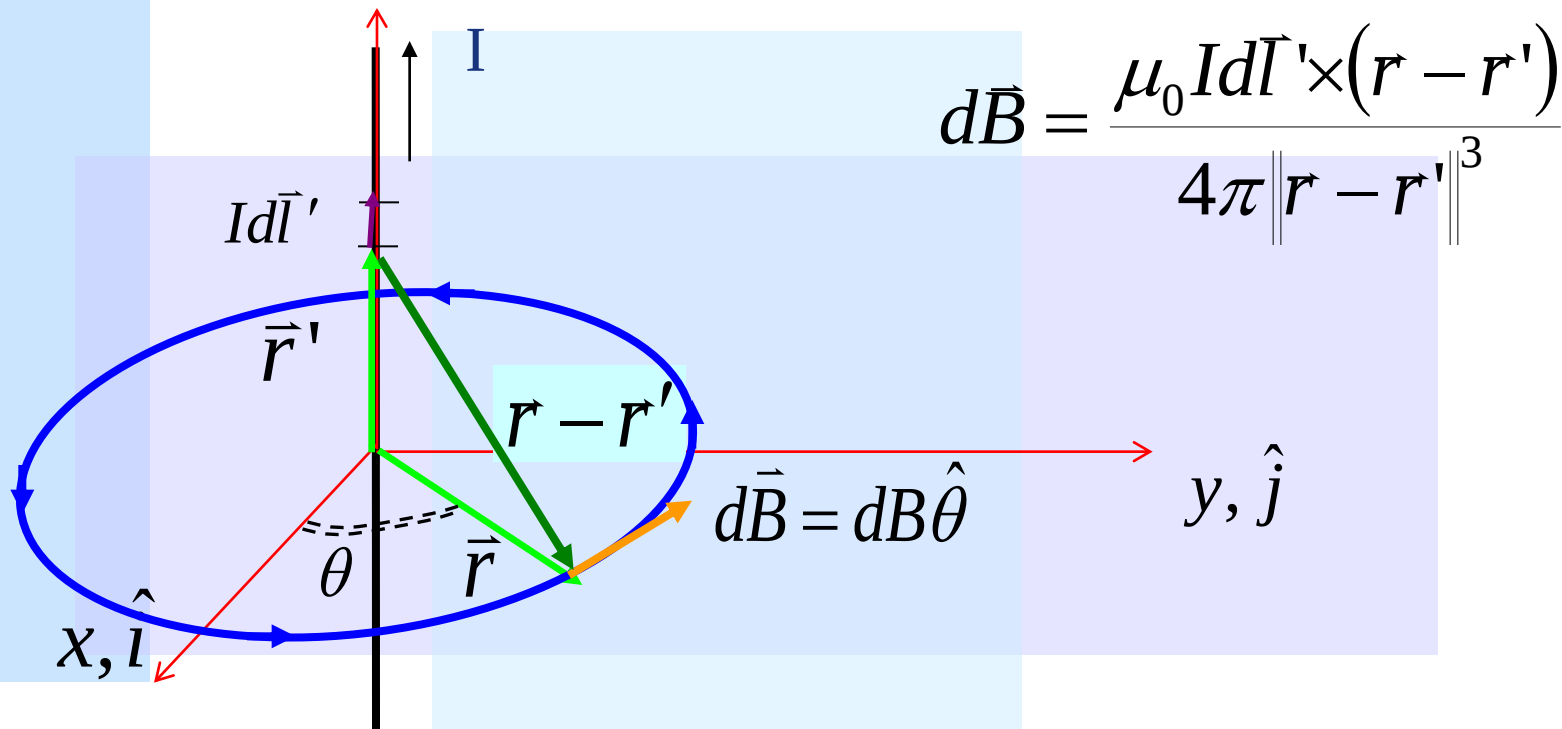
Campo Magnético Linea Infinita



$$\vec{B} = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \frac{\mu_0 I r (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}) dz'}{4\pi [r^2 + z'^2]^{3/2}}$$



