

FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 16
Corriente Eléctrica-IV

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

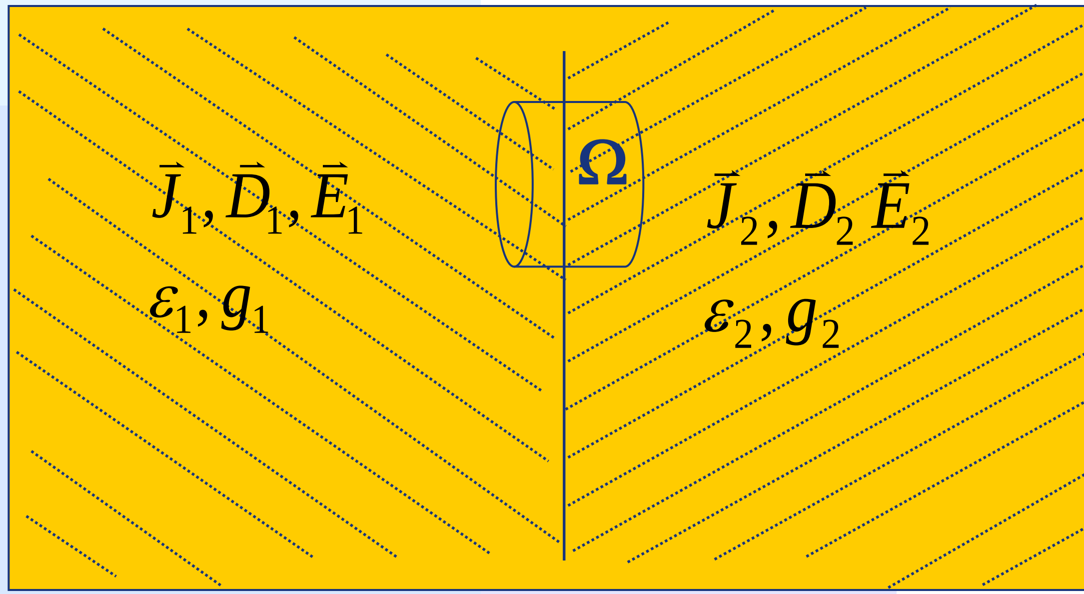
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INDICE

Condiciones de Borde para J
Ley de Voltajes de Kirchoff
Ley de Corrientes de Kirchoff
Ejemplos

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

De las condiciones de borde para campos teníamos:



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \Rightarrow \frac{\vec{J}_{1t}}{g_1} = \frac{\vec{J}_{2t}}{g_2}$$

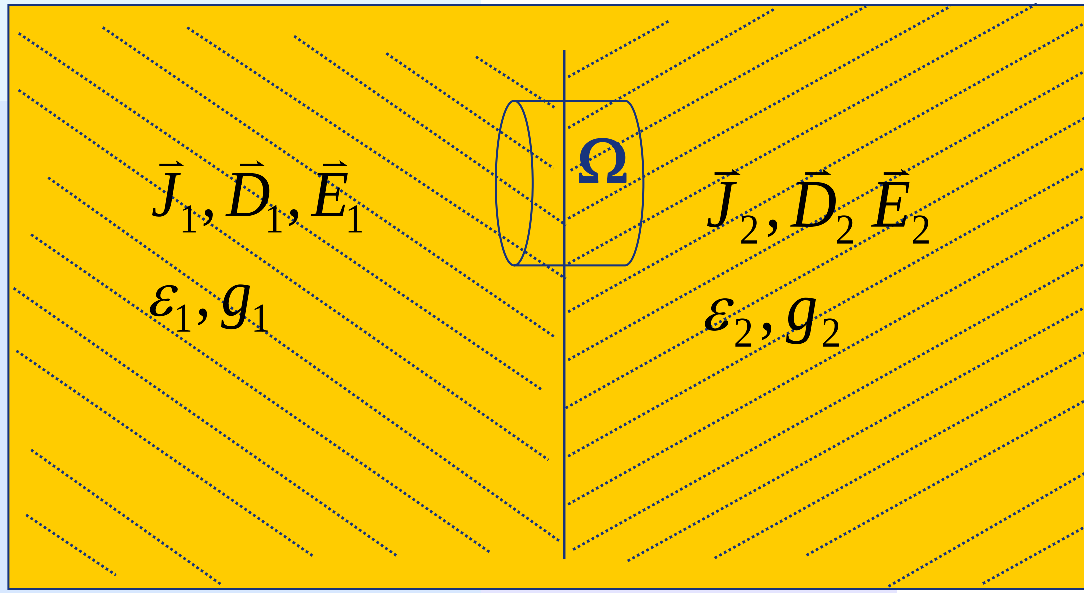
$$\vec{D}_{1N} - \vec{D}_{2N} = \sigma_{libre}$$

$$\varepsilon_1 \vec{E}_{1n} - \varepsilon_2 \vec{E}_{2n} = \sigma_l \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{\vec{J}_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{\vec{J}_{2n}}{g_2} = \sigma_l$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\vec{J}_{1t}}{g_1} = \frac{\vec{J}_{2t}}{g_2}}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



Dos Casos:

I. Situación Estacionaria

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

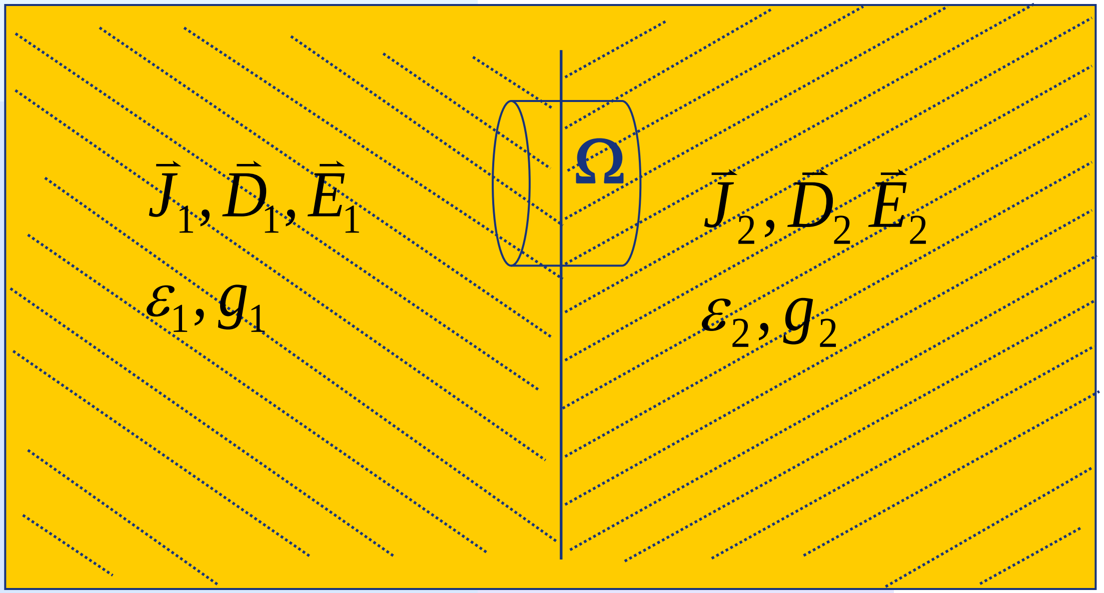
$$\Rightarrow J_{1n} = J_{2n}$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

I. Situación Estacionaria

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad \Rightarrow J_{1n} = J_{2n}$$

$$\Rightarrow g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n}$$



Notar que aquí sigue cumpliéndose la condición de borde para $\vec{D} \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l$

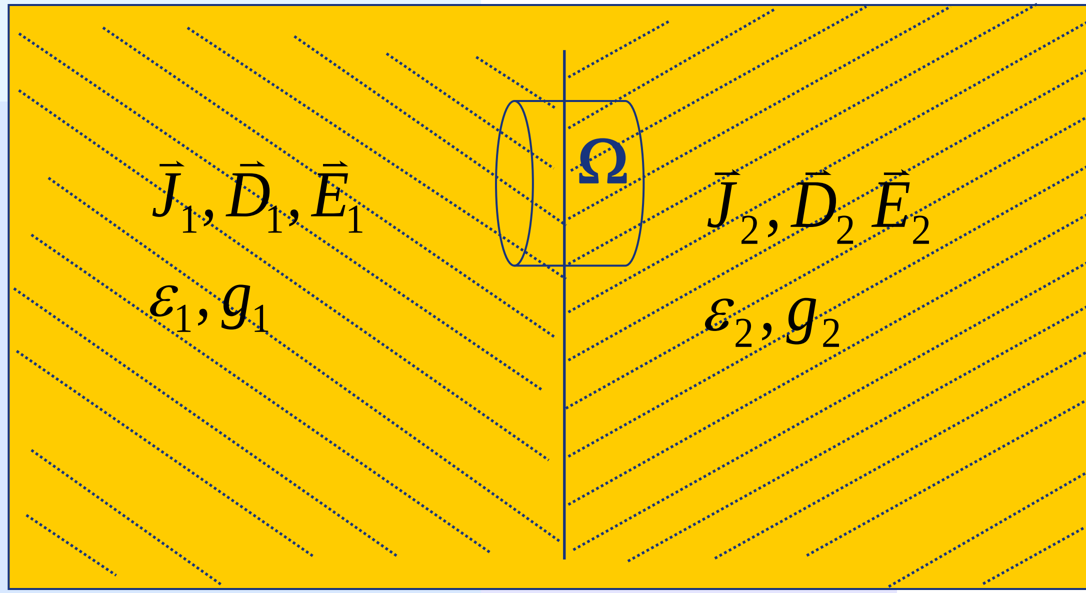
$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 \frac{g_1 E_{1n}}{g_2} = \sigma_l \Rightarrow E_{1n} = \left(\frac{g_2}{\varepsilon_1 g_2 - \varepsilon_2 g_1} \right) \sigma_l$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

I. Situación Estacionaria

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad \Rightarrow J_{1n} = J_{2n}$$

$$E_{1n} = \left(\frac{g_2}{\varepsilon_1 g_2 - \varepsilon_2 g_1} \right) \sigma_l$$



Similarmente:

$$E_{2n} = \left(\frac{g_1}{\varepsilon_1 g_2 - \varepsilon_2 g_1} \right) \sigma_l$$

En la situación estacionaria se acumula una densidad de carga en la interfaz.

