



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 10

Conductores en Electrostatica-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



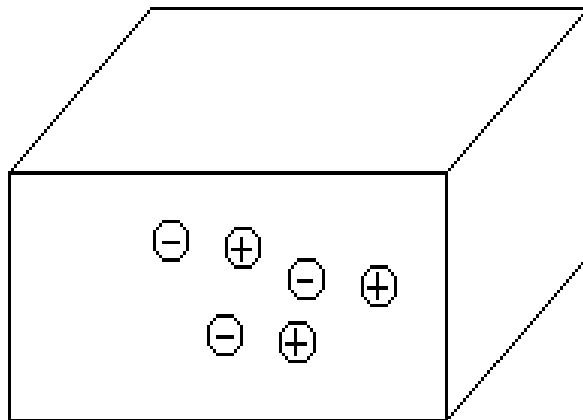
INDICE

- Modelo de conductores y propiedades
- Condensador
- Ejemplo
- Energía Electrostática
- Energía sistema de conductores
- Caso condensadores
- Fuerza eléctrica y Energía



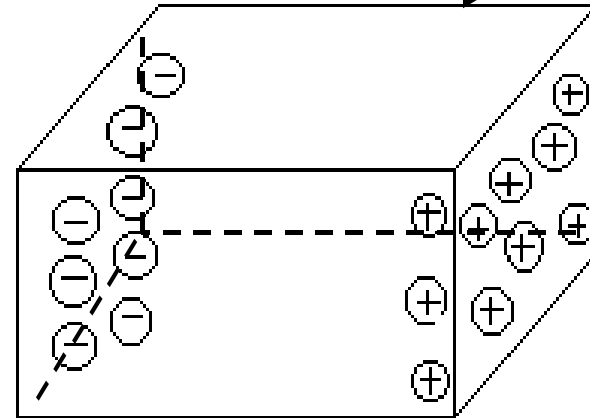
Modelo Básico de Conductores

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula

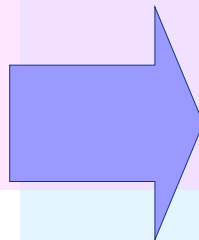
$\vec{E}$



Carga neta nula

- Abundantes cargas (positivas y) negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

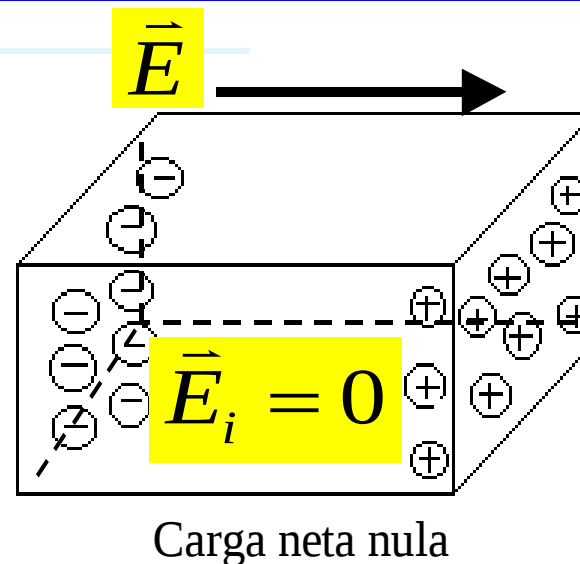
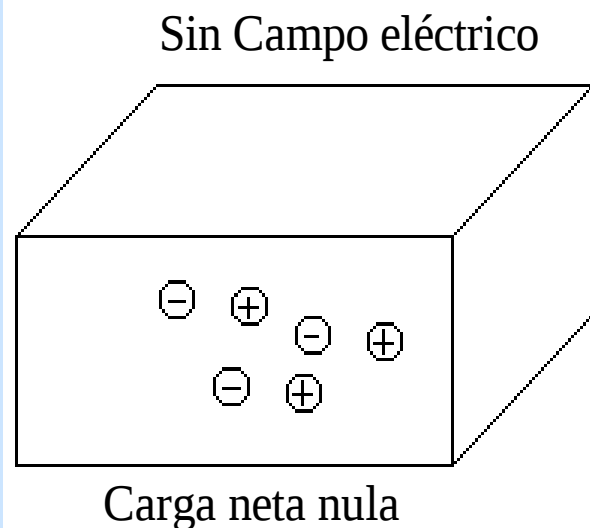
Estado de Equilibrio



