



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 12

Método de las Imagenes

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Condiciones de borde y unicidad Ec. Laplace
- Método de la carga imagen
- Resumen medios materiales en electrostática



CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Teníamos

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

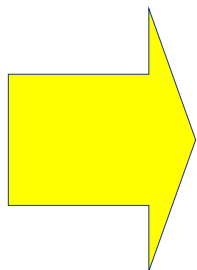
Tomando la divergencia

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Usando la 1ª
ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



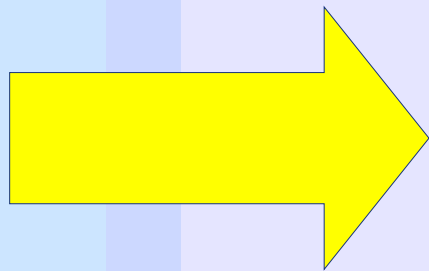
$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Ecuación de Poisson



CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Si no hay cargas:



$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

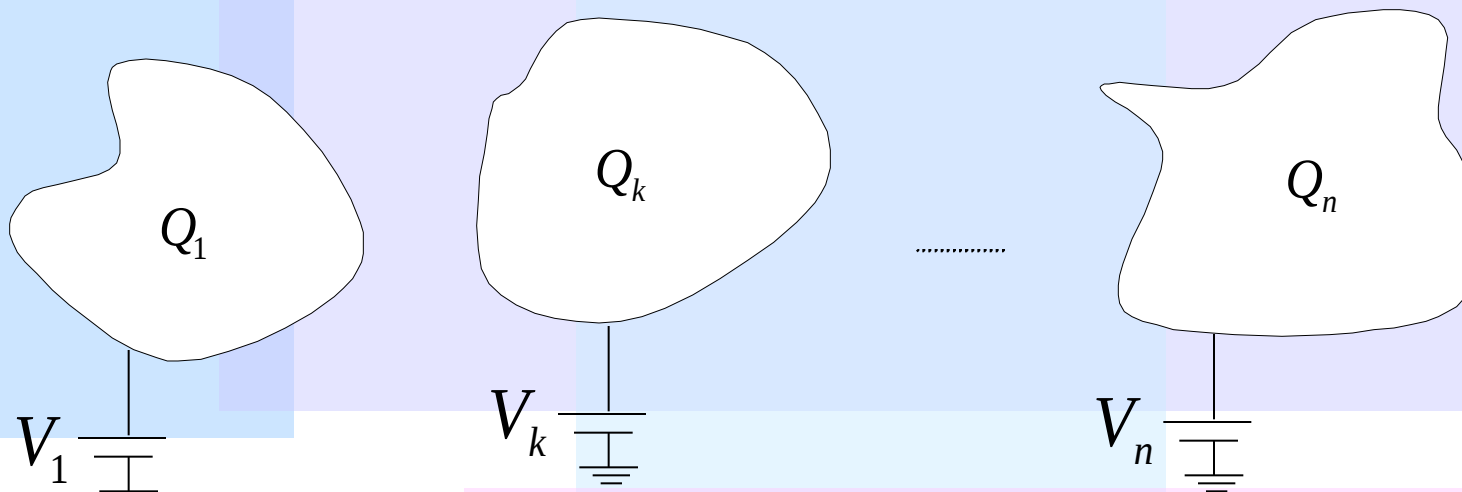
Ecuación de Laplace.

- Es la más usada en la práctica para determinar el campo eléctrico
- Para resolverla se requieren condiciones de borde



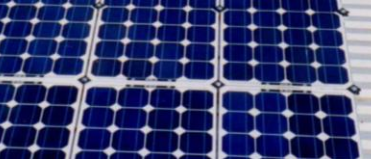
CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Consideremos un sistema con conductores en equilibrio electrostático