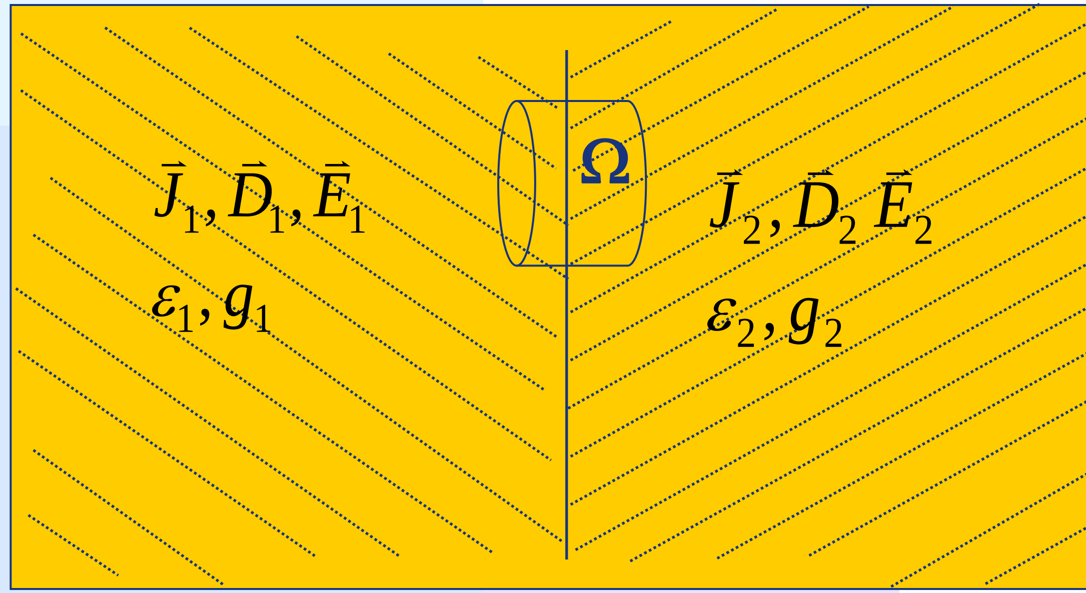
Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

II. Situación transitoria

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \neq 0$$

$$\oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_{2n}\Delta S - J_{1n}\Delta S$$



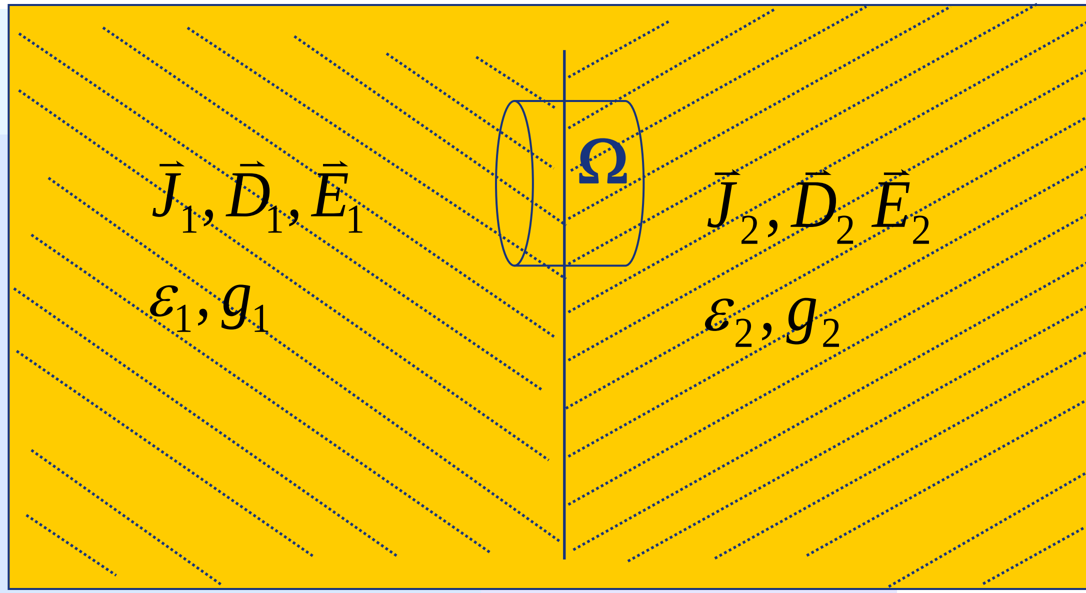
Haciendo tender la altura del cilindro a cero $\frac{\partial Q}{\partial t}$ se acumula sólo en la superficie que limita los medios

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma \cdot \Delta S\right)$$

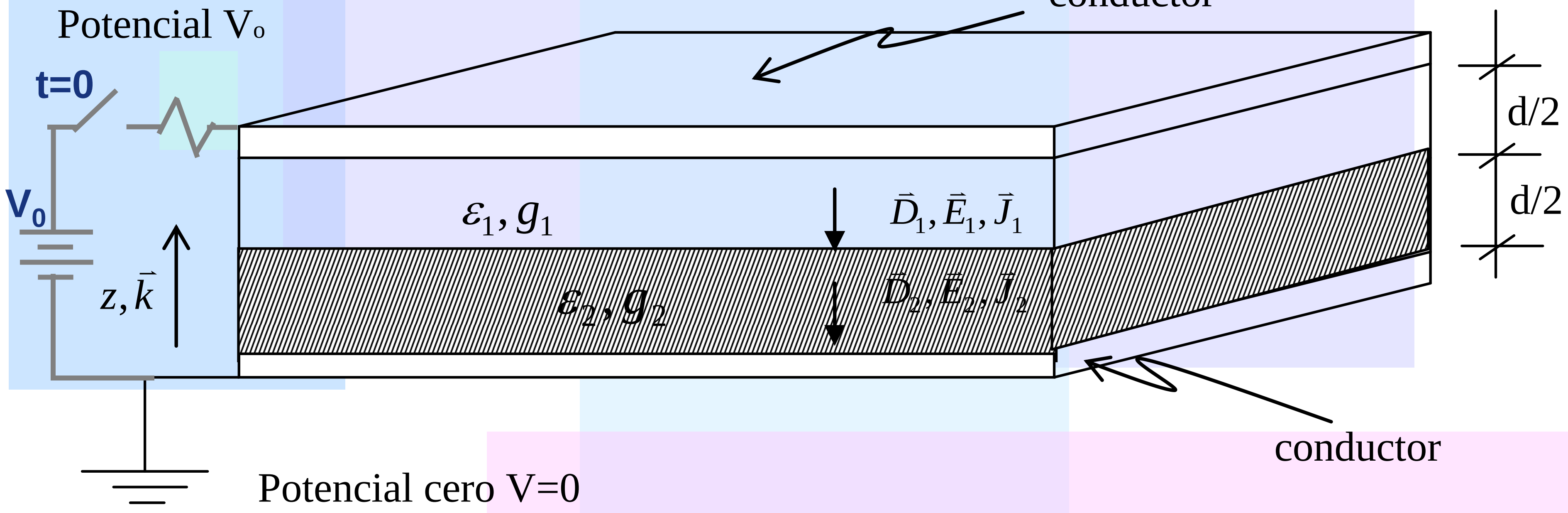
$$\Rightarrow J_2 \Delta S - J_1 \Delta S + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\Delta S = 0$$

$$\Rightarrow J_2 - J_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$



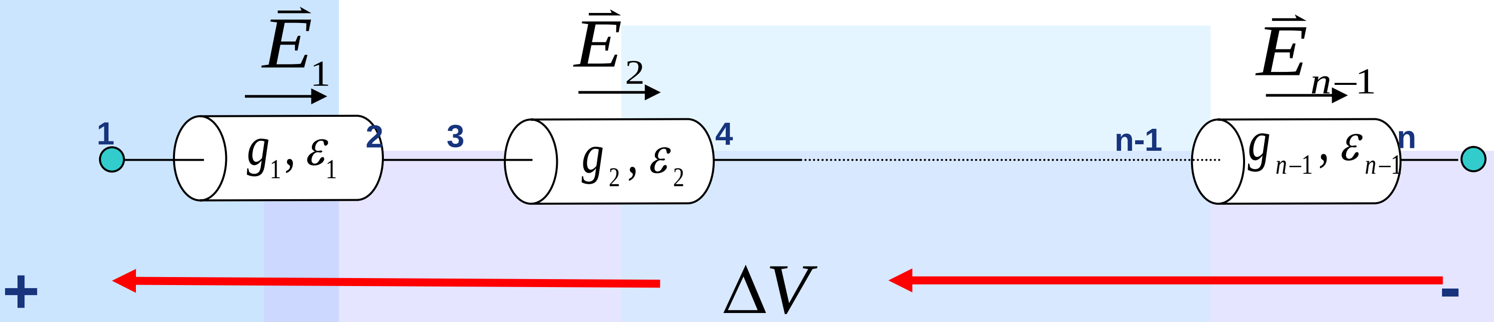
En la situación transitoria se registra una variación de la carga en la superficie de separación entre los dos medios

EJEMPLO Propuesto



Encontrar la distribución de carga superficial en función del tiempo.