Campo Magnético Línea Infinita



Se obtiene finalmente

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$



Campo magnético de distribuciones de corriente

Volumen Ω

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

$id\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{J} dv'$

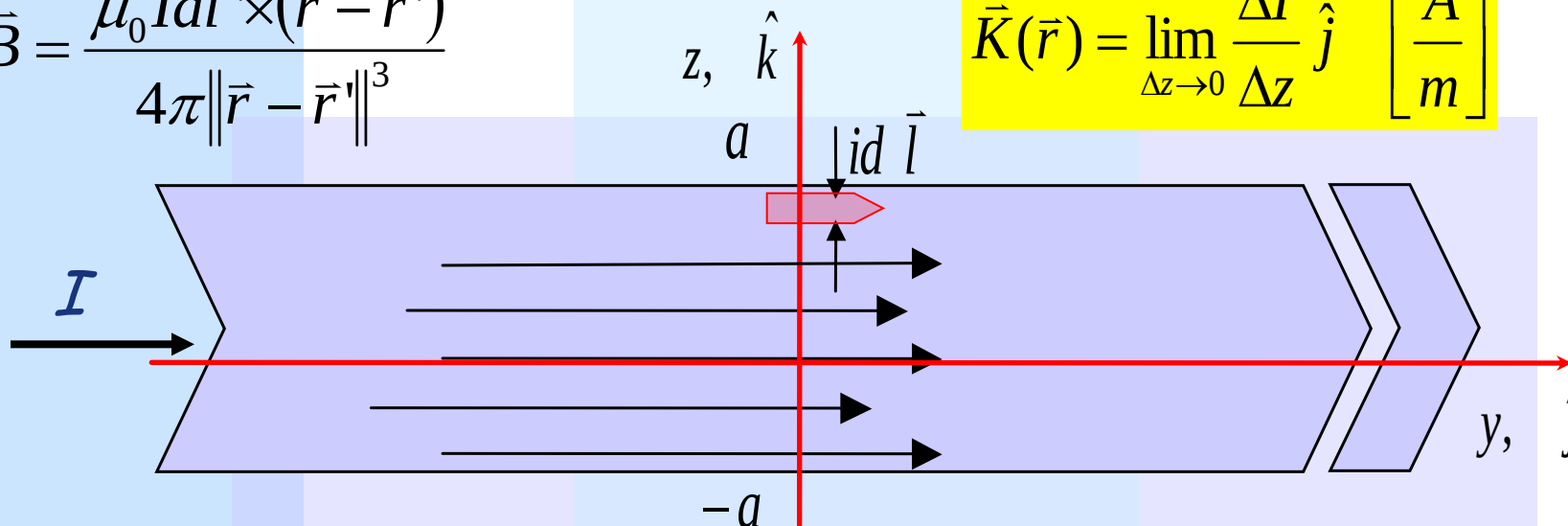
$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$



Densidad de Corriente Superficial

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{K}(\vec{r}) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta z} \hat{j} \left[\frac{A}{m} \right]$$



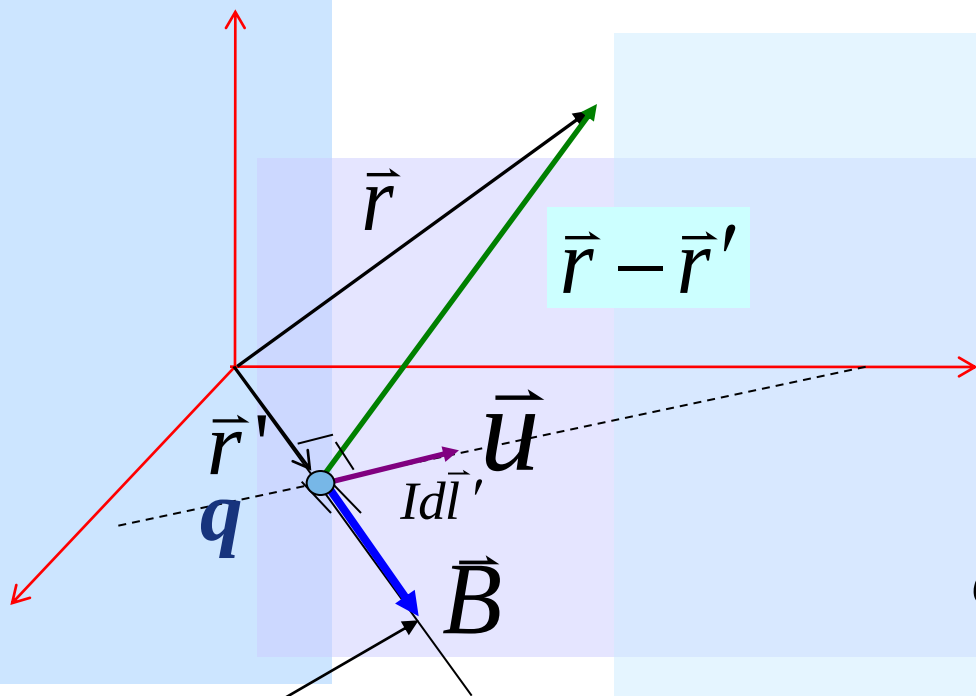
Sólo hay corriente en la superficie S del plano y - z

$$id\vec{l}' = (\vec{K} \cdot dz\hat{j}) dy\hat{j} = (K\hat{j} \cdot \hat{j}) dz dy\hat{j} = K dz dy\hat{j} = \vec{K} ds$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$$