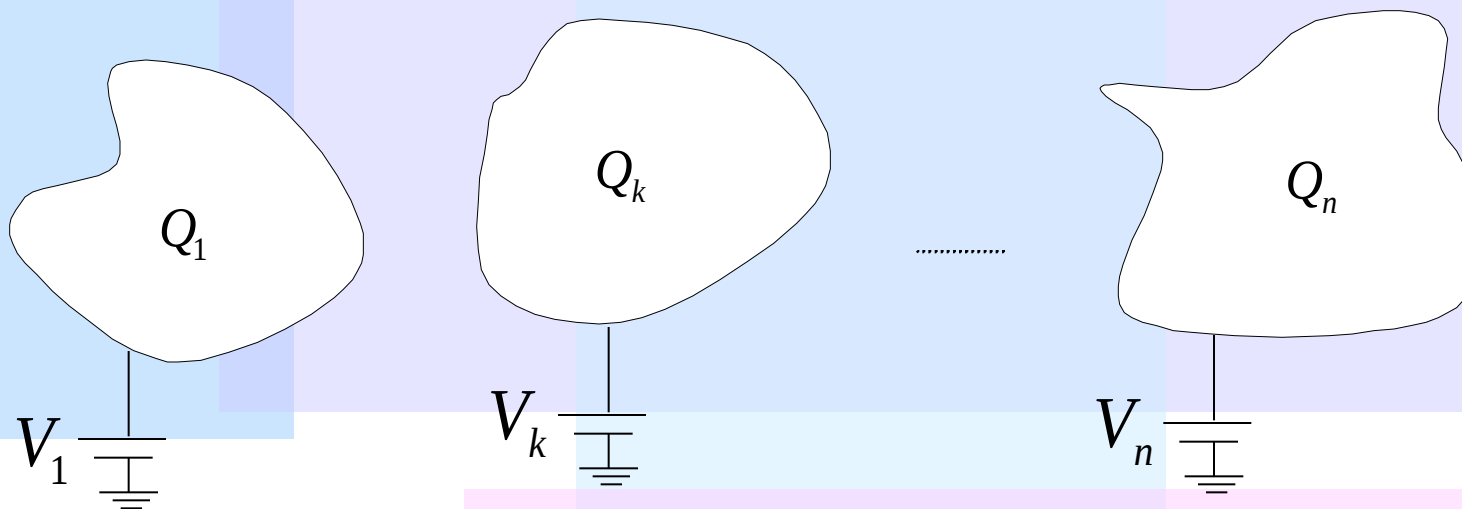
Indica voltaje cero

El potencial de cada conductor está fijo mediante fuentes de voltaje (fuerza electromotriz fem)



CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Interesa resolver $\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$



En este caso el potencial en las superficies de los conductores son las condiciones de borde del sistema (además de $V(\vec{r}) = 0$ para $\|\vec{r}\| \rightarrow \infty$)



CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

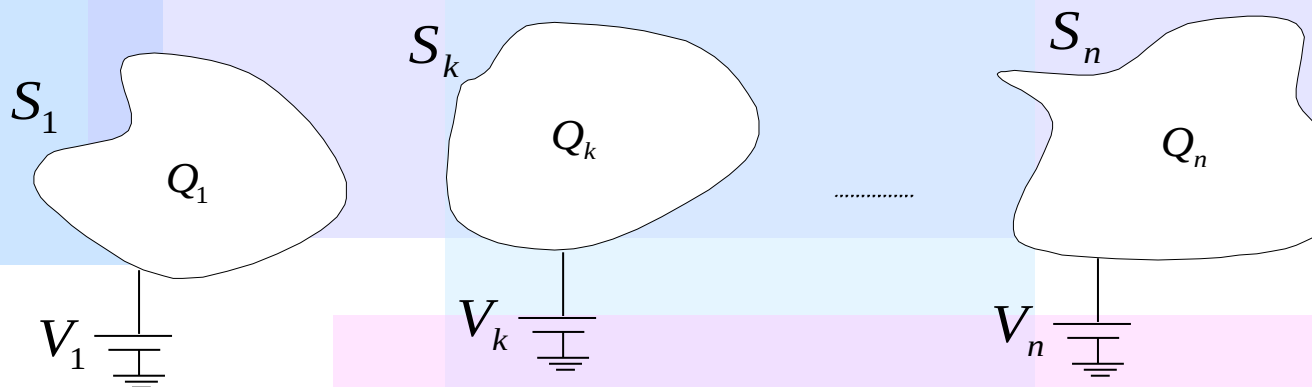
Interesa resolver

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Condiciones de Borde

$$V(S_k) = V_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$V(\vec{r}) = 0 \quad \text{para} \quad \|\vec{r}\| \rightarrow \infty$$



Se puede demostrar que la solución a este problema es única.



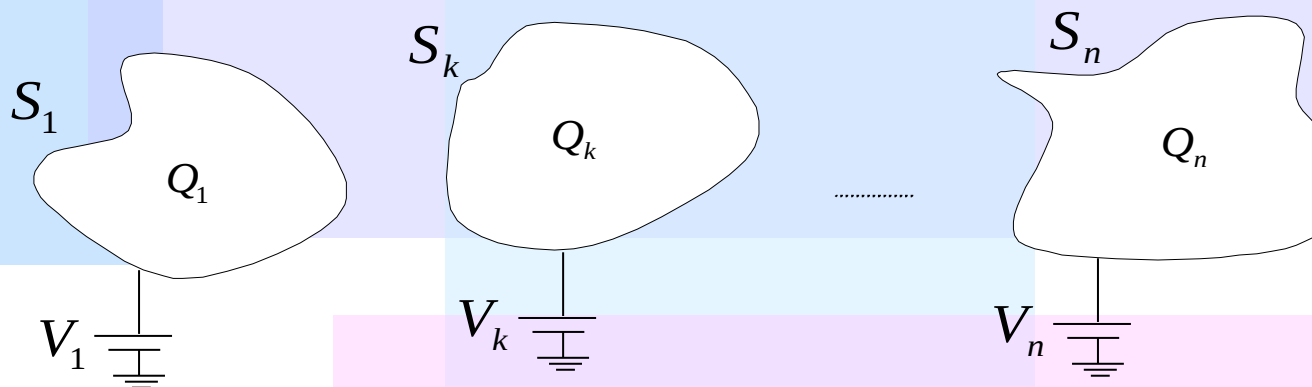
CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