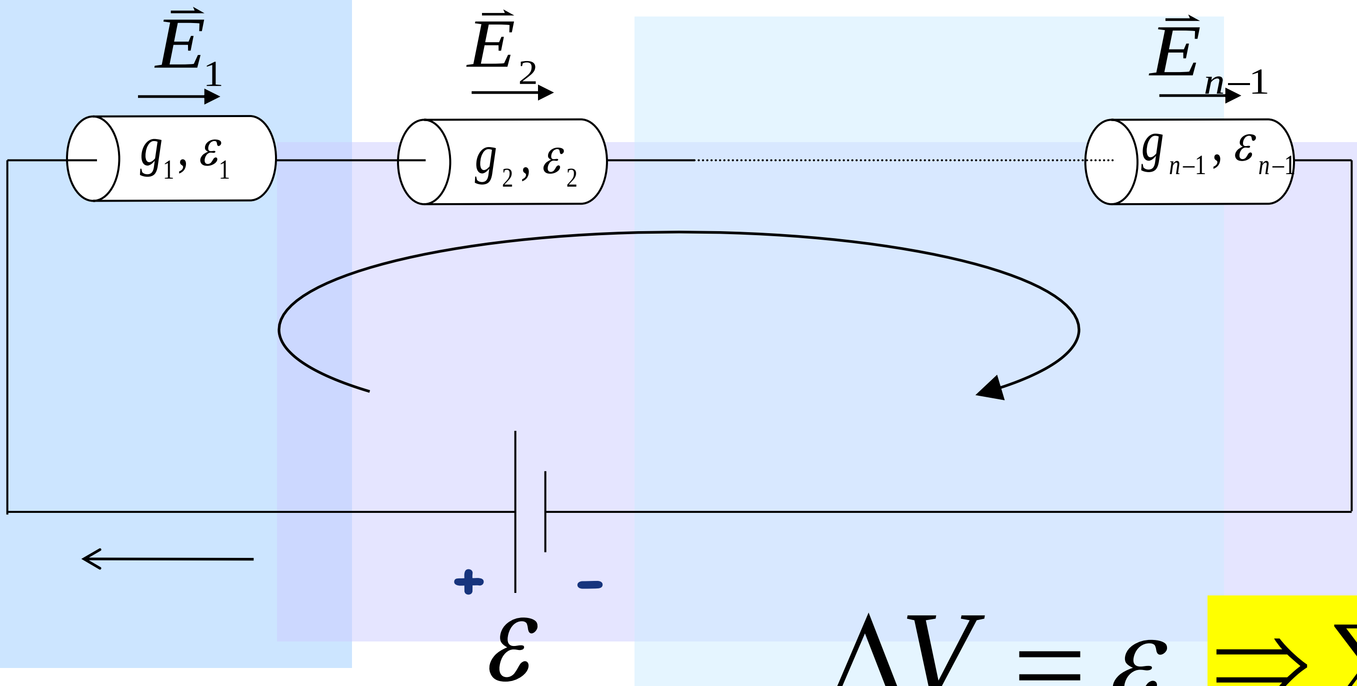
Ley de Voltajes de Kirchoff



$$\Delta V = \int_1^2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \ldots + \int_{n-1}^{n} \vec{E}_{n-1} \cdot d\vec{l} \quad (5.47)$$

$$\Delta V = \sum E_i l_i = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + \ldots + (V_{n-1} - V_n) \quad (5.48)$$

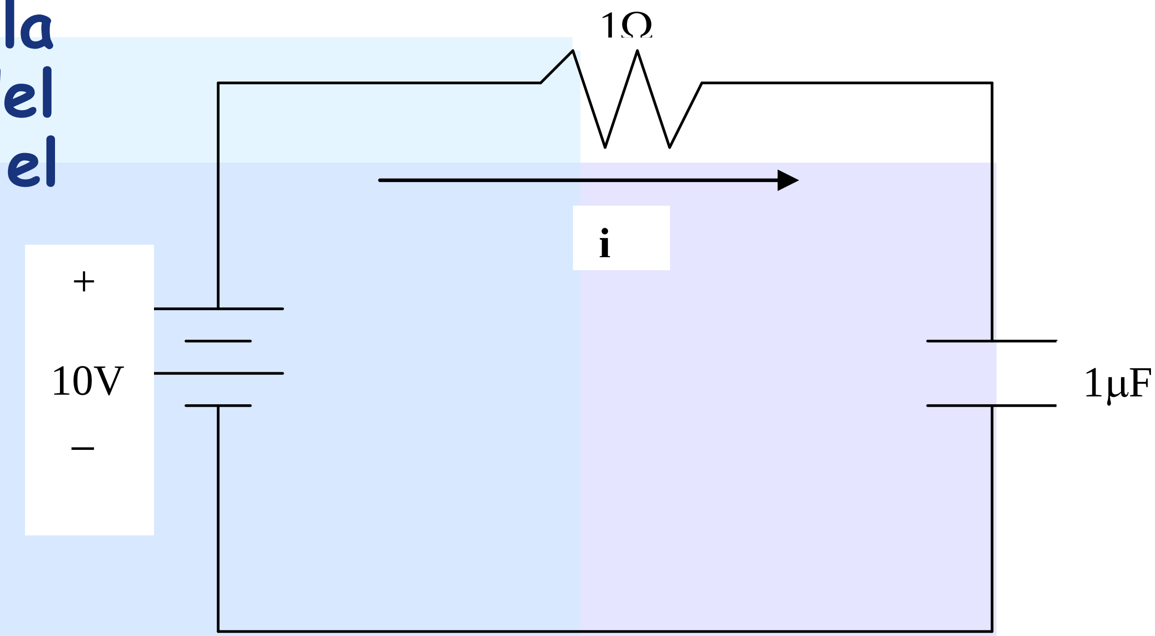
Ley de Voltajes de Kirchoff



$$\Delta V = \varepsilon \Rightarrow \sum \Delta V_i - \varepsilon = 0$$

Ejemplo

Encontrar el valor de la corriente en función del tiempo si inicialmente el condenador tiene una carga Q_0



$$\varepsilon = 10, \quad \Delta V_1 = Ri, \quad \Delta V_2 = V_c$$

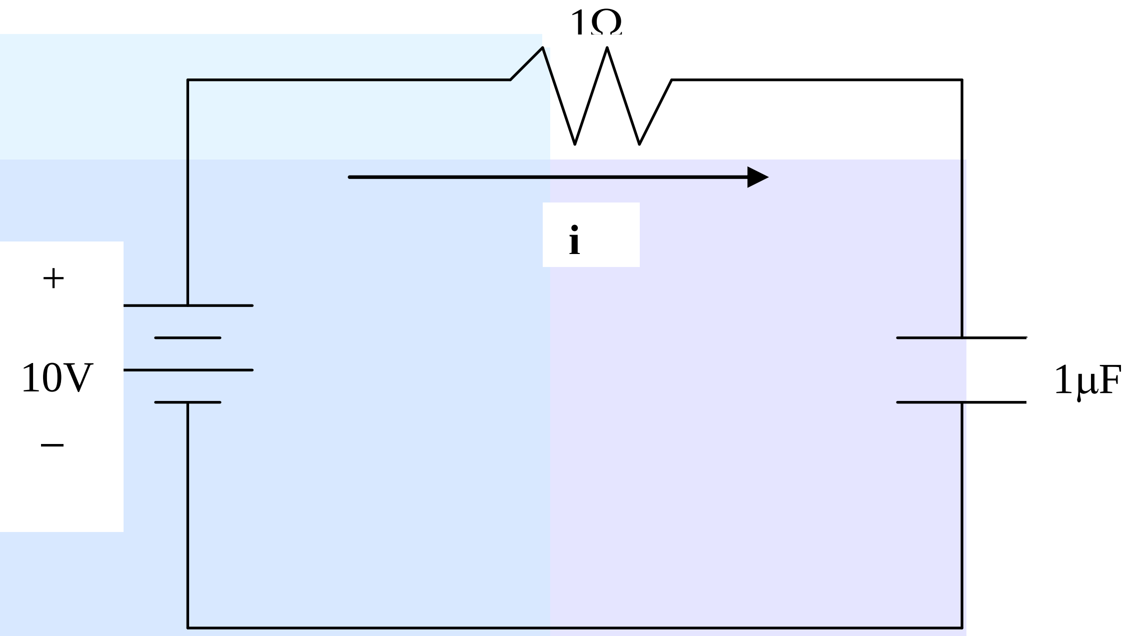
$$\sum \Delta V_i - \varepsilon = 0 \Rightarrow \quad Ri + V_c - 10 = 0$$