Campo Magnético de una Carga Puntual



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$Id\vec{l}' = \frac{dq}{dt} dl \hat{u} = dq \frac{dl}{dt} \hat{u}$$

$$dq \rightarrow q, \quad \frac{dl}{dt} = \|\vec{u}\| \quad y \quad d\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

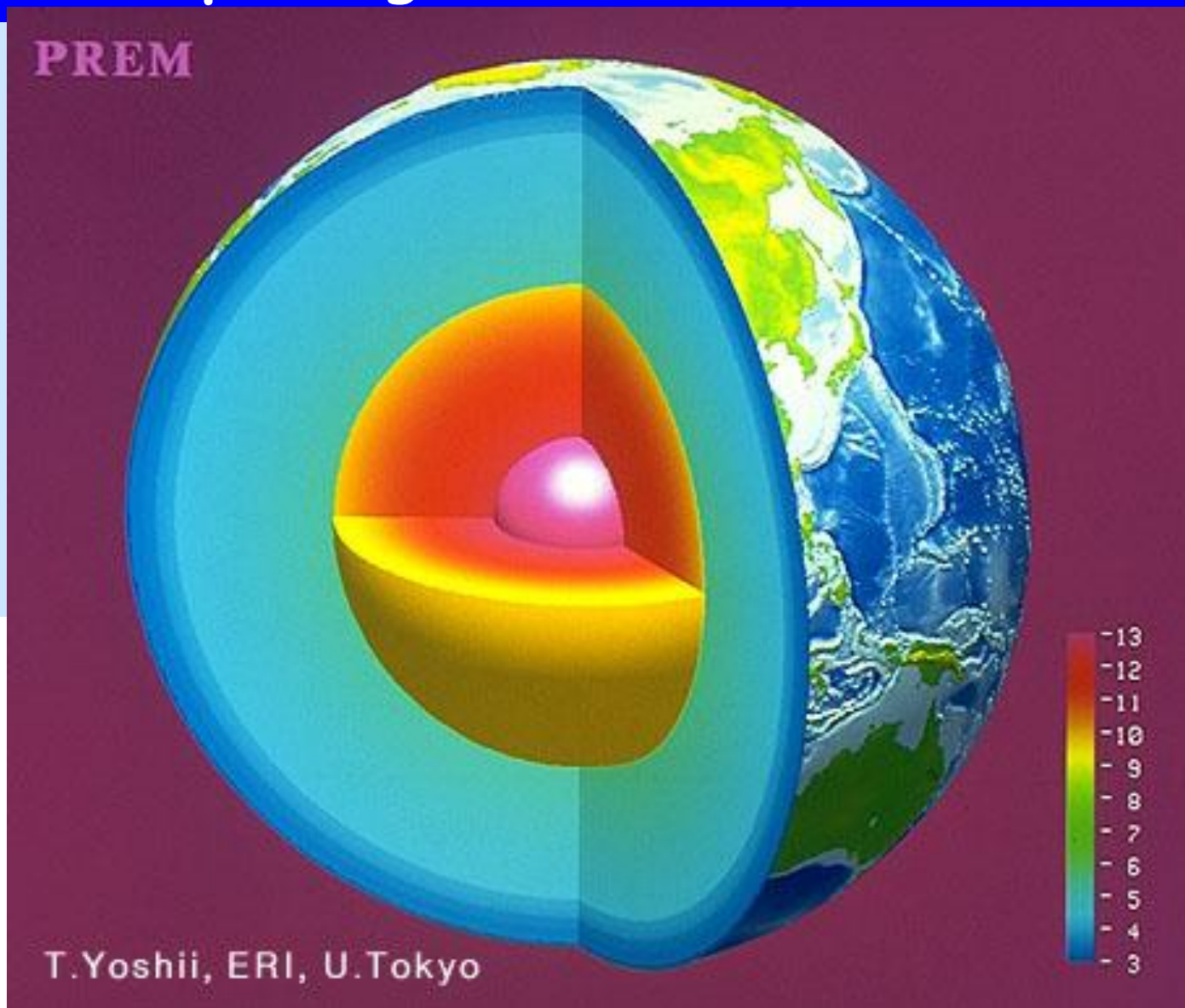
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{u} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

