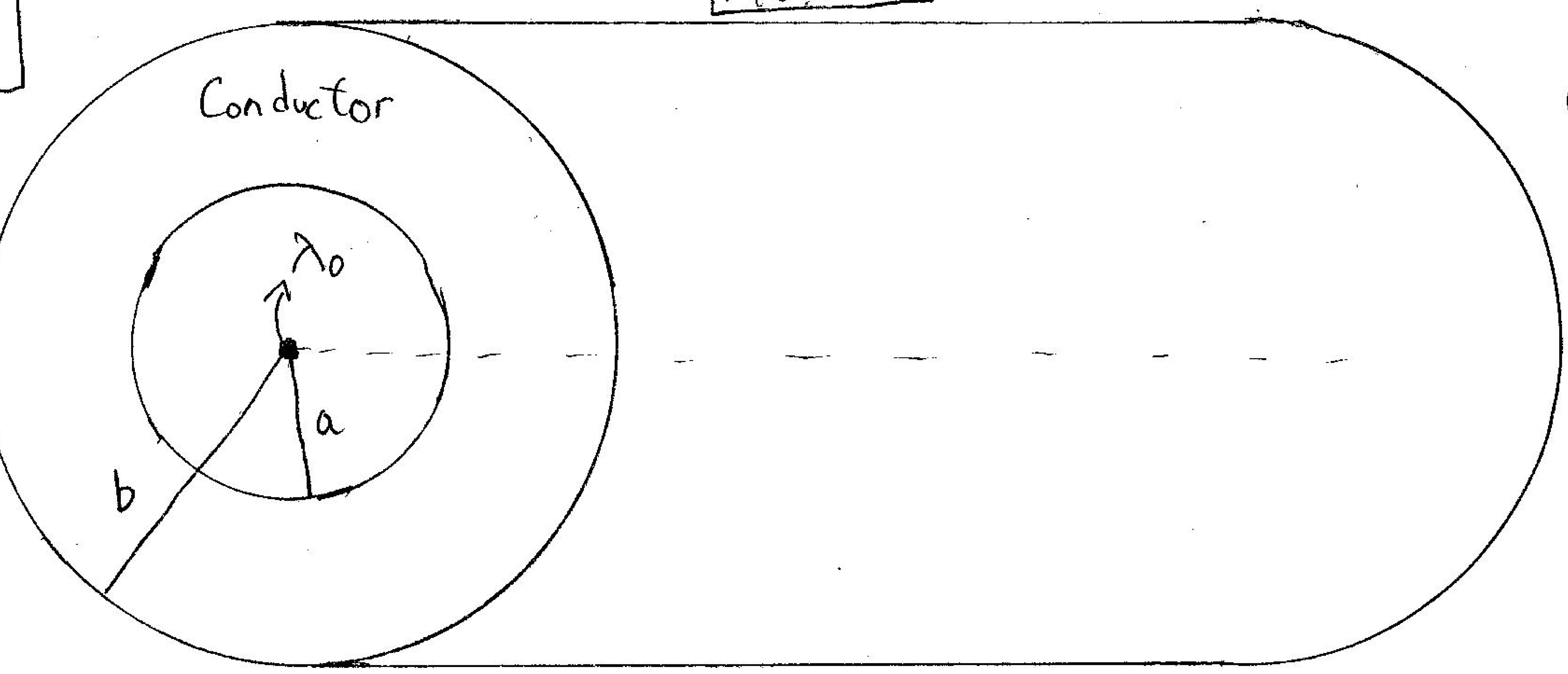
P1



a) ¿σ y ρ en conductor?

b) Si $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ en $r < a$, repetir a)

c) ¿σ_p y ρ_p para b)?

Sol: a) Consideremos una superficie Gaussiana cilíndrica de radio $r \in (a,b)$ y altura h, al aplicar Gauss:

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{Manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \iint_{Tapas} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

Por la simetría del problema suponemos $\vec{D} = \vec{D}(r)\cdot\hat{r} \Rightarrow \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$ en las tapas

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} Q_{enc} = \iint_{Manto} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$, pero además sabemos que dentro del conductor

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \iint_{Manto} \cancel{\vec{D}}\cdot d\vec{S} = 0 = Q_{enc}$$

Sabemos que Qenc abarca a la carga de la línea de longitud h, $\lambda_0 \cdot h$, la cual no es nula. Por lo tanto aparece una densidad superficial de carga en la cara interna del conductor, σ_{int}, i.e, tenemos el caso de un conductor con oquedad con una carga en su interior. Luego σ_{int} es tal que:

$$Q_{enc} = 0 \Rightarrow Q_{enc} = \lambda_0 \cdot h + \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma_{int}(\vec{r})\cdot \underline{a\,d\theta\, dz}$$ pues cara interna $\Rightarrow r = a$