Ejemplo

$$i = i_c = \frac{dq_c}{dt}$$

$$q_c = CV_c$$

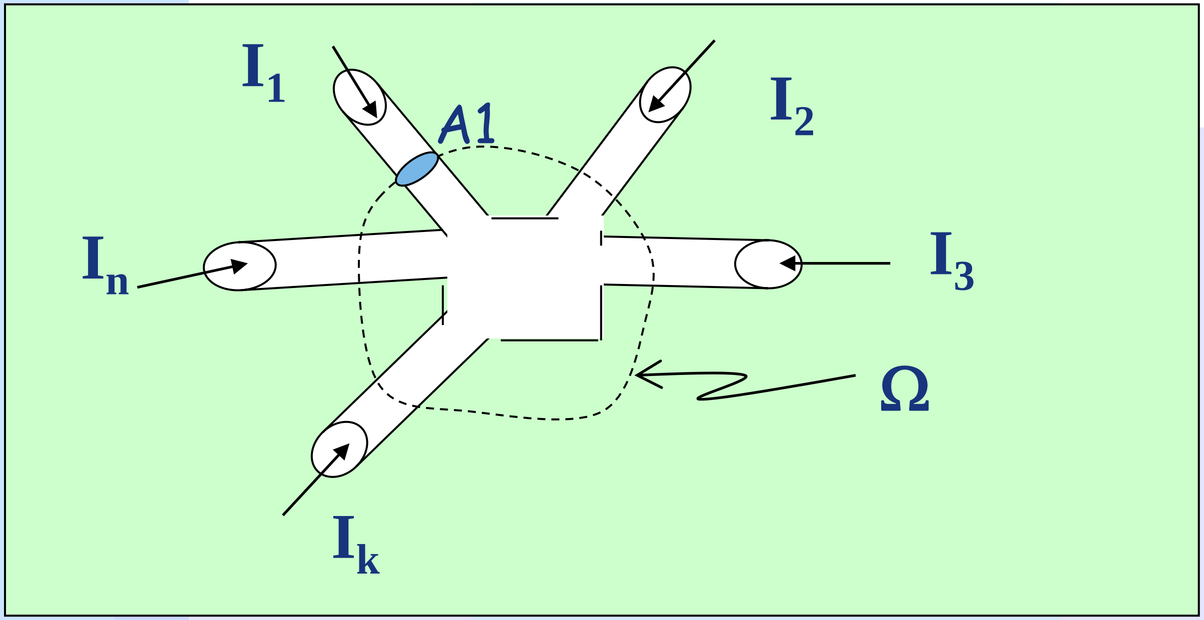
$$\Rightarrow i = C\frac{dV_c}{dt}$$



Teníamos

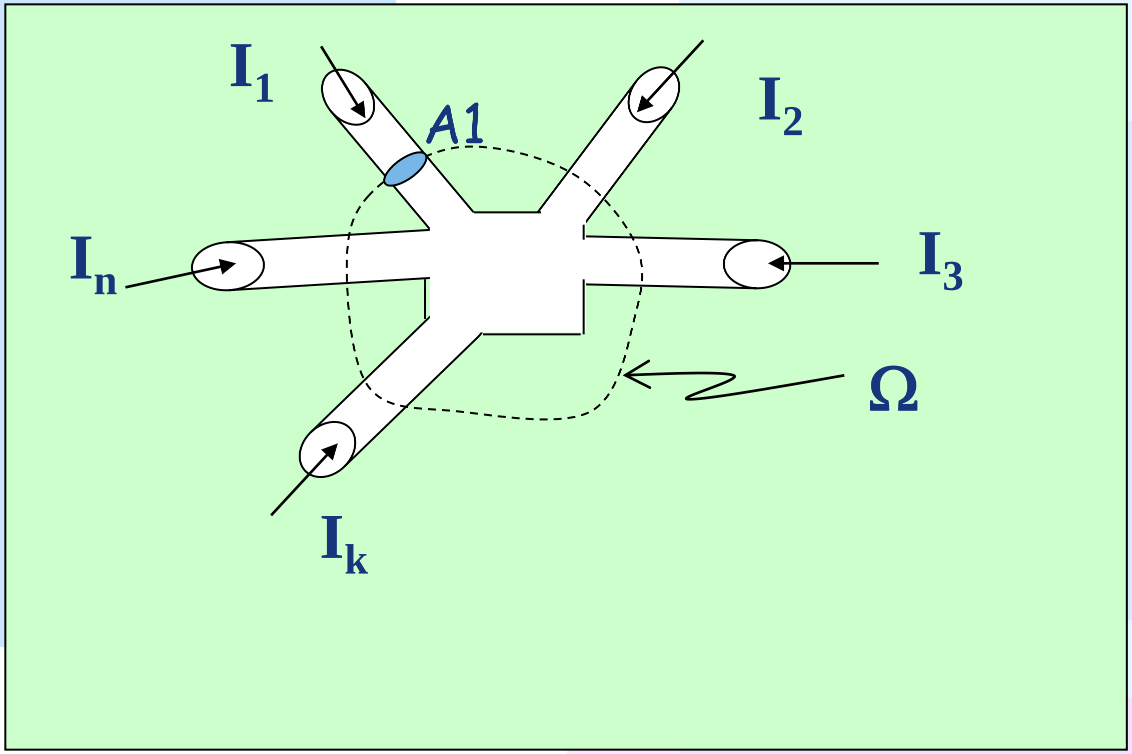
$$Ri + V_c - 10 = 0 \Rightarrow RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = 10$$

Ley de Corrientes de Kirchoff



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} dV = 0 \Rightarrow \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \bullet d\vec{s} = 0$$

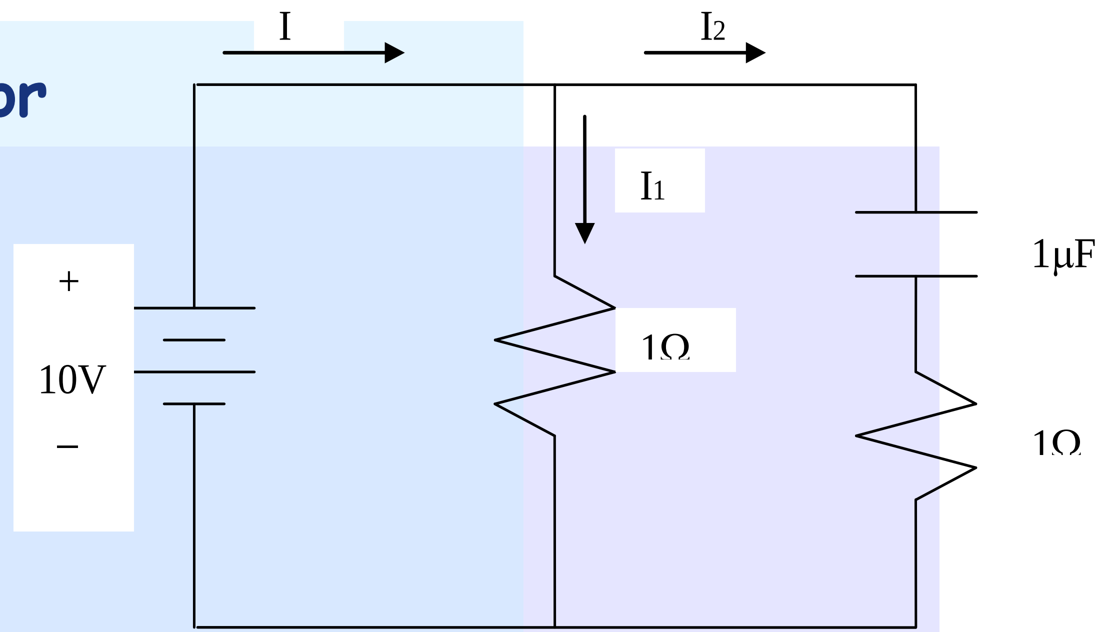
Ley de Corrientes de Kirchoff



$$\oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \bullet d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Ejemplo

Encontrar el valor del potencial del condensador en función del tiempo si inicialmente éste se encuentra descargado



Sol^n

LCK $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \frac{V_{R1}}{R} = \frac{10V}{1\Omega} = 10[A]$$