Campo magnético resultante perpendicular a la velocidad



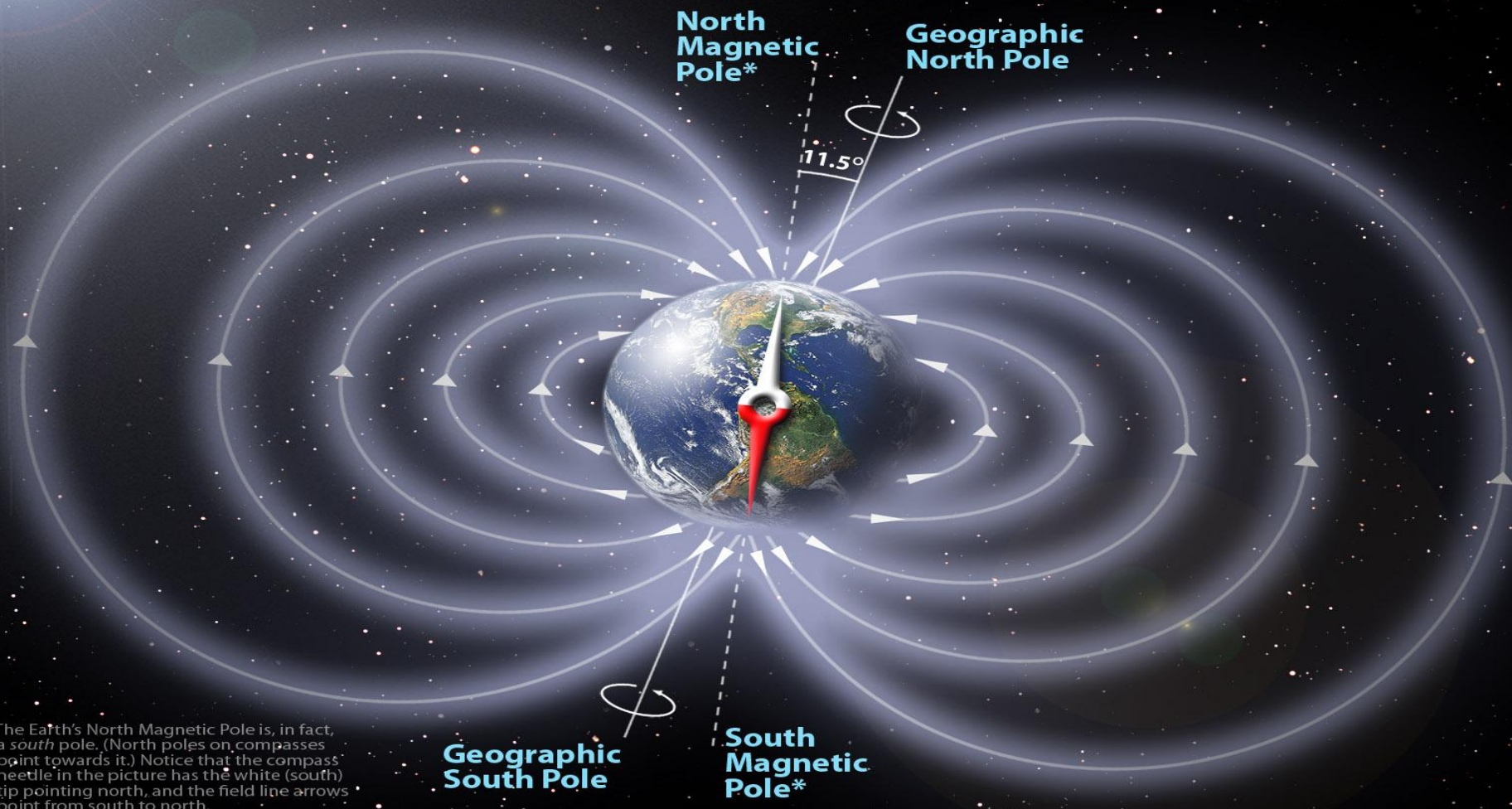
Campo Magnético Terrestre





Campo Magnético Terrestre

The Earth's Magnetic Field



*The Earth's North Magnetic Pole is, in fact, a *south* pole. (North poles on compasses point towards it.) Notice that the compass needle in the picture has the white (south) tip pointing north, and the field line arrows point from south to north.

