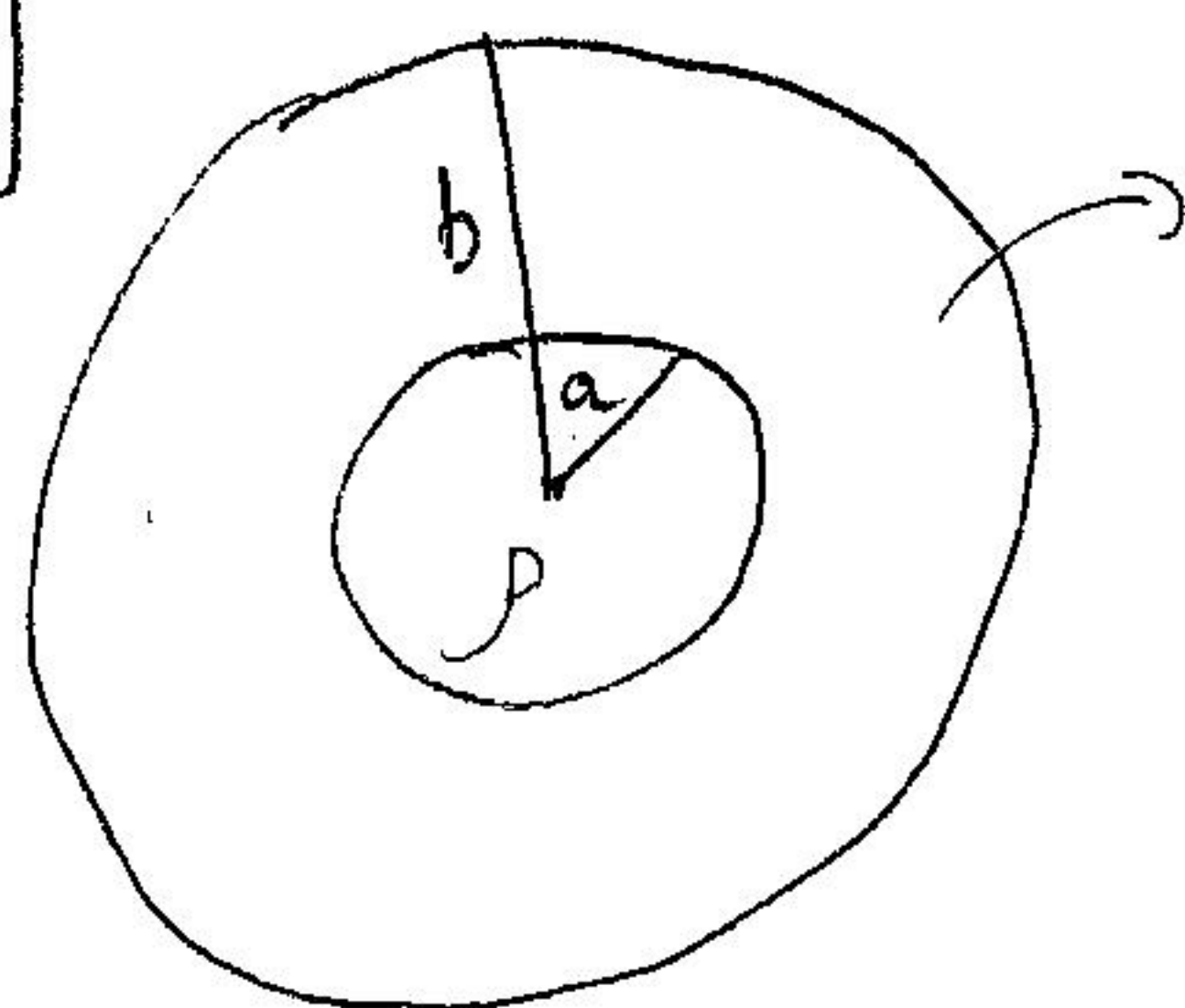


P8



$$\begin{cases} \vec{P}_i = 5 \cdot 10^{-20} [\text{Cm}] \cdot \hat{r} \\ g(\vec{r}) = C \cdot r^3 [\text{moléculas/m}^3] \\ \rho(r) = K r^2 \end{cases}$$