$$I_2 = \frac{V_{R2}}{R} = \frac{10 - V_C}{1}$$

Además $I_2 = C\dfrac{dV_C}{dt}$

$$\Rightarrow C\frac{dV_c}{dt} + V_c = 10$$

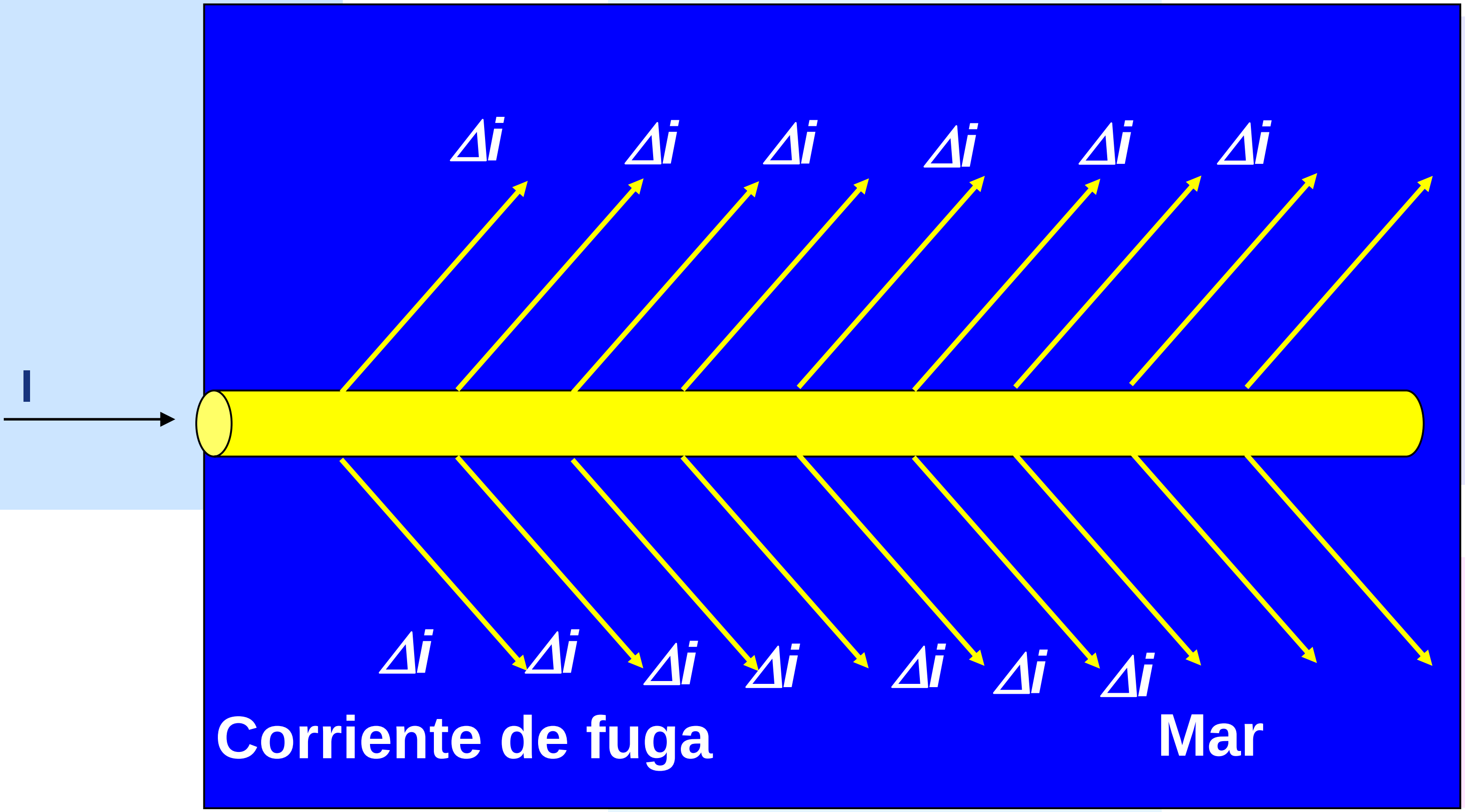
$$\Rightarrow V_c(t) = 10 + Ae^{-t/C}$$

CB $V_c(t=0) = \dfrac{Q_0}{C} = 0$

$$\therefore V_c(t) = 10(1 - e^{-t/C})$$

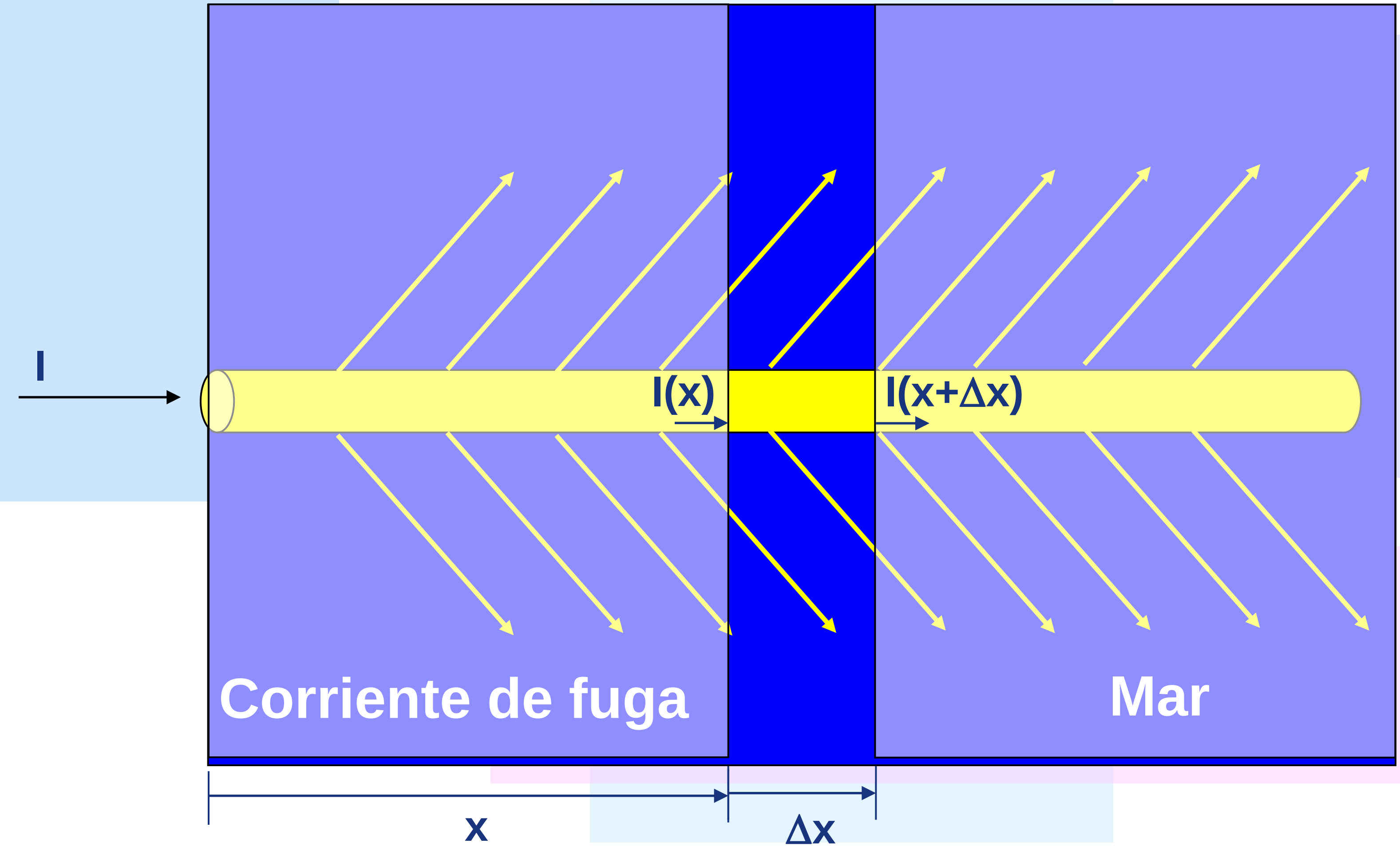
Ejemplo: Cable submarino

Se tiene un cable submarino con corriente de fuga