O sea, si encontramos una función $\psi(\vec{r})$ que satisface

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0$$

y que además satisface las condiciones de borde

$$\psi(S_k) = V_k \quad (k=1, \dots, n) \quad \text{y} \quad \psi(\vec{r}) = 0 \quad \text{para} \quad \|\vec{r}\| \rightarrow \infty$$

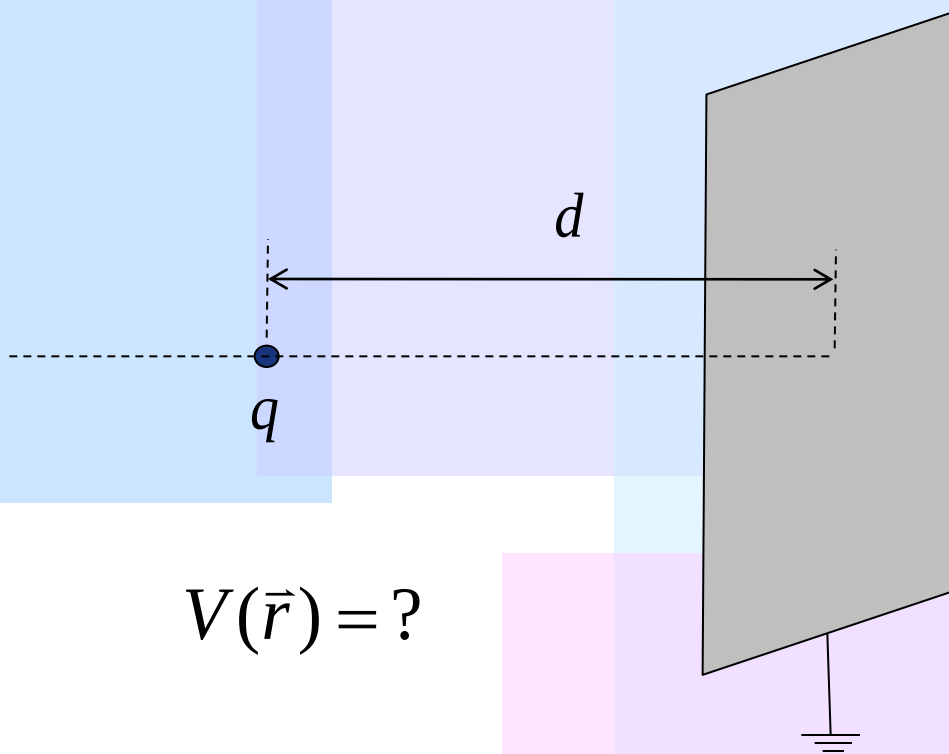


Entonces $\psi(\vec{r})$ es la función potencial del espacio delimitado por las superficies conductoras



Método de la Carga Imagen

Consideremos un plano infinito conectado a tierra y una carga puntual a una distancia d



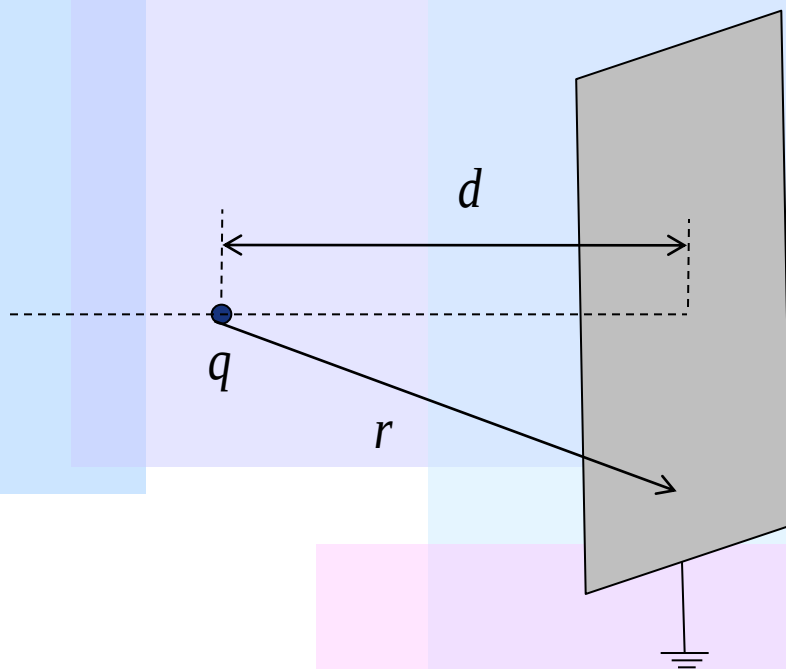
$$V(\vec{r}) = ?$$

Se pide calcular el potencial en el lado de la carga



Método de la Carga Imagen

Podemos encontrar una función potencial $\psi(\vec{r})$ que satisfaga $\nabla^2\psi(\vec{r})=0$ y la condición de borde $\psi=0$ en el plano?