a) ¿ $\vec{P}$?b) ¿ $\vec{D}$, $\vec{E}$?c) ΔV_{ba}

Sol: a) Por definición: $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V}$, como todos los $\vec{P}_i$ son

iguales: $\vec{P} = \vec{P}_i \cdot \left(\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \text{moléculas}}{\Delta V} \right)$, además la densidad:

$$g(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \text{moléculas}}{\Delta V} \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_i \cdot g(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}(\vec{r}) = 5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot r^3 \hat{r} [\text{C/m}^2]} \quad 1 \text{pto}$$

b) Calculamos $\vec{D}$ por Gauss, separando por casos. Calculamos la carga encerrada:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(\vec{r}) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 4\pi K \int_0^r r^4 \, dr = \frac{4\pi \cdot r^5}{5} = \begin{cases} \frac{4\pi a^5 K}{5}, & r \geq a \\ \frac{4\pi r^5 K}{5}, & r \leq a \end{cases}$$

Dada la simetría de $\rho(\vec{r})$ suponemos que $\vec{D} = D(r) \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0} = E(r) \hat{r}$
pues $\vec{D} \parallel \vec{E} \parallel \vec{P} \parallel \hat{r}$.

• $r < a$: Gauss $\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \underbrace{4\pi r^2 D(r)}_{(*)} = Q = \frac{4\pi r^5 K}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{K r^3}{5} \cdot \hat{r}, \quad r < a} \quad (0,5 \text{ptos})$$

Acá se cumple: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{K r^3}{5 \epsilon_0} \cdot \hat{r}, \quad r < a \quad (0,5 \text{ptos})$

• $a < r < b$: Gauss $\Rightarrow \underbrace{4\pi r^2 D(r)}_{(*)} = Q = \frac{4\pi a^5 K}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{K a^5}{5 r^2} \hat{r}, \quad r \in (a, b)} \quad (0,5 \text{ptos})$

En este caso: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{K a^5}{5 r^2} - 5 \cdot 10^{-20} C r^3 \right) \hat{r}, \quad r \in (a, b)} \quad (0,5 \text{ptos})$$

P8 T1

1/2

• $r > b$: Gauss $\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Ka^5}{5r^2} \hat{r}$, $r > b$ (0,5 pto), es la misma expresión anterior, pues la carga libre encerrada es la misma.

En este caso $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Ka^5}{5\epsilon_0 r^2} \hat{r}$, $r > b$ (0,5 pto)

Con lo que finalmente:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Kr^3}{5} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{Ka^5}{5r^2}, & r \geq a \end{cases} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Kr^3}{5\epsilon_0} \hat{r}, & r < a \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{Ka^5}{5r^2} - 5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot r^3 \right] \hat{r}, & r \in (a, b) \\ \frac{Ka^5}{5\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b \end{cases}$$

(Total parte b) $\rightarrow 3$ pto)

c) $\Delta V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$, donde $\vec{E}$ corresponde al del medio material:

$$\Rightarrow \Delta V = - \int_a^b \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{Ka^5}{5r^2} - 5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot r^3 \right] \hat{r} \cdot \hat{r} dr = - \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{Ka^5}{5} \cdot \left. -\frac{1}{r} \right|_a^b - 5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_a^b \right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{Ka^5}{5} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot (b^4 - a^4)}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{Ka^5}{5} \cdot \left(\frac{a-b}{ab} \right) + \frac{5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot (b^4 - a^4)}{4} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{Ka^4(a-b)}{5b} + \frac{5 \cdot 10^{-20} \cdot C \cdot (b^4 - a^4)}{4} \right] \quad 2 \text{ pto}$$