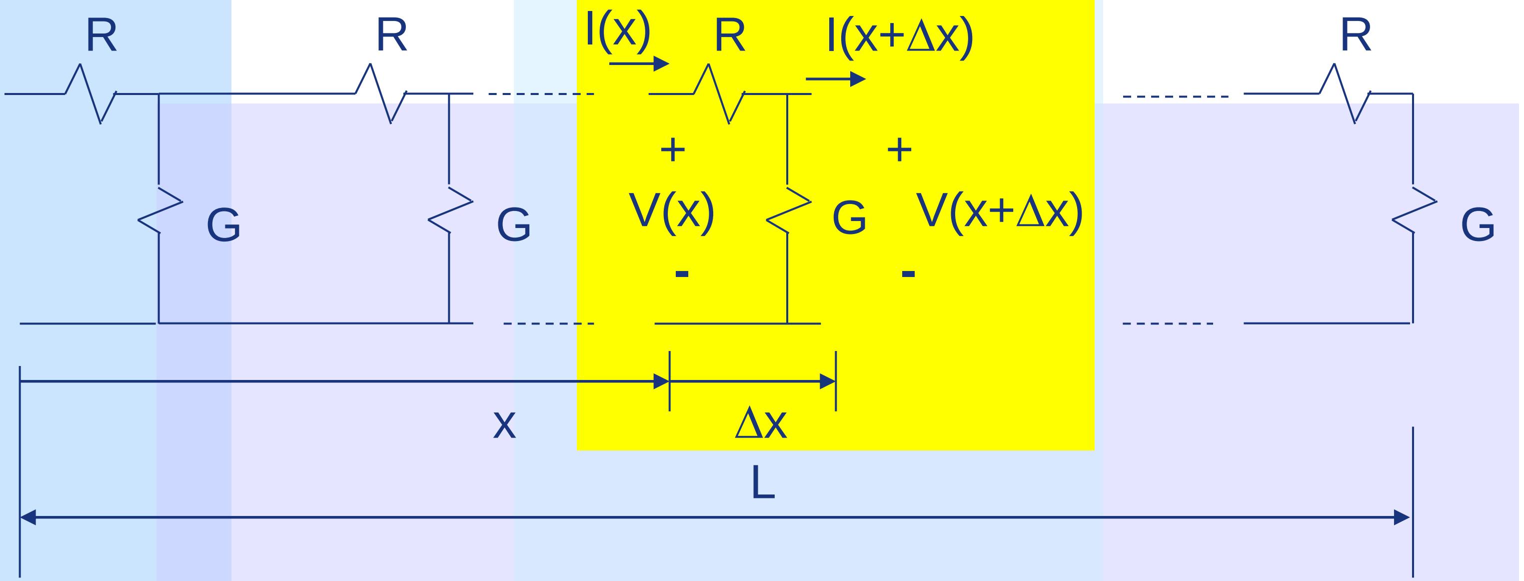


Ejemplo: Cable submarino

Modelamos un elemento diferencial Δx del cable



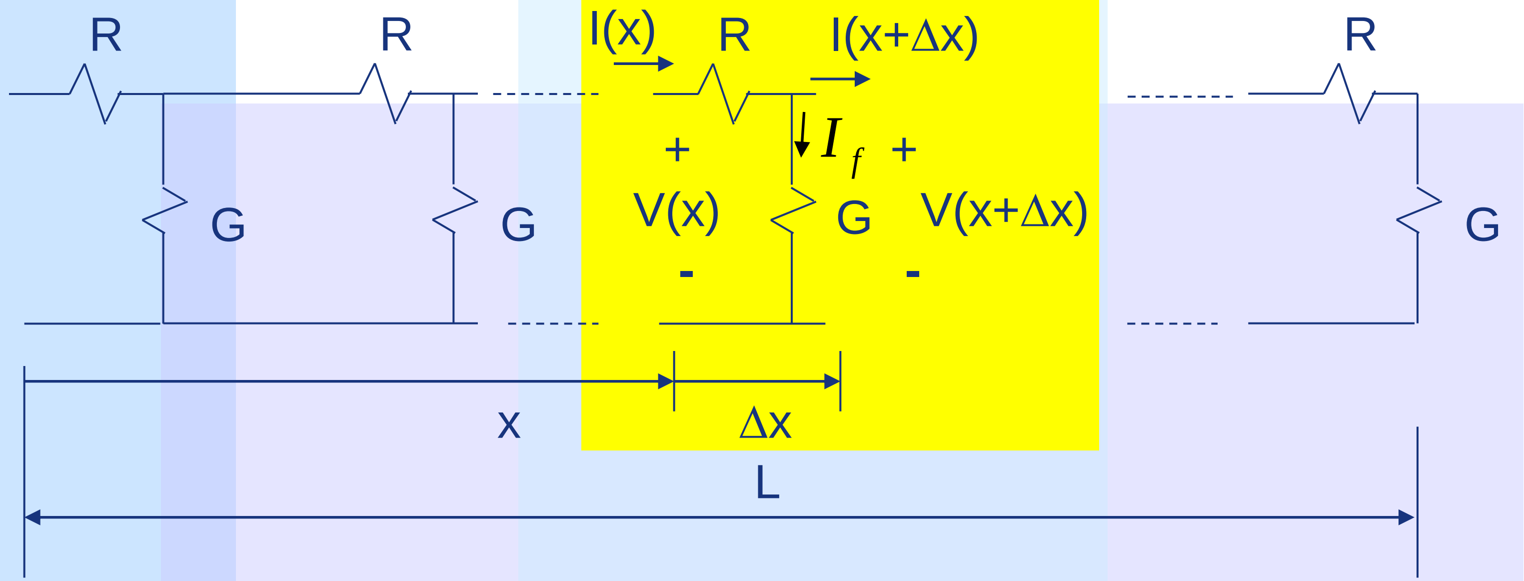
Ejemplo: Cable submarino



$$R = \text{Resistencia serie por unidad de largo} \left[\frac{\text{Ohm}}{\text{m}}\right]$$

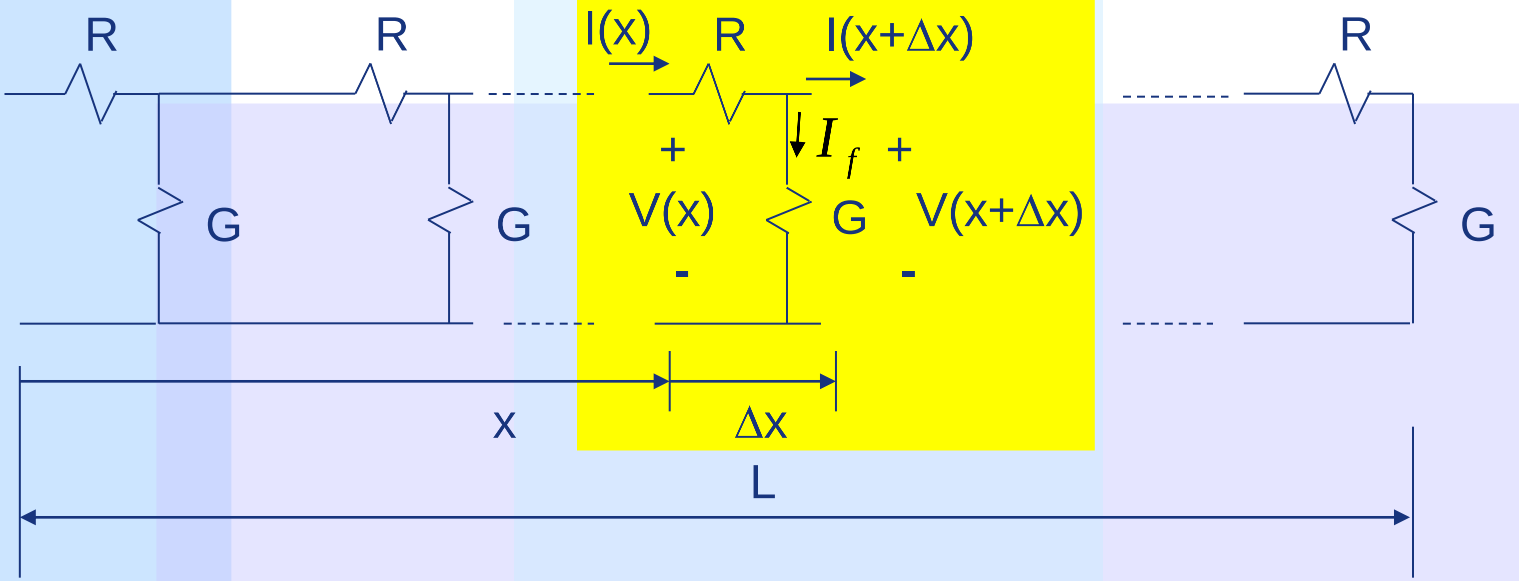
$$G = \text{Conductancia de fuga por unidad de largo} \left[\frac{1}{\text{Ohm} \times \text{m}}\right]$$