Por la simetría del problema, y como $\lambda_0 = cte$, suponemos $\sigma_{int} = cte$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \lambda_0 h + 2\pi h\, \sigma_{int}\cdot a \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{int} = \frac{-\lambda_0}{2\pi a}}$$

P1 Aux6 1/1

Nota: en un conductor nunca hay carga en volumen (en equilibrio) $\Rightarrow \boxed{\rho = 0}$
$\Rightarrow$ Solo aparece carga superficial

Por otro lado como el conductor estaba inicialmente descargado, su carga neta es nula $\Rightarrow$ Aparece una densidad de carga superficial en la cara externa σ_{ext} tq: $Q_{neta\ conductor} = 0$, ie:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h \sigma_{ext}(\vec{r})\, b\, d\theta\, dz + \int_0^{2\pi}\int_0^h \sigma_{int}\, a\, d\theta\, dz = 0$$

Nuevamente podemos suponer $\sigma_{ext} = cte \Rightarrow 2\pi h \sigma_{ext} \cdot b + 2\pi h \sigma_{int}\, a = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ext} = -\frac{\sigma_{int} \cdot a}{b} = \frac{\lambda_0}{2\pi b}}$$

b) Por $\circledast$ tenemos que: $\iint_{Manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$, la diferencia es que acá

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow Q_{enc} = \iint_{Manto} \overbrace{\frac{\vec{E}}{\varepsilon}}^{0}\cdot d\vec{S} = 0$$

Pues se sigue cumpliendo que $\vec{E} = 0$ dentro del conductor.

$\therefore$ Se llega a los mismos resultados anteriores.

c) En este caso $r < a$, luego aplicando Gauss: $\circledast \Rightarrow \iint_{Manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \lambda_0 \cdot h$

$$\Rightarrow \lambda_0 \cdot h = \int_0^{2\pi}\int_0^h D(r)\, r\, dz\, d\theta = 2\pi h r D(r) \Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi r}\hat{r}}$$

Como estamos en el dieléctrico, sabemos que: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \frac{\varepsilon_0\vec{D}}{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\vec{D} = \underline{\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{\lambda_0}{2\pi r}\hat{r} = \vec{P}}$$

Luego calculamos σ_p en la interfaz dieléctrico conductor como:

$\sigma_p(r=a) = \vec{P}(r=a)\cdot\hat{n}$, en este caso el vector normal es: $\hat{n} = \hat{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_p(r=a) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\lambda_0}{2\pi\varepsilon a}}$$

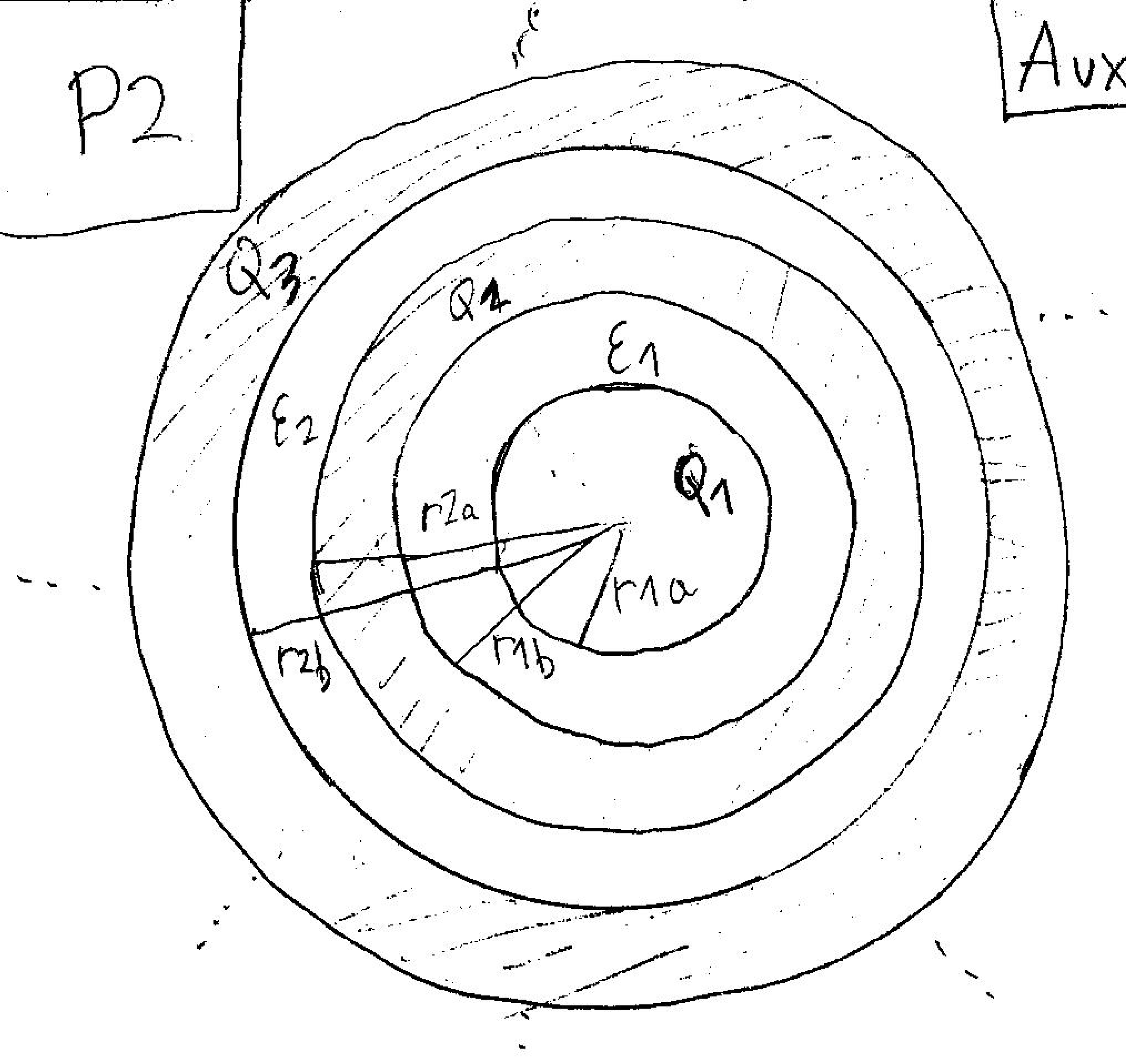
. Calculamos $\rho_p(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})$, $\vec{P} = P(r)\hat{r}$