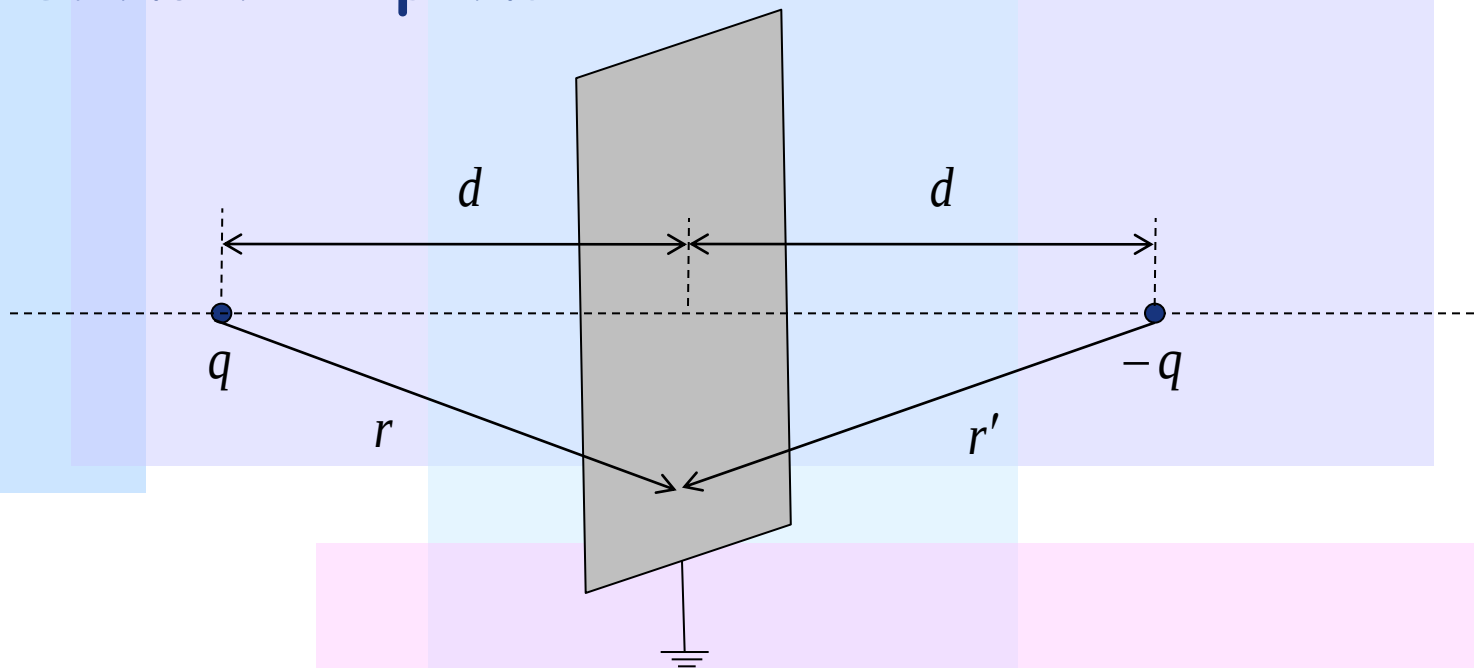
Sabemos que el potencial que produce la carga en el plano es

$$\psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Método de la Carga Imagen

Luego, para satisfacer la condición de borde $\psi = 0$ en el plano, podemos ubicar una carga de signo contrario a igual distancia del plano