Campo eléctrico nulo en el interior



Propiedades



Para el Estado de Equilibrio electrostático se cumple:

1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$



Propiedades

2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

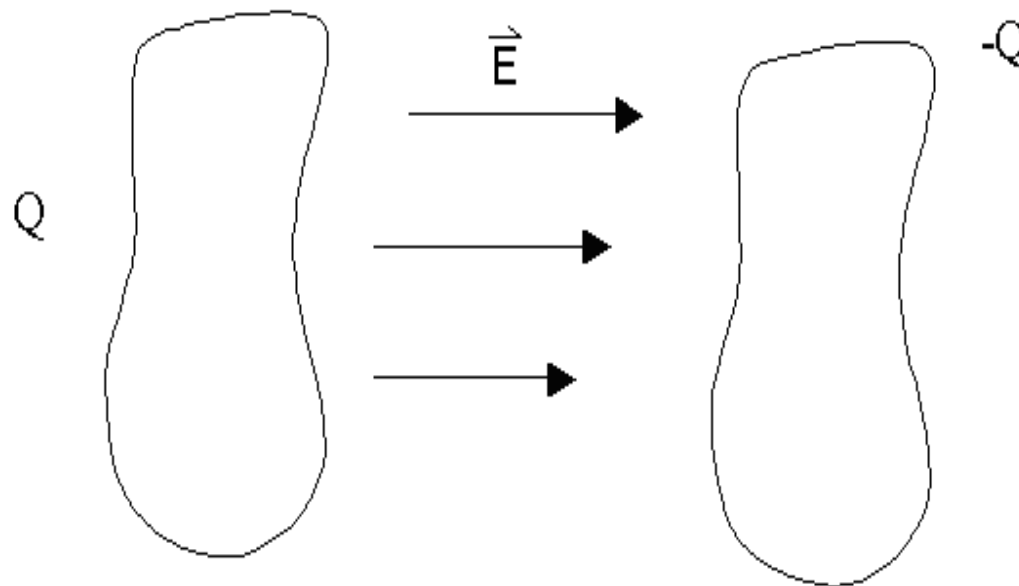
No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor

$$D_n = \varepsilon_0 E_n \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$



