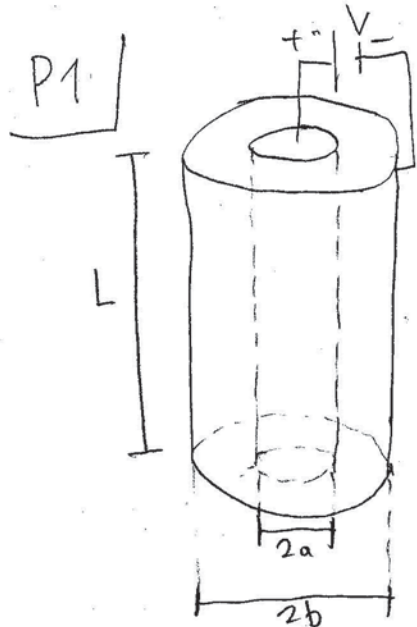
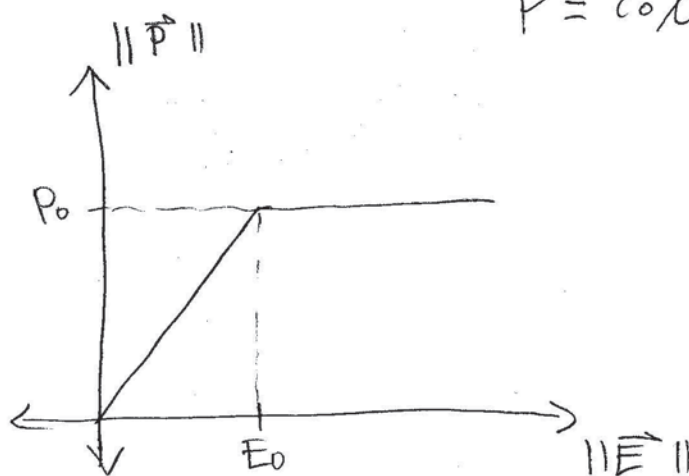




$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$



a) ¿A $V_0 + q$ se alcanza la saturación?

b) Det $\vec{E}$ y $\vec{D}$ $\forall V$.

Sol: La ecuación de Poisson dice: $\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{\epsilon_0}$

donde ρ_L es la densidad de carga libre. En este problema hay cargas de polarización, debido a $\vec{P}$. Sin embargo no hay cargas libres por lo que $\rho_L = 0$. De esa forma tenemos que se cumple la ecuación de Laplace: $\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$

Dada la simetría del problema suponemos que $V(\vec{r})$ solo depende de r :

$$V(\vec{r}) = V(r) \Rightarrow \nabla^2 V(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (\text{En coordenadas esféricas})$$

$$\Rightarrow r \cdot \frac{dV}{dr} = \text{cte} \equiv A \Rightarrow \frac{dV(r)}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow V(r) = A \cdot \ln(r) + B$$

Ahora determinamos A (Como veremos luego B es irrelevante):

$$V = V(a) - V(b) = A \cdot \ln(a) - A \ln(b) = A \ln(a/b)$$

$$\Rightarrow A = \frac{V}{\ln(a/b)} \Rightarrow V(r) = \frac{V}{\ln(a/b)} \cdot \ln(r) + B$$

Calculamos $\vec{E} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \hat{r} = \frac{-V}{\ln(a/b) \cdot r} \cdot \hat{r} = \frac{V}{\ln(b/a) \cdot r} \cdot \hat{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{V}{r \ln(b/a)} \cdot \hat{r}}$$

Para que el material esté completamente saturado se requiere:

$\|\vec{E}(r)\| \geq E_0 \quad \forall r \in [a, b]$, o equivalentemente (dado que $\vec{E}(r)$ es mínimo en $r=b$): $\|\vec{E}(b)\| \geq E_0$. Tomamos la condición límite; e imponemos que se cumpla a potencial $V=V_0$:

$$E_0 = \|\vec{E}(b)\| = \frac{V_0}{b \ln(b/a)} \Rightarrow \boxed{V_0 = b E_0 \ln(b/a)}$$

b) De la parte anterior tenemos que: $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{V \cdot \hat{r}}{r \ln(b/a)}, \quad \forall V}$

Para calcular $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, analizamos por casos:

• $V \geq V_0$: En este caso el material está saturado (pues $\vec{E}$ es creciente con V), de esta forma:

$\|\vec{P}\| = P_0$, y como $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{P} \parallel \vec{E}$, tenemos que:

$$\vec{P} = P_0 \cdot \hat{r} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + P_0 \hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \left[\frac{\epsilon_0 V}{r \ln(b/a)} + P_0 \right] \hat{r} \quad \text{para } V \geq V_0}$$

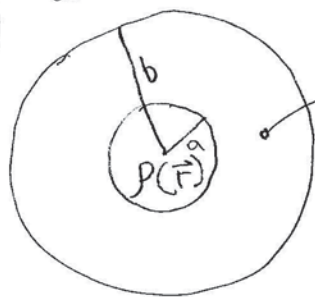
• $V \leq V_0$: En este caso nos encontramos en la zona lineal:

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$. De la curva tenemos que: $\vec{P} = \frac{P_0}{E_0} \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \left(\epsilon_0 + \frac{P_0}{E_0} \right) \vec{E} = \left(\frac{\epsilon_0 E_0 + P_0}{E_0} \right) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{(\epsilon_0 E_0 + P_0) V}{E_0 \ln(b/a) r} \cdot \hat{r}, \quad V \leq V_0}$$

P2] ϵ_0



$$\begin{cases} \vec{P}_i = 5 \cdot 10^{-20} [\text{Cm}] \cdot \hat{r} \\ g(r) = K \cdot r^2 \end{cases}$$

$$\rho(r) = K \cdot r [\text{moléculas/cm}^3]$$

a) ¿ $\vec{P}$?

b) ¿ $\vec{D}$, $\vec{E}$? espacio

c) ¿ ΔV ? entre casquetes

Sol: a) La definición de vector de Polarización es: $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V}$

es decir, es una densidad de momentos dipolares.

$$\Rightarrow \vec{P}(r) = \vec{P}_i \cdot g(r) \Rightarrow \boxed{\vec{P}(r) = 5 \cdot 10^{-20} \cdot K r^2 \cdot \hat{r} [\text{C/m}^2]}$$

b) Analizamos por casos, calculando los $\vec{D}$ por Gauss. Considerando una superficie esférica de radio r , la carga encerrada es:

$$Q = \iiint_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r') \cdot r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi = 4\pi K \int_0^r r'^3 dr' = \frac{4\pi K \cdot r^4}{4} = \begin{cases} \pi K a^4, & r \geq a \\ \pi K r^4, & r \leq a \end{cases}$$

Dada la simetría de $\rho(r)$ podemos suponer que $\vec{D} = D(r) \hat{r}$ de esta forma

$$\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot \hat{r}, \text{ pues } \vec{D} \text{ y } \vec{P} \text{ son paralelos a } \hat{r}$$

• $r < a$: Aplicando la ley de Gauss se tiene:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) r^2 d\theta d\phi = 4\pi r^2 D(r) = Q = \pi K r^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{K r^2}{4} \cdot \hat{r}, \quad r < a}$$

Y como estamos fuera del medio material, la permitividad eléctrica es la del vacío. Luego:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{K r^2}{4 \epsilon_0} \hat{r}, \quad r < a}$$

• $a < r < b$: Nuevamente por Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi r^2 D(r)$

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Ka^4}{4r^2} \cdot \hat{r}, \quad a < r < b$$

En este caso $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{K}{\epsilon_0} \left(\frac{a^4}{4r^2} + r^2 \cdot 5 \cdot 10^{-20} \right) \cdot \hat{r}, \quad a < r < b$$

• $r > b$: En este caso utilizamos la condición de borde sobre $\vec{D}$:

$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_L$. Como no hay carga en la interfaz: $\sigma_L = 0$

$\Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2$, pues por la simetría del problema

asumimos que $\vec{D} = D(r) \hat{r} \quad \forall r$. Luego $\vec{D}$ es el mismo calculado anteriormente. Ojo que solo se puede asegurar esto en la interfaz, sin embargo si aplicamos Gauss llegamos a que las expresiones para $\vec{D}(r)$ son iguales, pues la carga encerrada es la misma.

Así: $\vec{D}(r) = \frac{Ka^4}{4r^2} \cdot \hat{r}, \quad r > b$

Y como estamos fuera del material: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Ka^4}{4\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}, \quad r > b$

$$\therefore \vec{D}(r) = \begin{cases} \frac{Kr^2}{4} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{Ka^2}{4r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases}, \quad \vec{E} = \begin{cases} \frac{Kr^2}{4\epsilon_0} \hat{r}, & r \leq a \\ \frac{K}{\epsilon_0} \left(\frac{a^4}{4r^2} + r^2 \cdot 5 \cdot 10^{-20} \right) \cdot \hat{r}, & a < r < b \\ \frac{Ka^4}{4\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b \end{cases}$$

Nota: La igualdad en los límites de $\vec{D}(r)$ se justifica con la Condición de borde para $\vec{D}$.

c) $\Delta V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, donde $\vec{E}$ corresponde al del medio material.

$$\Rightarrow \Delta V = - \int_a^b \frac{K}{\epsilon_0} \left(\frac{a^4}{4r^2} - 5 \cdot 10^{-20} \right) \hat{r} \cdot dr \cdot \hat{r} = - \frac{K}{\epsilon_0} \left[-\frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{r} \right]_a^b - \frac{5 \cdot 10^{-20}}{3} \left[r^3 \right]_a^b$$

$$= + \frac{K}{\epsilon_0} \left[\frac{a^4}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) - \frac{5 \cdot 10^{-20} (a^3 - b^3)}{3} \right]$$

$$= \frac{K}{\epsilon_0} \left[\frac{a^4 (a-b)}{4ab} - 5 \cdot 10^{-20} (a^3 - b^3) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{K}{\epsilon_0} \left[\frac{a^3(a-b)}{4b} + \frac{5 \cdot 10^{-20} (b^3 - a^3)}{3} \right]}$$