El potencial es ahora
$$\psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

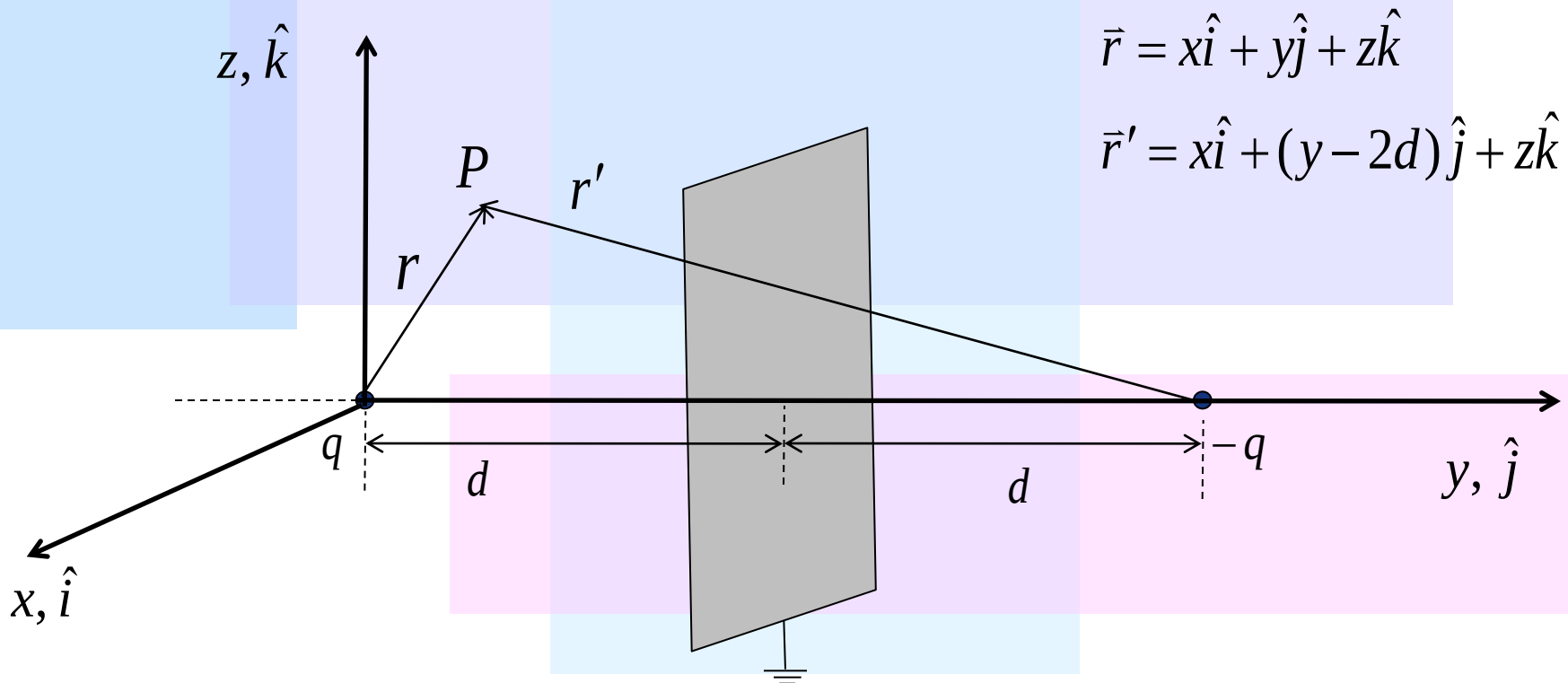
y como $r = r'$ se cumple que el potencial es nulo en el plano



Método de la Carga Imagen

El potencial en cualquier punto P del lado izquierdo es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \right) \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad r' = (x^2 + (y-2d)^2 + z^2)^{1/2}$$