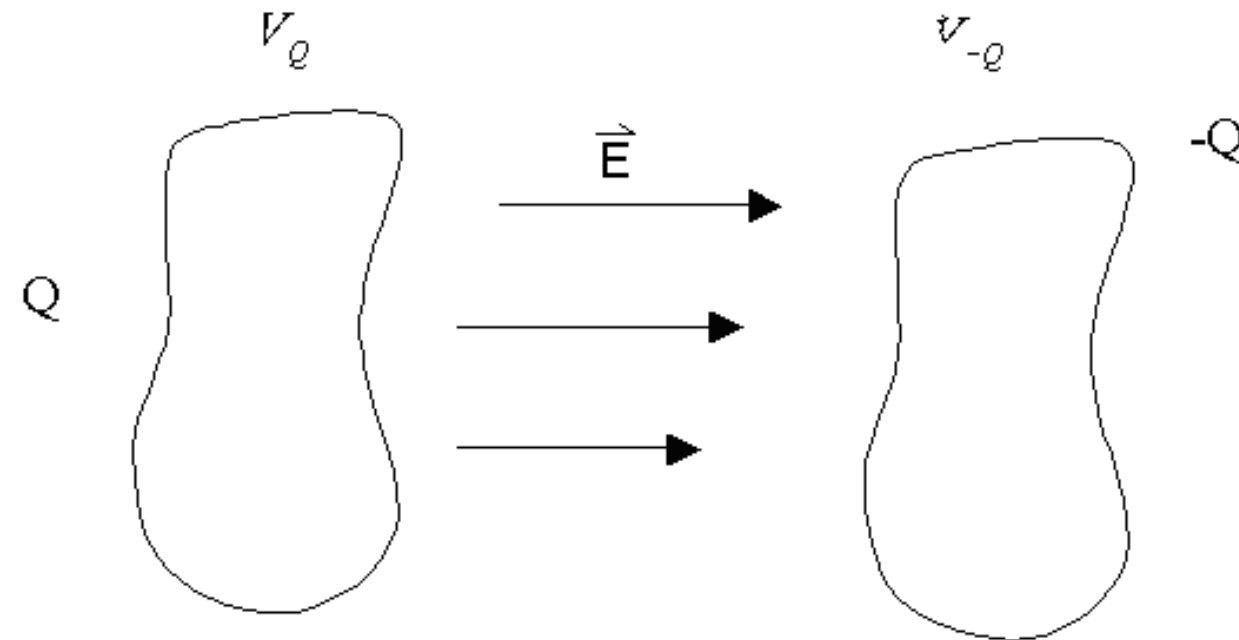
Condensadores



Sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro.



Condensadores



$$V_{\ell} > V_{-\ell}$$

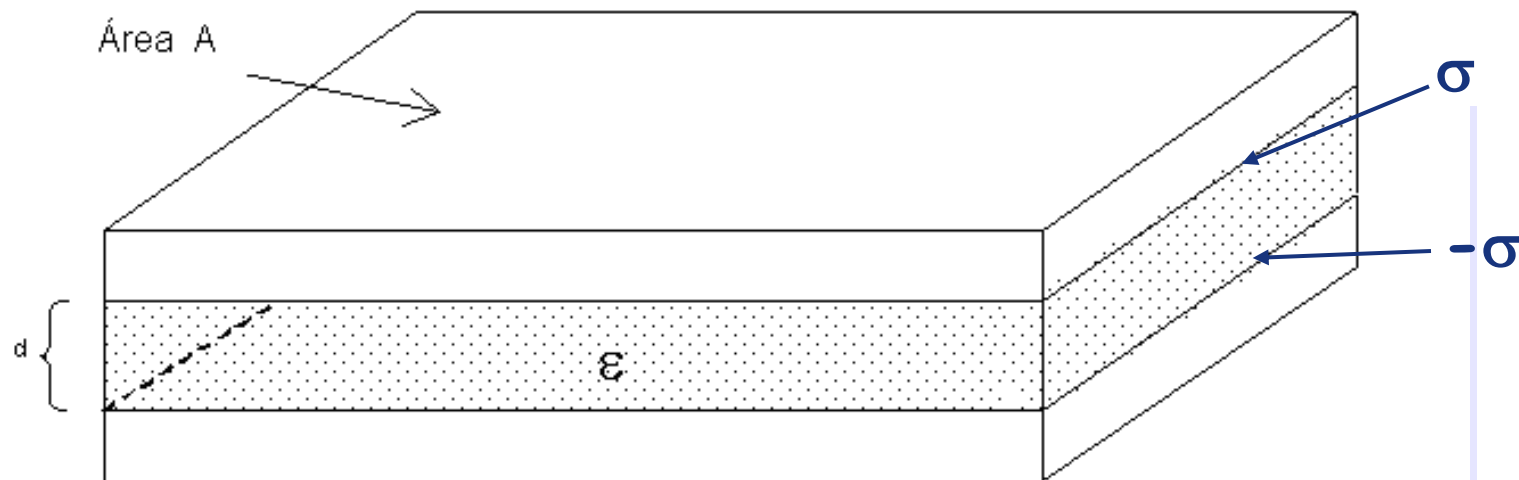
$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_{\ell} - V_{-\ell}} > 0$$