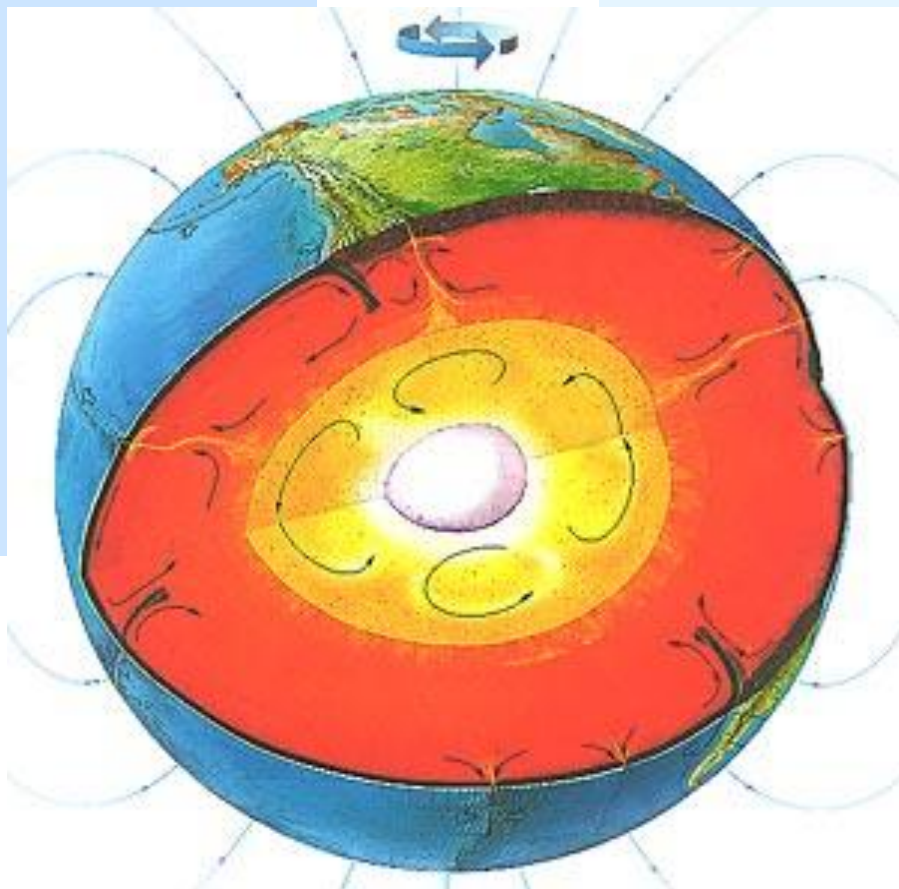
Larger versions of this image are available: contact peter.reid@ed.ac.uk