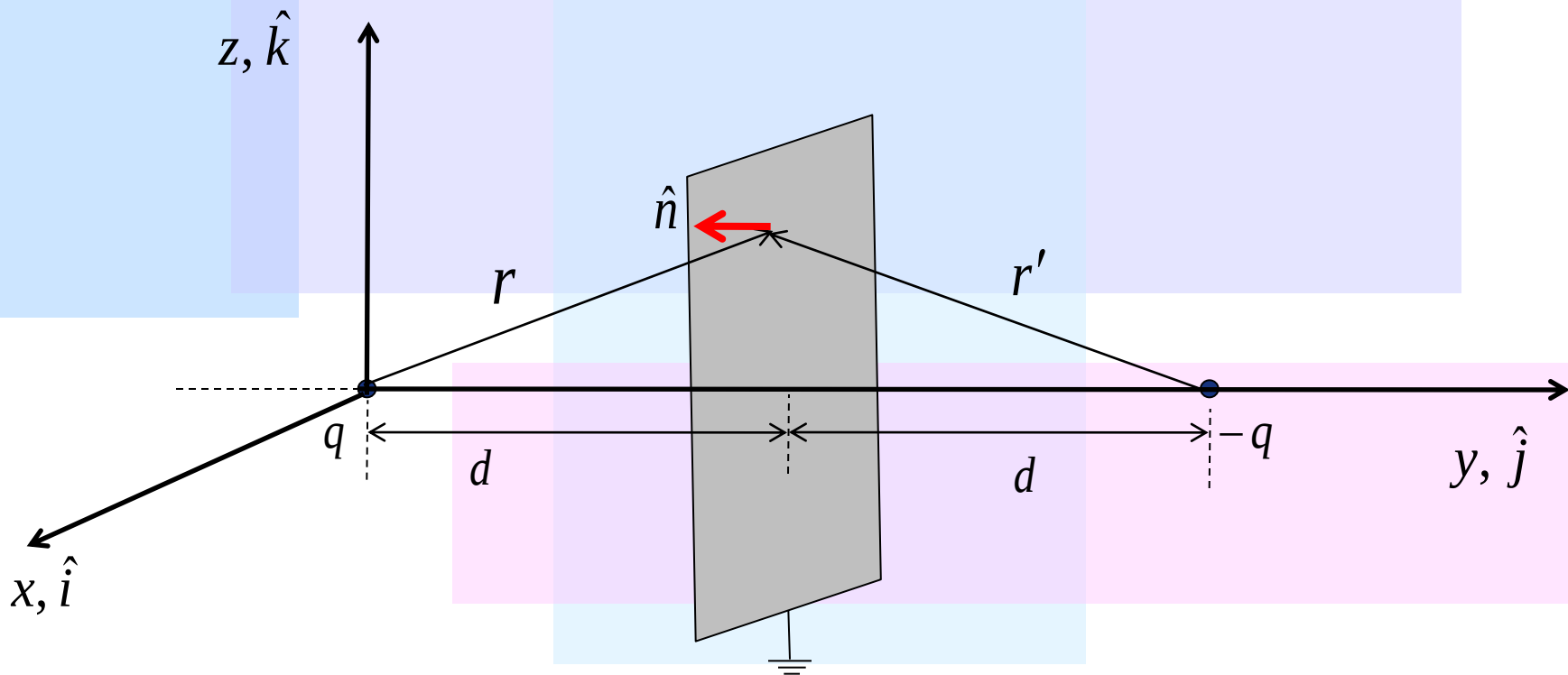




Método de la Carga Imagen

La densidad superficial de carga en el plano es

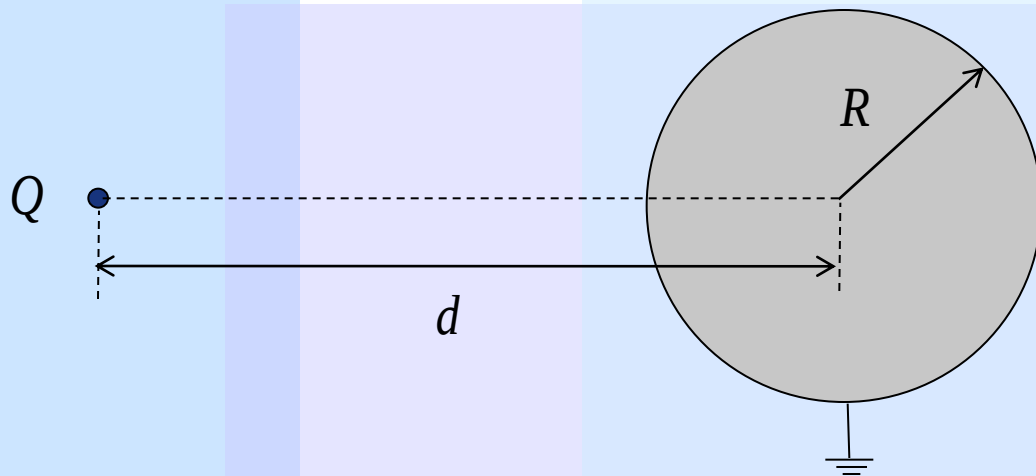
$$\sigma(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \quad \text{con } \hat{n} = -\hat{j} \quad \text{y} \quad E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q\hat{r}}{r^2} - \frac{q\hat{r}'}{r'^2} \right)$$





Método de la Carga Imagen

Caso carga frente a esfera a potencial constante

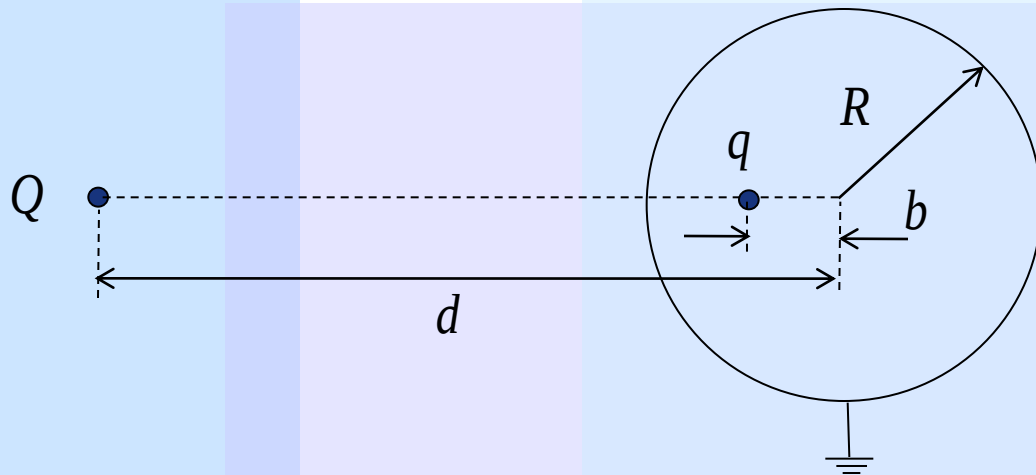


Se pide calcular el potencial en todo el espacio



Método de la Carga Imagen

El potencial dentro de la esfera es nulo.