Ejemplo: Cable submarino



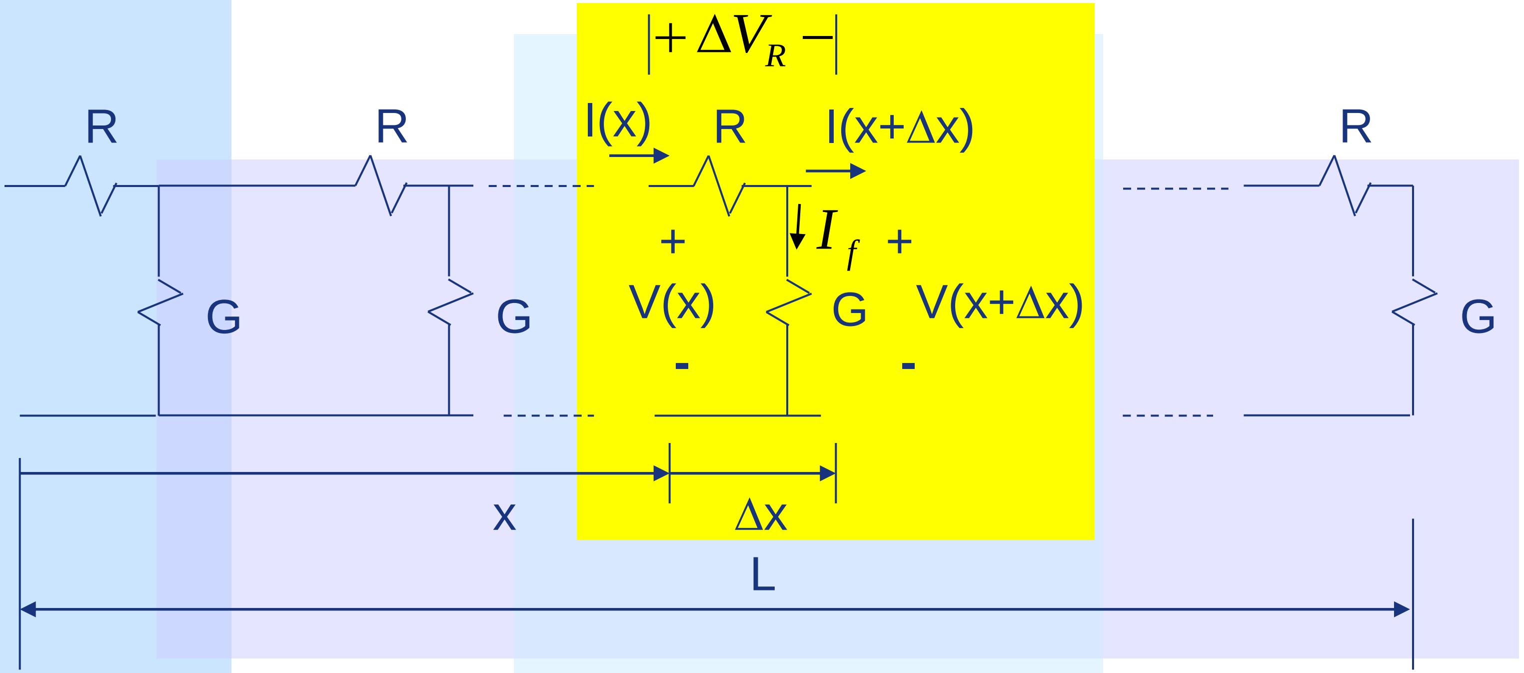
LCK: $$I(x) = I(x + \Delta x) + I_f$$

Ejemplo: Cable submarino



LCK: $$I(x) = I(x+\Delta x) + I_f$$

Ejemplo: Cable submarino

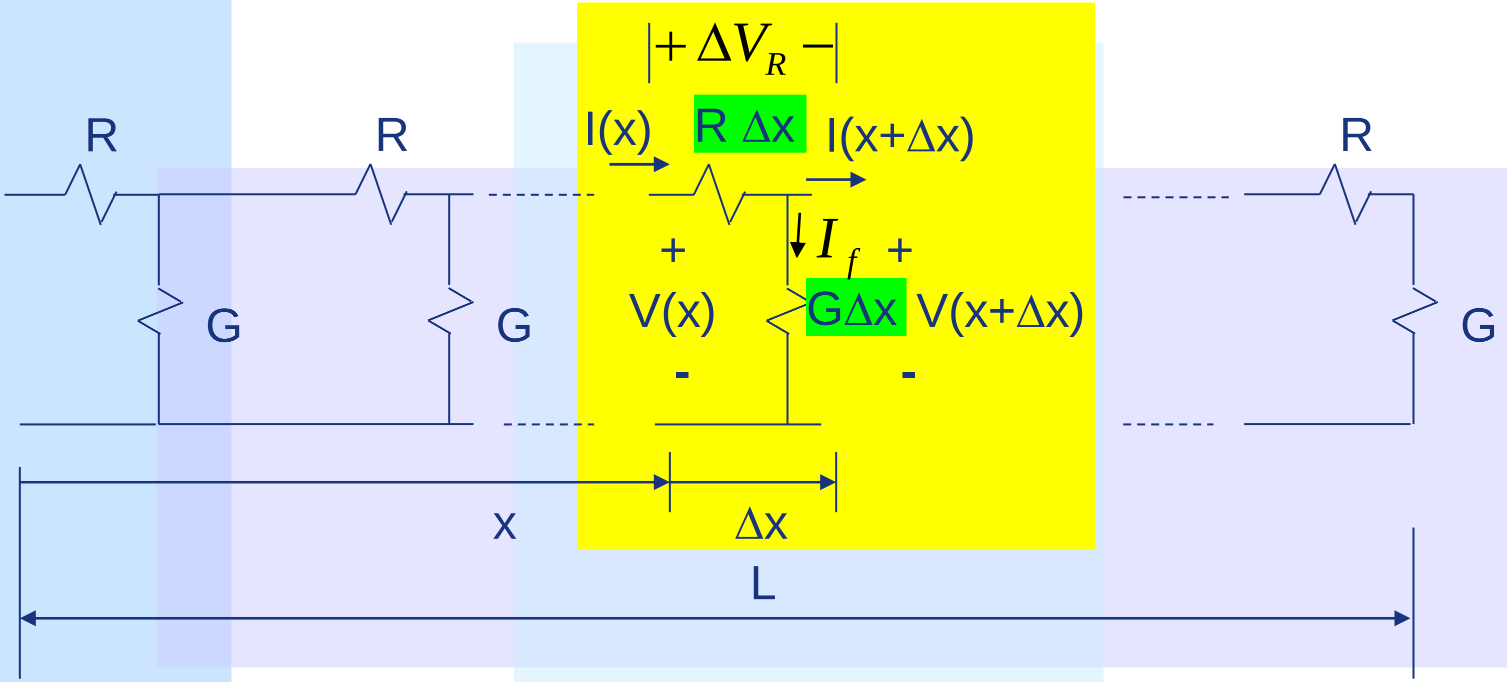


LCK: $$I(x) = I(x+\Delta x) + I_f$$

LVK: $$V(x) = \Delta V_R + V(x+\Delta x)$$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Ejemplo: Cable submarino

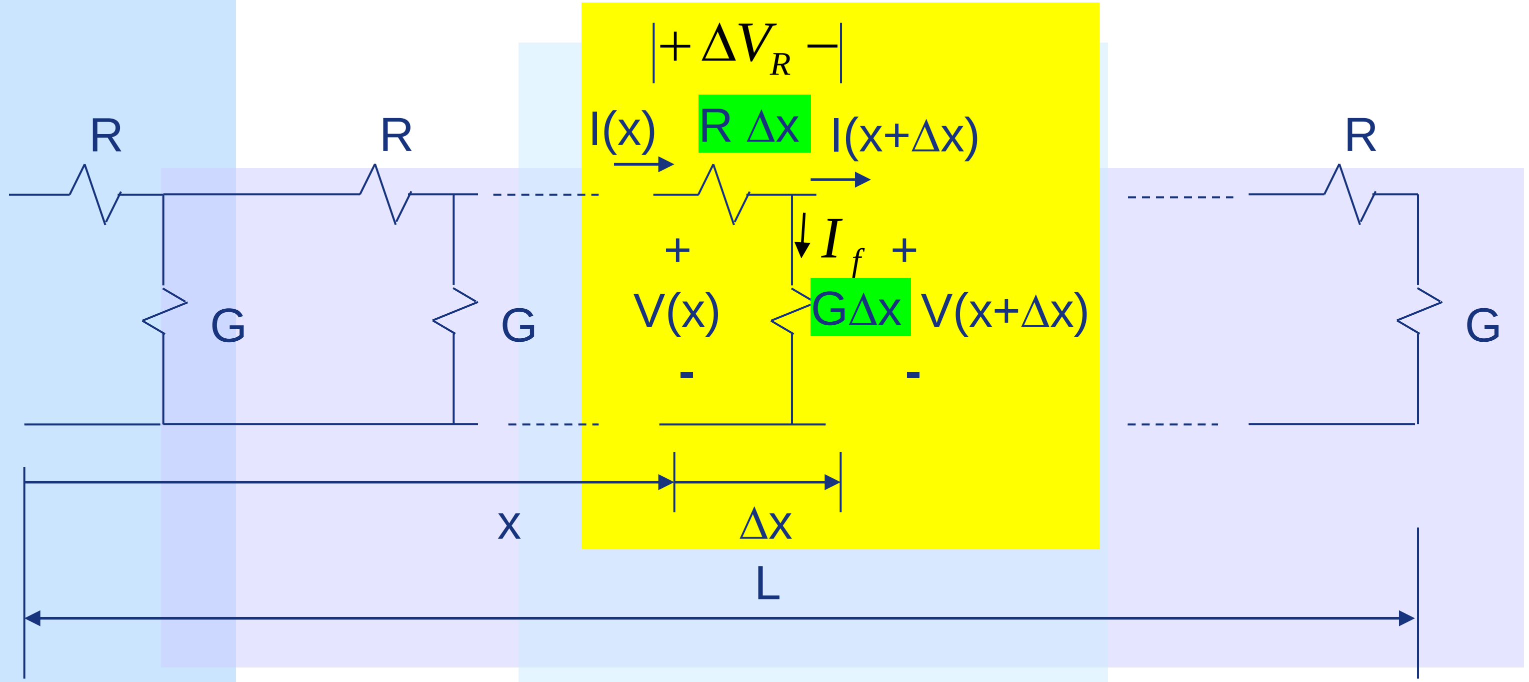


LCK: $$I(x) = I(x+\Delta x) + I_f \qquad (G\Delta x)v(x+\Delta x) = I_f$$

$$\Rightarrow I(x) = I(x+\Delta x) + G\Delta x V(x+\Delta x)$$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