$$\Rightarrow \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot\vec{P})}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\pi\varepsilon}\lambda_0}_{cte}\Big) = \boxed{0 = \rho_p}$$

P1 Aux6
2/2

P2

Aux 6



a) ¿$\vec{D}$ y $\vec{E}$?

b) ¿$V_i = f(V_{i-1})$?

c) ¿U sistema?

Sol: a) Aplicando Gauss para un radio r dentro de el dieléctrico i, se tiene:

$$\oiint_{S_i} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc_i} = \sum_{K=1}^{i} Q_K$$ por simetría suponemos: $\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\hat{r}$

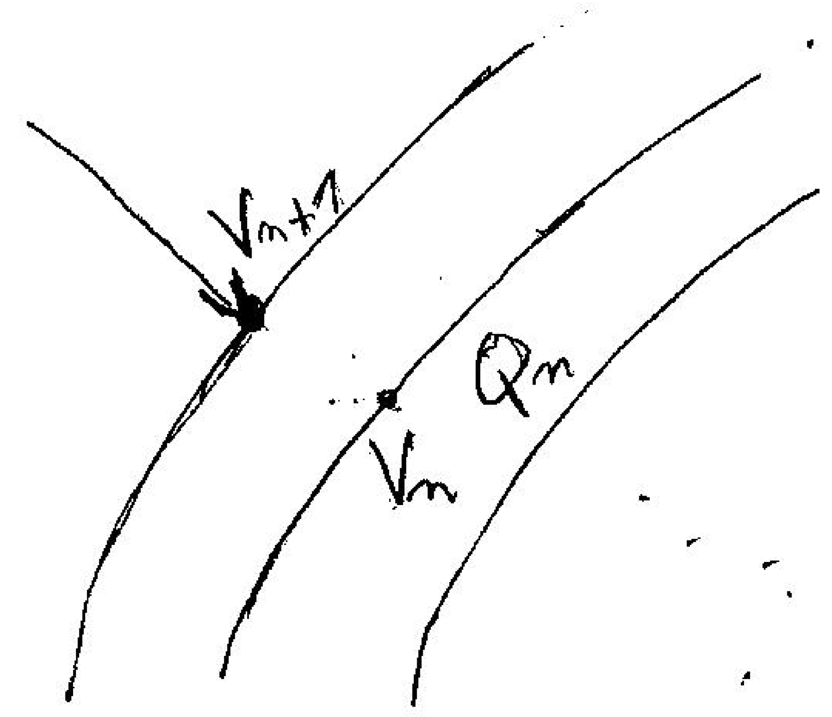
$$\Rightarrow \oiint_{S_i} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D_i(r)\, r^2 \operatorname{Sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi r^2 D_i(r) = Q_{enc_i}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_i(r) = \frac{Q_{enc\,i}}{4\pi r^2}\cdot\hat{r} \Rightarrow \vec{E}_i(r) = \frac{Q_{enc\,i}}{4\pi \varepsilon_i r^2}\cdot\hat{r}$$

Además al interior de cada conductor: $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = 0$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) &= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r^2}\cdot\displaystyle\sum_{K=1}^{i} Q_K\cdot\hat{r}, & r\in[r_{ia}, r_{ib}] \\ 0, & r\in[r_{(i-1)b}, r_{ia}] \end{cases} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi \varepsilon_i r^2}\cdot\displaystyle\sum_{K=1}^{i} Q_K\cdot\hat{r}, & r\in[r_{ia}, r_{ib}] \\ 0, & r\in[r_{(i-1)b}, r_{ia}] \end{cases} \end{aligned}}$$

b) Como condición inicial de la recursión calculamos el potencial en el borde externo del n-ésimo dieléctrico, de esta forma la misma relación recursiva lo relaciona con el potencial en el n-ésimo conductor V_n. Es decir, consideramos un "conductor ficticio" n+1 de grosor nulo y potencial V_{n+1}, sólo para efectos de la recursión. Para esto integramos el campo fuera del sistema, desde el infinito.



Calculamos el campo fuera del sistema con Gauss, la carga encerrada corresponde a la de todos los conductores: $Q_{enc} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) \Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r} \Rightarrow V_{n+1} = -\int_{\infty}^{r_{nb}} \vec{E}\cdot dr\hat{r} + \cancelto{0}{V_\infty}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{r_{nb}} = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 r_{nb}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{nb}}}$$

<u>Nota:</u> En la clase auxiliar se calculó el potencial en el conductor n-ésimo como condición inicial para la recursión, ésta es igualmente válido, por la generalidad de la relación recursiva que se calcula a continuación, pero esta forma es más corta. (Sorry se me ocurrió después de la clase).

Ahora para el potencial, integramos el campo $\vec{E_i}$ correspondiente.
Luego la función potencial eléctrico en el dieléctrico i es:

$$V_i(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E_i}\cdot d\vec{l} + V_{ref} = V_{ref} - \frac{Q_{enc\,i}}{4\pi\varepsilon_i}\int \frac{1}{r^2}dr = V_{ref} + \frac{Q_{enc\,i}}{4\pi\varepsilon_i}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ef}}\right)$$

Tomando $ref = r_{ib} \Rightarrow V_{ref} = V_{i+1}$

$$\Rightarrow V_i(r) = V_{i+1} + \frac{Q_{enc\,i}}{4\pi\varepsilon_i}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ib}}\right)$$

Luego para calcular el potencial del conductor i, evaluamos en $r = r_{ia}$:

$$V_i = V_{i+1} + \frac{Q_{enc\,i}}{4\pi\varepsilon_i}\left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}}\right) \Rightarrow \boxed{V_i = V_{i+1} + \frac{\sum_{k=1}^{i} Q_k}{4\pi\varepsilon_i}\left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}}\right)}$$

c) $U = U_{conductores} + U_{dieléctricos}$. Calculamos $U_{conductores} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} Q_i \cdot V_i$

De la relación recursiva $\Rightarrow V_i = \sum_{m=i}^{n-1}\left[\frac{\sum_{k=1}^{m} Q_k}{4\pi\varepsilon_m}\left(\frac{1}{r_{ma}} - \frac{1}{r_{mb}}\right)\right] + V_{i+1}$

$$\Rightarrow U_{cond} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i Q_i \Rightarrow \boxed{U_{cond} = \frac{1}{8\pi}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[Q_i\cdot\sum_{m=i}^{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon_m}\left(\frac{1}{r_{ma}} - \frac{1}{r_{mb}}\right)\sum_{k=1}^{m} Q_k\right]\right]}$$

Y $U_{dieléctricos} = U_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} U_{\varepsilon i}$, $U_{\varepsilon i} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_{ia}}^{r_{ib}} \vec{D_i}\cdot\vec{E_i}\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

$$\Rightarrow U_{\varepsilon i} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_{ia}}^{r_{ib}} \frac{1}{\varepsilon_i}\cdot\left(\frac{Q_{enc\,i}}{4\pi r^2}\right)^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{Q_{enc\,i}^2}{8\pi\varepsilon_i}\int_{r_{ia}}^{r_{ib}}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow U_{\varepsilon i} = -\frac{\left(\sum_{k=0}^{i-1} Q_k\right)^2}{8\pi\varepsilon_i}\left(\frac{1}{r_{ib}} - \frac{1}{r_{ia}}\right) \Rightarrow \boxed{U_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{8\pi\varepsilon_i}\left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}}\right)\left(\sum_{k=0}^{i-1} Q_k\right)^2}$$

con $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0$ y $r_{(n+1)b} = \infty$

$$\boxed{U_{total} = U_{cond} + U_\varepsilon}$$