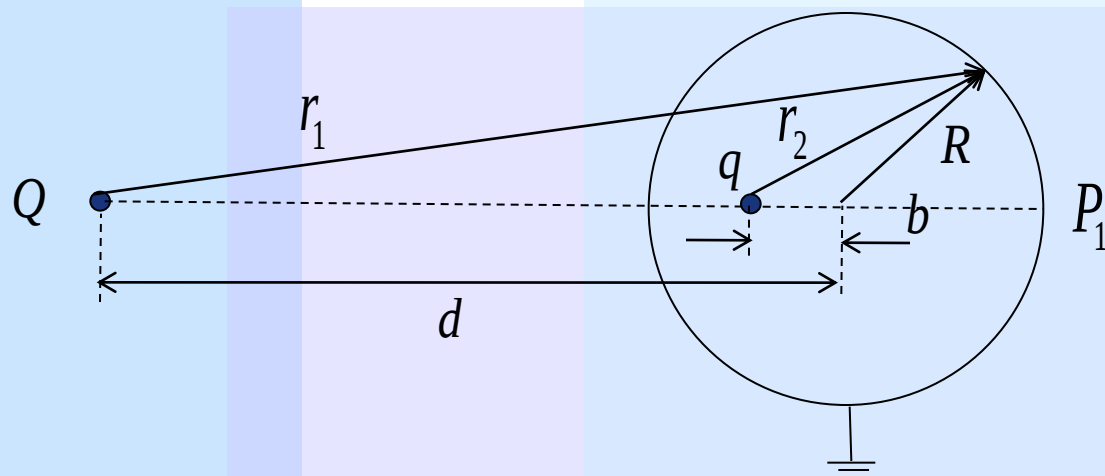
Para calcular el campo fuera usamos el método de la carga imagen. Suponemos una carga q a una distancia b del centro



Método de la Carga Imagen

El potencial en la superficie de la esfera es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right)$$



Evaluando en el punto P_1

$$r_1 = d + R$$

$$r_2 = b + R$$

Imponiendo la condición de potencial nulo en P_1

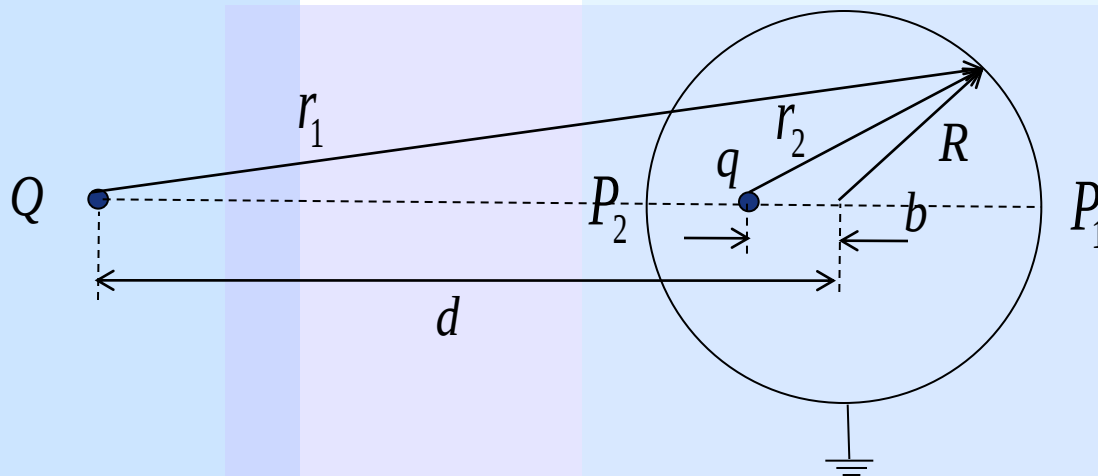
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{d + R} + \frac{q}{b + R} \right) = 0 \Rightarrow \frac{Q}{d + R} + \frac{q}{b + R} = 0$$



Método de la Carga Imagen

El potencial en la superficie de la esfera es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right)$$