Se caracteriza a través de su capacidad C

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

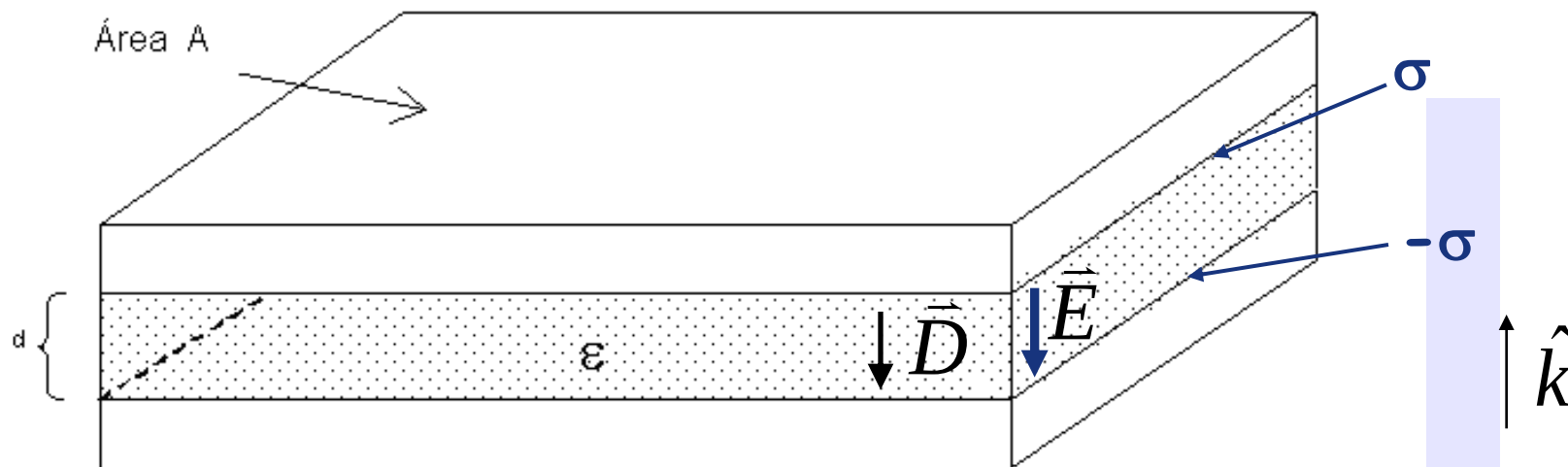


Ejemplo





Ejemplo



$$\vec{D} = -\sigma \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \hat{k} \Rightarrow - \int_{-d}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{\sigma} - V_{-\sigma} \Rightarrow \overbrace{V_{\sigma} - V_{-\sigma}}^{\Delta V} = \frac{\sigma}{\epsilon} d$$

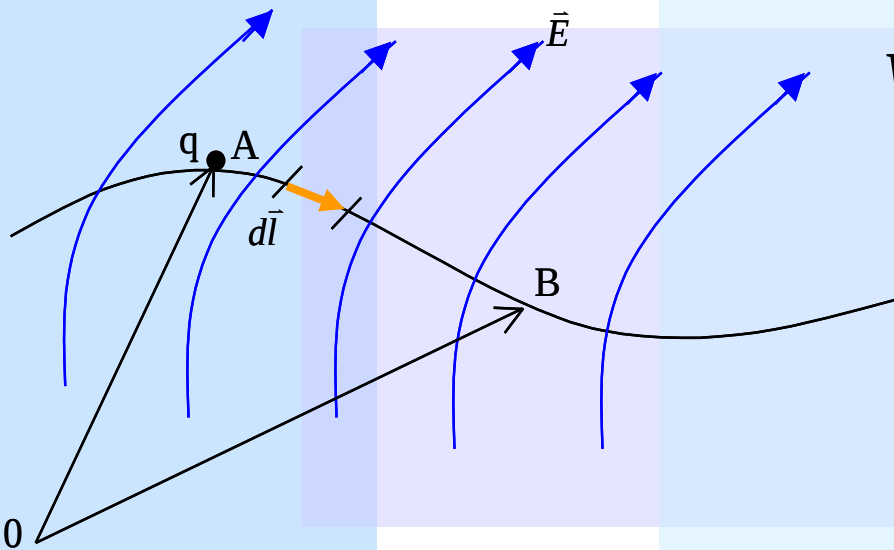
$$Q = \sigma A \text{ y } \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} d, \text{ luego } C = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\epsilon}} \Rightarrow C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Menor $d \Rightarrow$ mayor C ,
Mayor $A \Rightarrow$ mayor C ,
Mayor $\epsilon \Rightarrow$ mayor C .



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

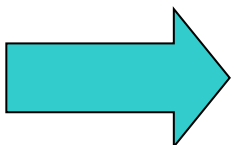
Recordemos el concepto de potencial



$$W = \int_A^B dW = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{V_{AB}}$$

$$V_A - V_B = \frac{W}{q} = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Notar que si B está en el infinito y lo tomamos como referencia $V_B = 0$



$$W = qV_A$$

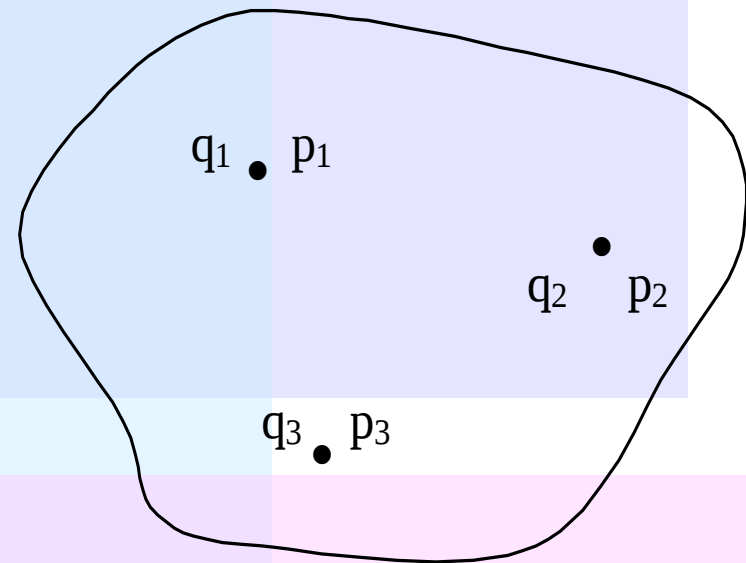
Es el trabajo para traer la carga q desde el infinito al punto A.



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía electrostática de un sistema de partículas es el trabajo necesario para formar dicho sistema $\Rightarrow W=U$.

Caso sistema de 3 cargas



Recordar que:

- El campo es conservativo
- Campos cumplen con superposición



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la primera carga no
es necesario realizar
trabajo

$$W_1 = 0$$

$$q_1 \bullet p_1$$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la Segunda carga

$$W_2 = q_2 V_{21}$$

$q_1 \bullet P_1$

$q_2 \bullet P_2$

V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_2



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para traer la 3ª carga

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

$q_1 \bullet P_1$

$q_2 \bullet P_2$

$q_3 \bullet P_3$

V_{31} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_3

V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P_3



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Luego el trabajo total es

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

$q_1 \bullet p_1$

$q_2 \bullet p_2$

$q_3 \bullet p_3$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

$q_1 \bullet p_1$

$q_2 \bullet p_2$

$q_3 \bullet p_3$

Si invertimos el orden, primero traemos la carga 3, luego la 2 y finalmente la 1 se tiene:

$$W' = \underbrace{0}_{\text{Trabajo carga 3}} + \underbrace{q_2 V_{23}}_{\text{Trabajo carga 2}} + \underbrace{q_1 V_{13} + q_1 V_{12}}_{\text{Trabajo carga 1}}$$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$$W = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

y

$$W' = 0 + q_2 V_{23} + q_1 V_{13} + q_1 V_{12}$$

Trabajo es el mismo independiente del orden, luego

$$W' = W$$

Sumando

$$\Rightarrow 2W = q_1 \underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{\text{potencial en 1}} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{\text{potencial en 2}} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{\text{potencial en 3}}$$

$$W = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

$q_1 \bullet P_1$

$q_2 \bullet P_2$

$q_3 \bullet P_3$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para un sistema de n cargas se obtiene

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k \quad \text{en [J] joules}$$

para distribuciones continuas de carga se tiene
 $\Sigma \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) dq \quad \text{en [J] joules}$$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para una distribución específica de carga tendremos

$$W = \frac{1}{2} \int \lambda(\vec{r}) V(\vec{r}) d\vec{r}$$

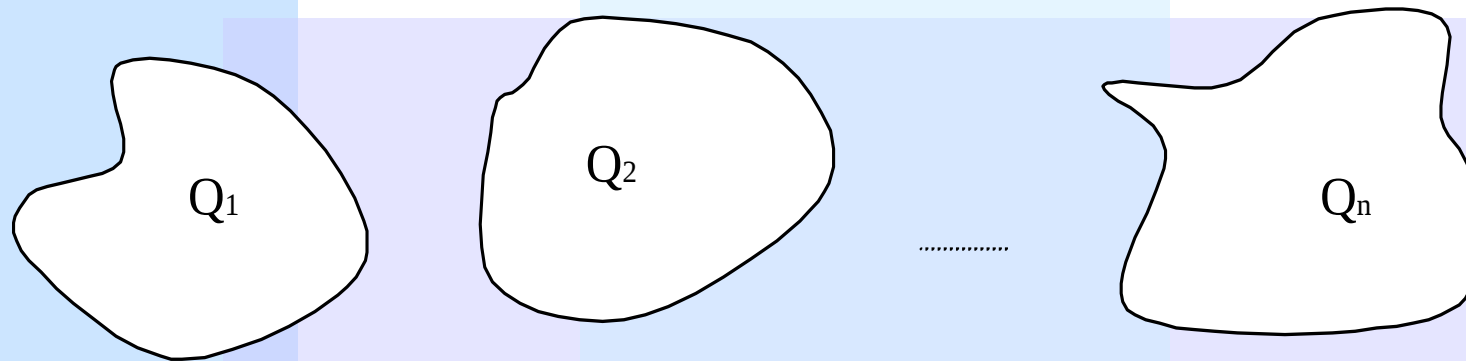
$$W = \frac{1}{2} \iint \sigma(\vec{r}) V(\vec{r}) dS$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\vec{v}$$



Energía de un Sistema de Conductores

Consideremos n conductores cargados

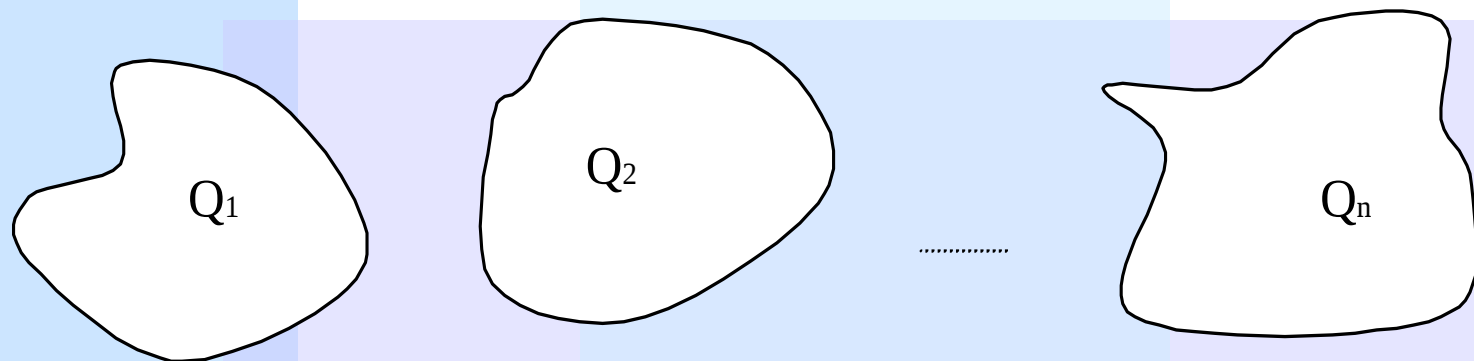


¿Cuánta energía se gastó en formar este sistema?