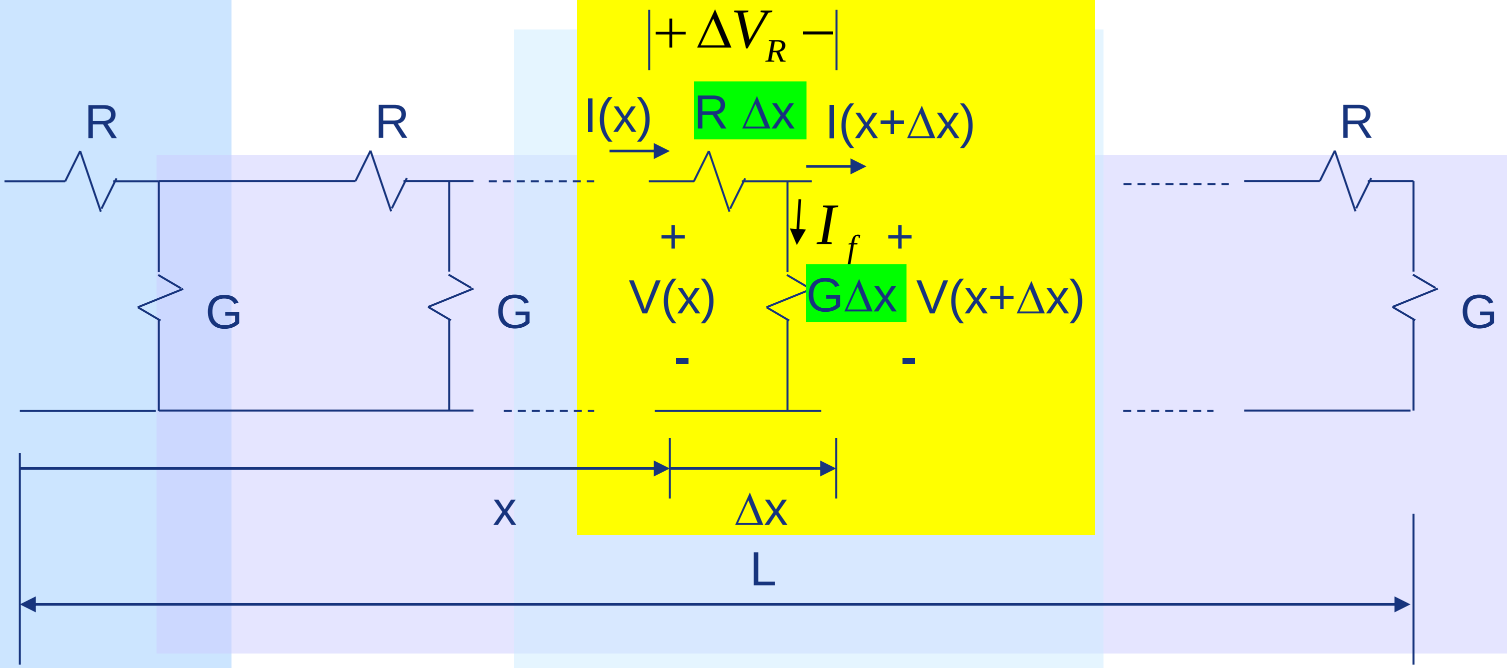
Ejemplo: Cable submarino



LVK: $V(x) = \Delta V_R + V(x+\Delta x)$ $\quad\quad \Delta V_R = (R\Delta x)I(x)$

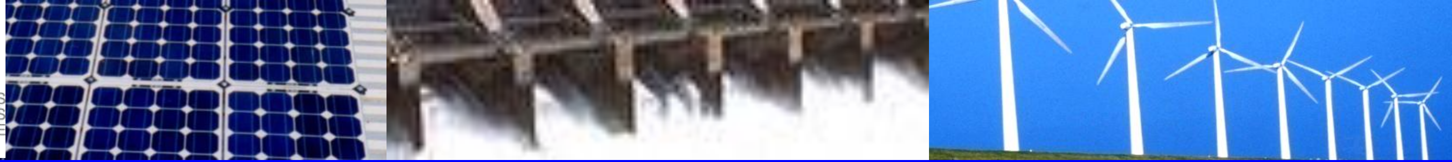
$$\Rightarrow V(x) = (R\Delta x)I(x) + V(x+\Delta x)$$

Ejemplo: Cable submarino

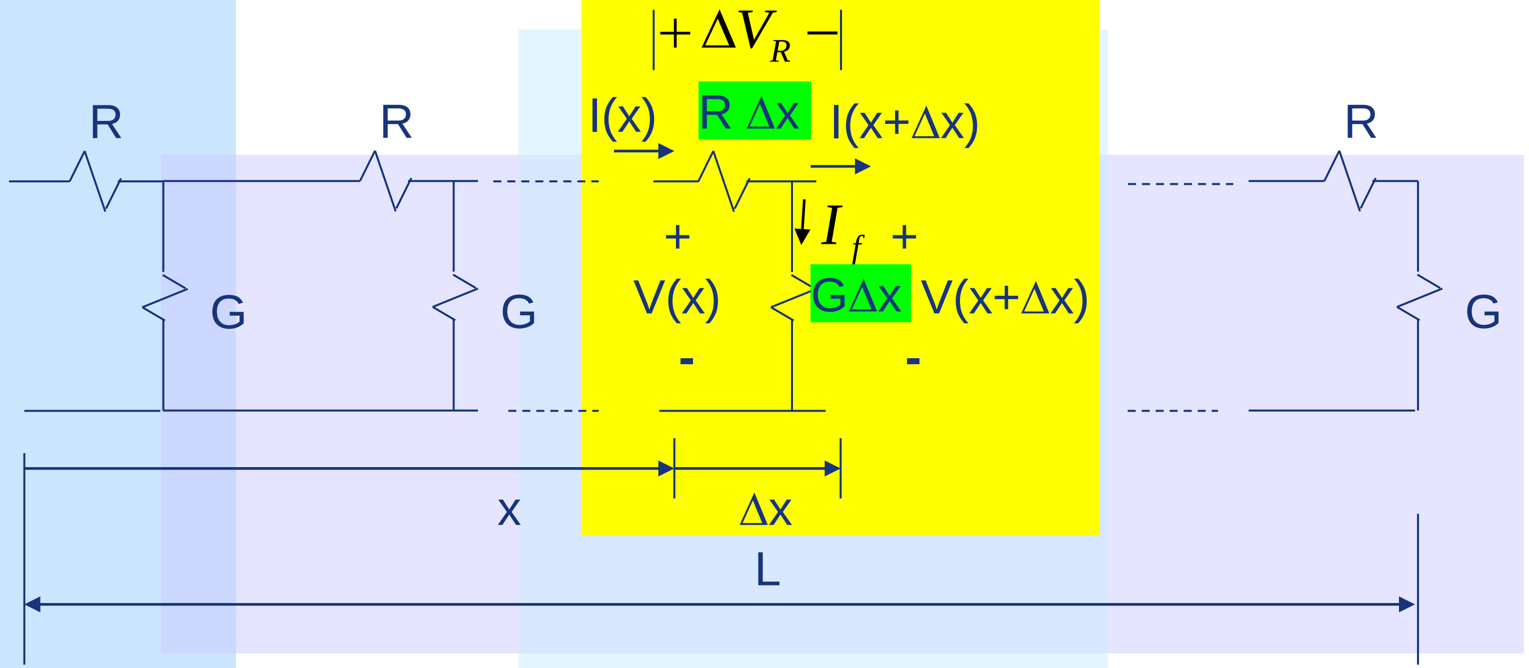


$$I(x) = I(x+\Delta x) + G\Delta x V(x+\Delta x) \Rightarrow \frac{I(x) - I(x+\Delta x)}{\Delta x} = GV(x+\Delta x)$$

$$V(x) = R\Delta x I(x) + V(x+\Delta x) \quad \Rightarrow \frac{V(x) - V(x+\Delta x)}{\Delta x} = RI(x)$$



Ejemplo: Cable submarino



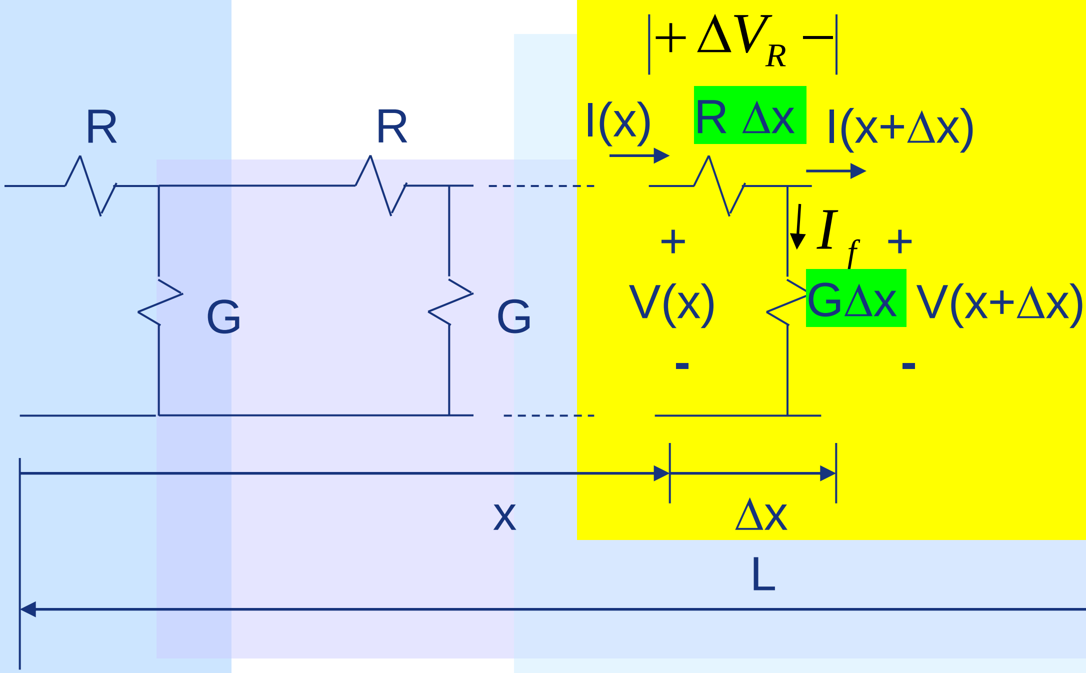
$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -GV(x)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -RI(x)$$

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = (GR)I(x)$$

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = (RG)V(x)$$

Ejemplo: Cable submarino



$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = (RG)V(x) \Rightarrow V(x) = Ce^{-x/\lambda} + De^{x/\lambda}$$ **con** $\lambda^2 = RG$

CB:

$$V(x=0) = V_0 = C + D$$

$$V(x=L) = 0 = Ce^{-L/\lambda} + De^{L/\lambda}$$

$$\therefore V(x) = \frac{V_0}{e^{-L/\lambda} - e^{L/\lambda}}\left(-e^{-(x-L)/\lambda} + e^{(x-L)/\lambda}\right)$$