Evaluando en el punto P_2

$$r_1 = d - R$$

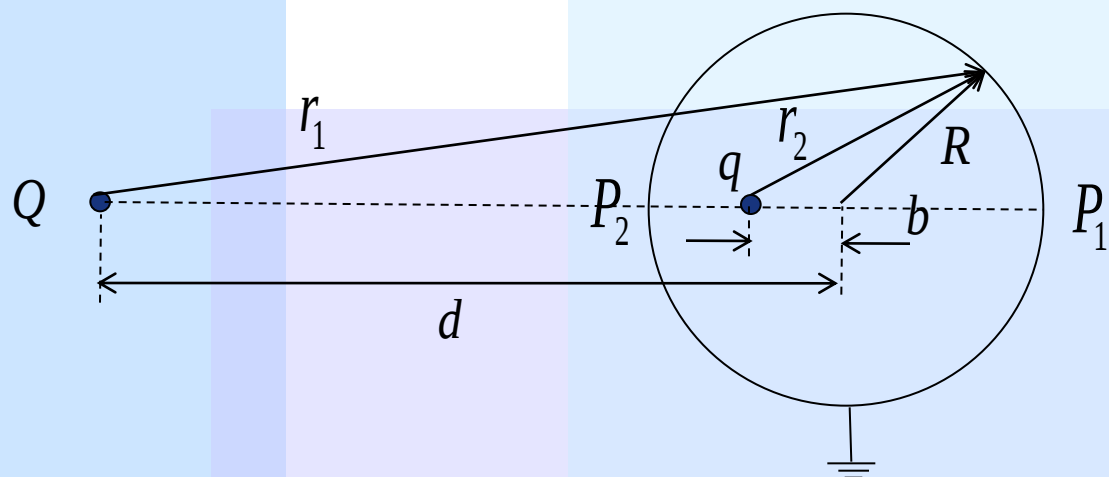
$$r_2 = R - b$$

Imponiendo la condición de potencial nulo en P_2

$$\frac{Q}{d - R} + \frac{q}{R - b} = 0$$



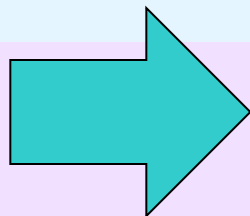
Método de la Carga Imagen



Tenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{Q}{d+R} + \frac{q}{b+R} = 0$$

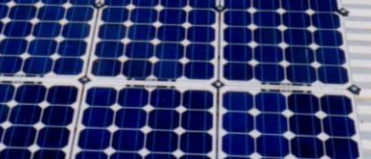
$$\frac{Q}{d-R} + \frac{q}{R-b} = 0$$



$$q = -\frac{R}{d}Q$$

$$b = \frac{R^2}{d}$$

Estos valores de q y b hacen que el potencial en cualquier punto de la superficie esférica sea también cero

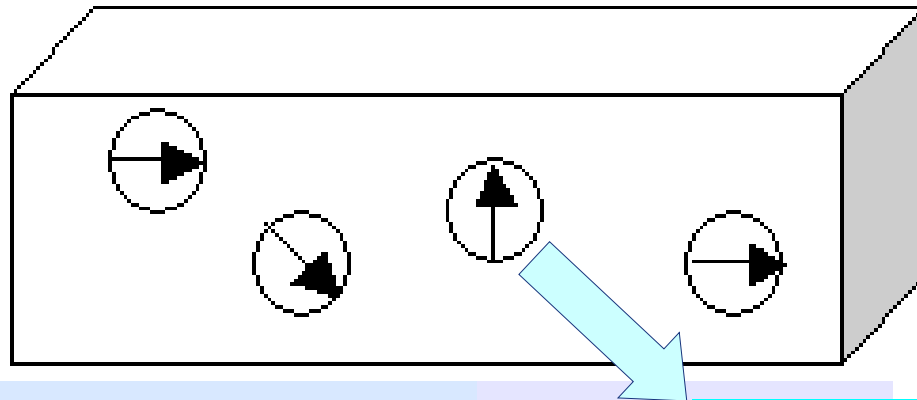


Resumen medios materiales en electrostática

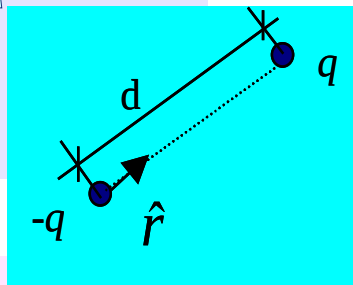
Dieléctricos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

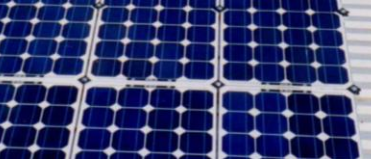
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$



$$\vec{p} = qd\hat{r}$$



Los medios se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.



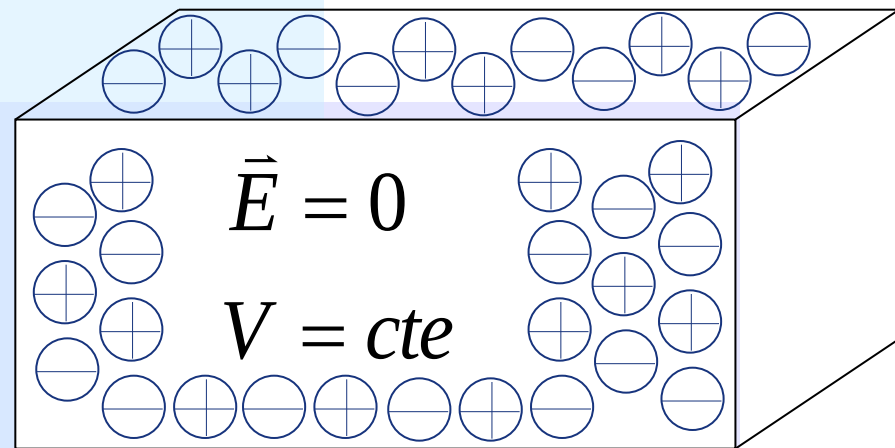
Resumen medios materiales en electrostática

Conductores

- Sólo tiene distribución superficial
- No hay polarización.

$$\vec{E} = 0$$

$$V = cte$$



Los conductores poseen abundantes cargas (positivas y negativas) que pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico