

P2

a) Como se pide estimar el potencial generado por el dipolo para $L \gg a, b$, podemos utilizar la aproximación dipolar $V_{\text{dip}}(\vec{r})$ para estimar el potencial $V(\vec{r})$ del dipolo. Calculamos $V_{\text{dip}}(\vec{r})$:

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}, \quad \text{donde } \vec{r}' \text{ apunta hacia el centro del dipolo y } \vec{P} \text{ corresponde al momento dipolar:}$$

$\vec{P} = Q \cdot d \cdot \hat{r}$, donde Q corresponde a la carga positiva del dipolo, d a la distancia que las separa y $\hat{r}$ va desde $-Q$ a Q . Luego

$$Q = \iiint_V \rho_0 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \rho_0 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{4\pi b^3 \rho_0}{3}, \quad d = 2a, \quad \hat{r} = \hat{K}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{4\pi b^3 \rho_0 \cdot 2a \hat{K}}{3} \quad (1 \text{pto}) \quad \text{como el dipolo est\u00e1 centrado en el origen: } \vec{r}' = 0$$

$$\Rightarrow V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{4\pi b^3 \rho_0 2a \hat{K} \cdot \vec{r}}{3 \cdot 4\pi \epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} = \frac{2a \rho_0 b^3 \hat{K} \cdot \vec{r}}{3 \epsilon_0 \|\vec{r}\|^3}, \quad \text{usando coordenadas cartesianas:}$$

$$V_{\text{dip}}(x, y, z) = \frac{2a \rho_0 b^3 \hat{K} \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3 \epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \text{como } \hat{K} \cdot \hat{i} = \hat{K} \cdot \hat{j} = 0, \quad \hat{K} \cdot \hat{K} = 1$$

$$V_{\text{dip}}(x, y, z) = \frac{2a \rho_0 b^3 z}{3 \epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{dip}}(0, L, 0) = 0} \quad (1 \text{pto})$$

c) Para calcular el trabajo usamos la expresi\u00f3n: $W = \Delta U = U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}}$
pero $U = q \cdot V \Rightarrow W = q(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}) = q(V_{\text{dip}}(L, 0, 0) - V_{\text{dip}}(0, L, 0))$

$$\text{Pero } V_{\text{dip}}(L, 0, 0) = 0 \Rightarrow \boxed{W = 0} \quad 1 \text{pto}$$

Notar que si se toma un $z \neq 0$ el trabajo sigue siendo nulo, pues el desplazamiento ser\u00eda sobre una superficie equipotencial.

b) Calculamos el campo: $\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\nabla V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\partial V_{\text{dip}}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V_{\text{dip}}}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V_{\text{dip}}}{\partial z} \hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{dip}}(x, y, z) = -\frac{2a\rho_0 b^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{-z \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \hat{i} + \frac{-z \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \hat{j} \right. \\ \left. + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - z \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \hat{k} \right]$$

$$= \frac{2a\rho_0 b^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^3} \left[3xz \hat{i} + 3yz \hat{j} + (3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) \hat{k} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{dip}}(x, y, z) = \frac{2a\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left[3xz \hat{i} + 3yz \hat{j} + (2z^2 - x^2 - y^2) \hat{k} \right]$$

Evaluando en $(0, L, 0)$:

$$\vec{E}_{\text{dip}}(0, L, 0) = \frac{2a\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 (L^2)^{5/2}} \cdot (-L^2) \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q \cdot \vec{E}_{\text{dip}}(0, L, 0) = -\frac{2a\rho_0 b^3 \cdot q}{3\epsilon_0 L^3} \hat{k} \quad 3 \text{ ptos}$$