Peter Reid, 2007

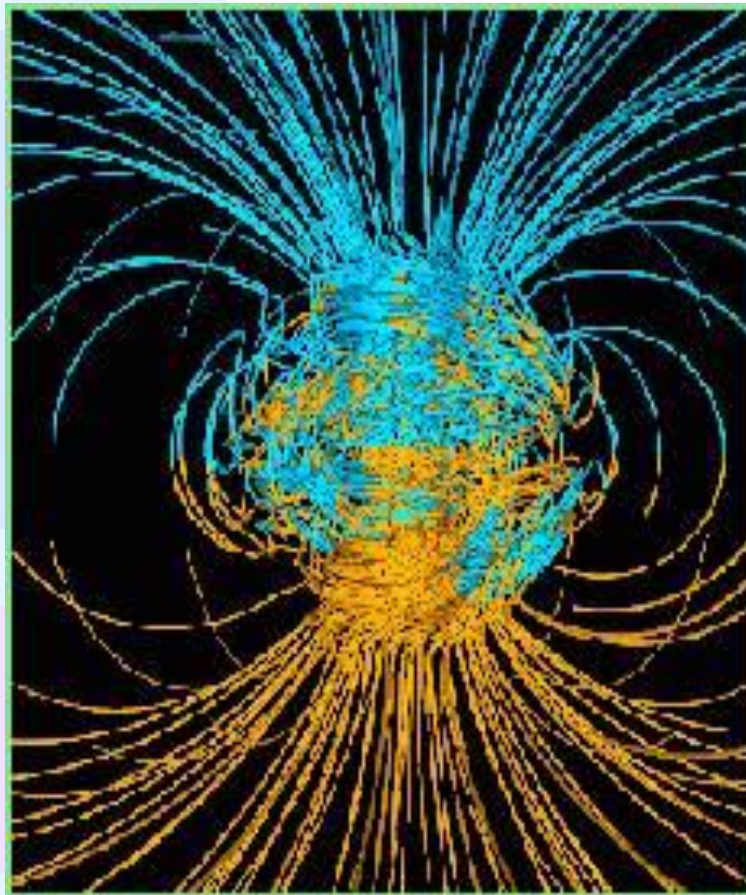


Campo Magnético Terrestre

Convección



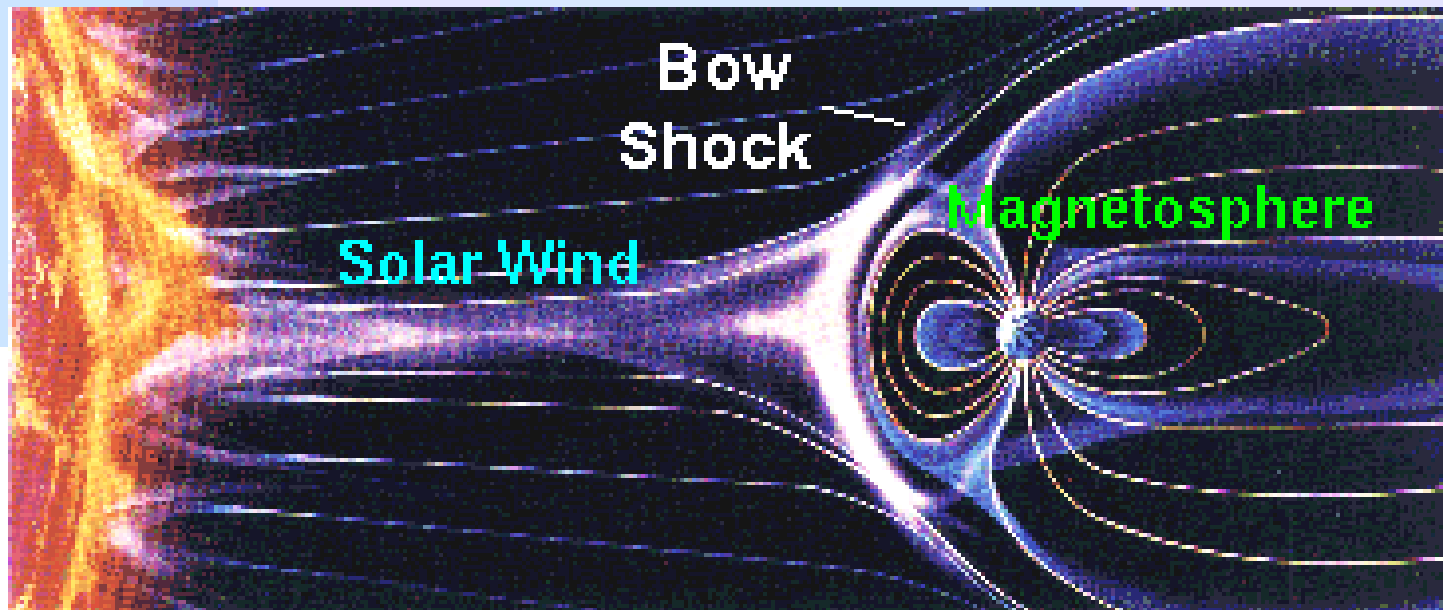
Geodínamo





Campo Magnético Terrestre

- Viento solar: Gases ionizados que vienen del sol a 400Km/s
- Varían con la actividad de la superficie solar

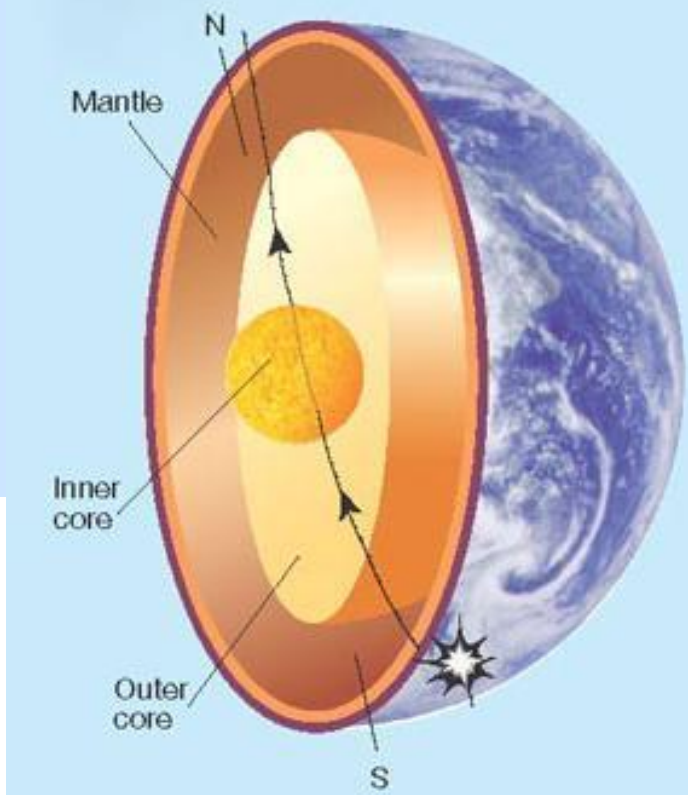


Fuente: National Geophysical Data Center, USA

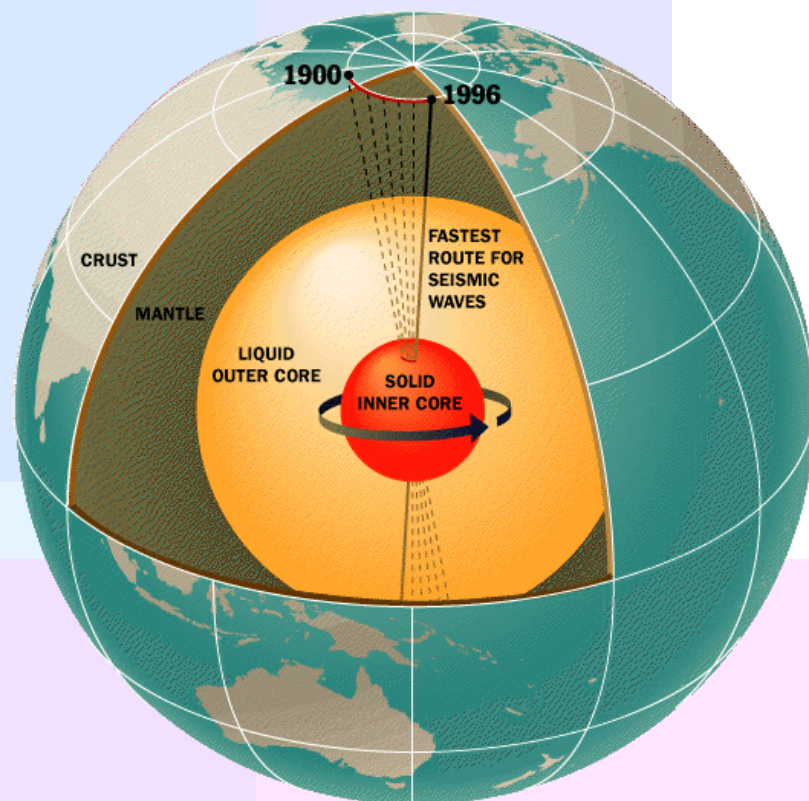


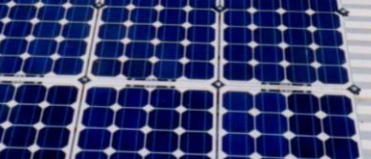
Campo Magnético Terrestre

Estudio del núcleo



Anisotropía y super-rotación





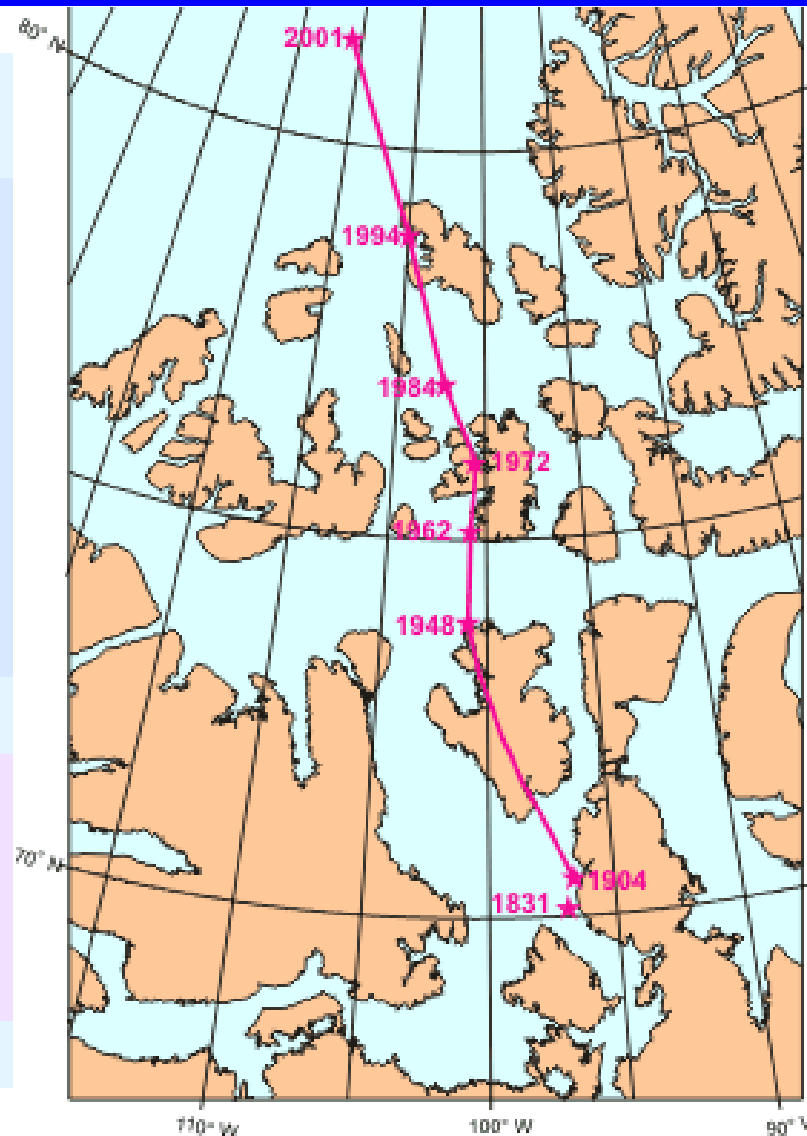
Campo Magnético Terrestre

Movimiento del polo norte magnético en el
Artico de Canadá en el periodo 1831-2001.
Fuente: Geological Survey of Canada.

Se mueve a 40 km cada año, approx.

Ultimamente se mueve crecientemente mas
rápido.

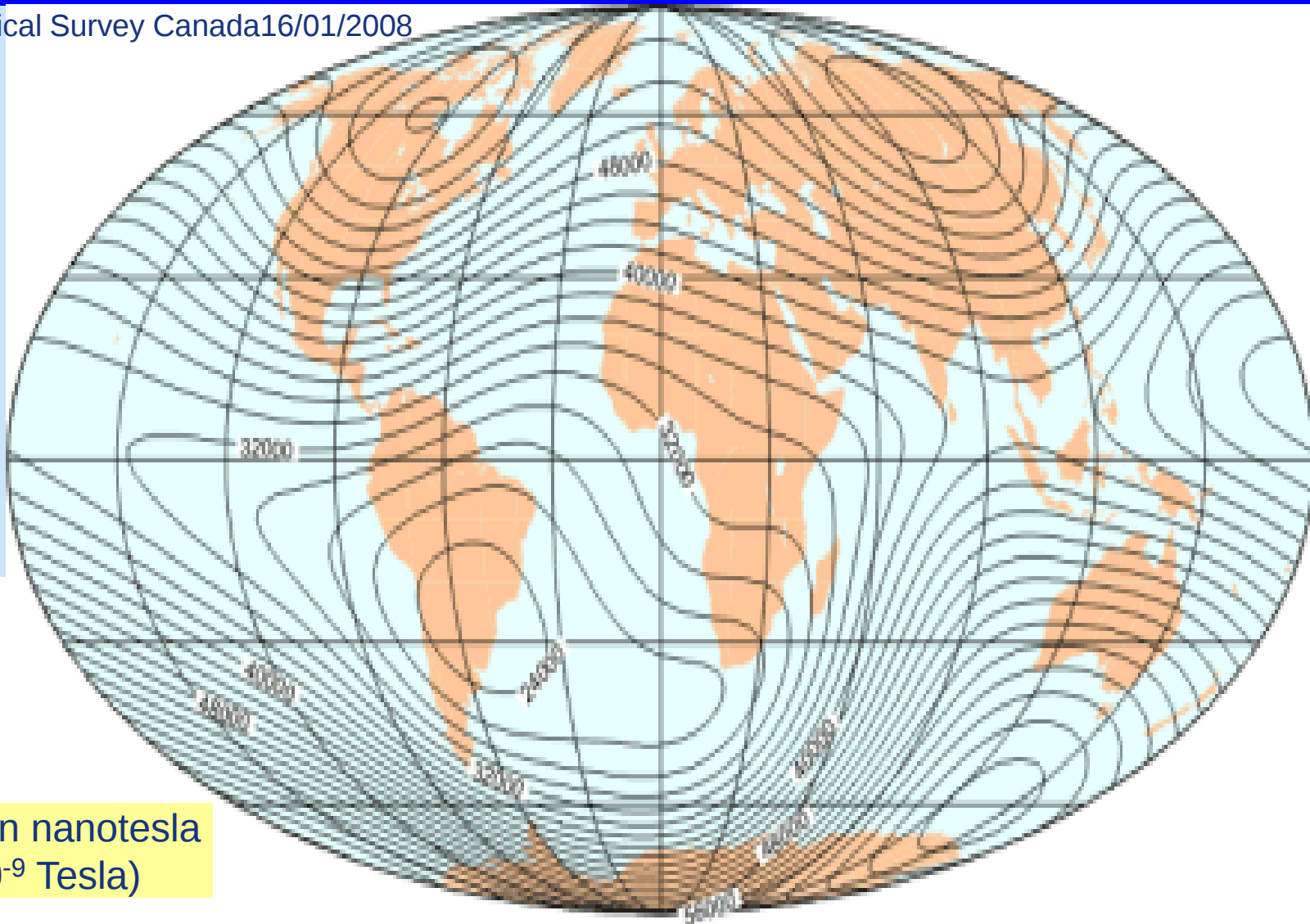
La última vez que el polo magnético se
cambio al otro lado de la tierra fue hace
780.000 años





Campo Magnético Terrestre

Fuente: Geological Survey Canada 16/01/2008



Medido en nanotesla
 $1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ Tesla}$