Energía de un Sistema de Conductores

Solo hay carga en las superficies



$$W = \frac{1}{2} V_1 \underbrace{\iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r}) dS}_{Q_1} + \frac{1}{2} V_2 \underbrace{\iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r}) dS}_{Q_2} + \dots + \frac{1}{2} V_n \underbrace{\iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r}) dS}_{Q_n}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \sum v_i Q_i$$



Caso condensadores

Cada condensador tiene igual carga y de signo contrario

V_1



Q_1

V_2



Q_2

$$W = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i \Rightarrow W = \frac{1}{2} (V_1 Q_1 + V_2 Q_2) \Rightarrow Q_2 = -Q_1 \Rightarrow W = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) Q_1$$

pero $Q = CV$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ó

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

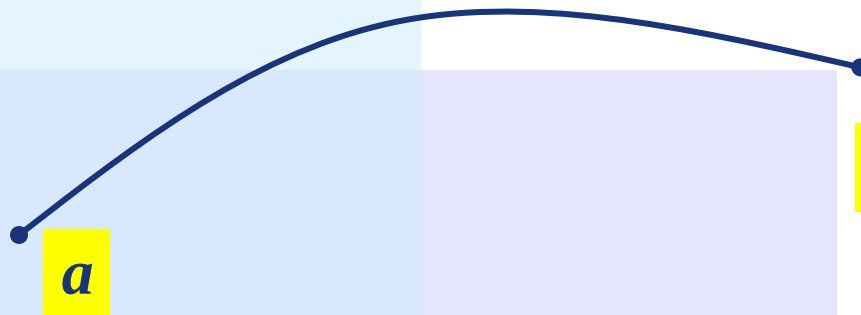


Fuerza Eléctrica y Energía

Trabajo entre dos puntos

$$\vec{F} = -\nabla W$$

$$F\Delta x = -\Delta W$$



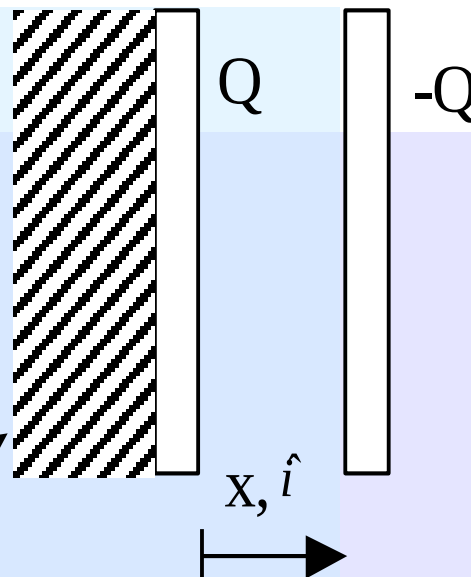


Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas

La energía del sistema es

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



No se mueve

Al producirse el movimiento de atracción, la carga neta se mantiene constante ($Q=\text{constante}$)

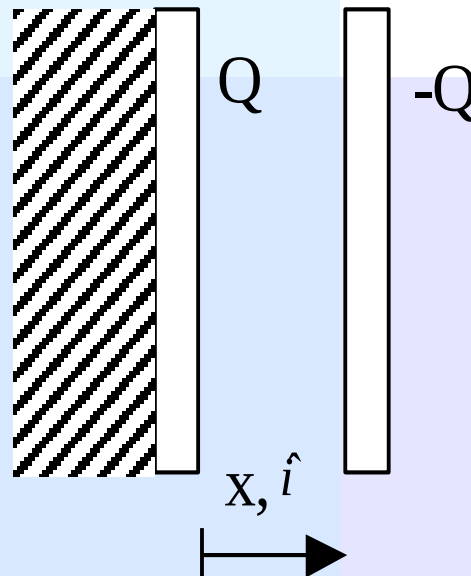


Fuerza Eléctrica y Energía

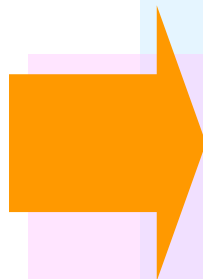
$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La capacidad es función de la distancia x

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{x}$$



$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} x$$



$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \hat{i} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \hat{i}$$

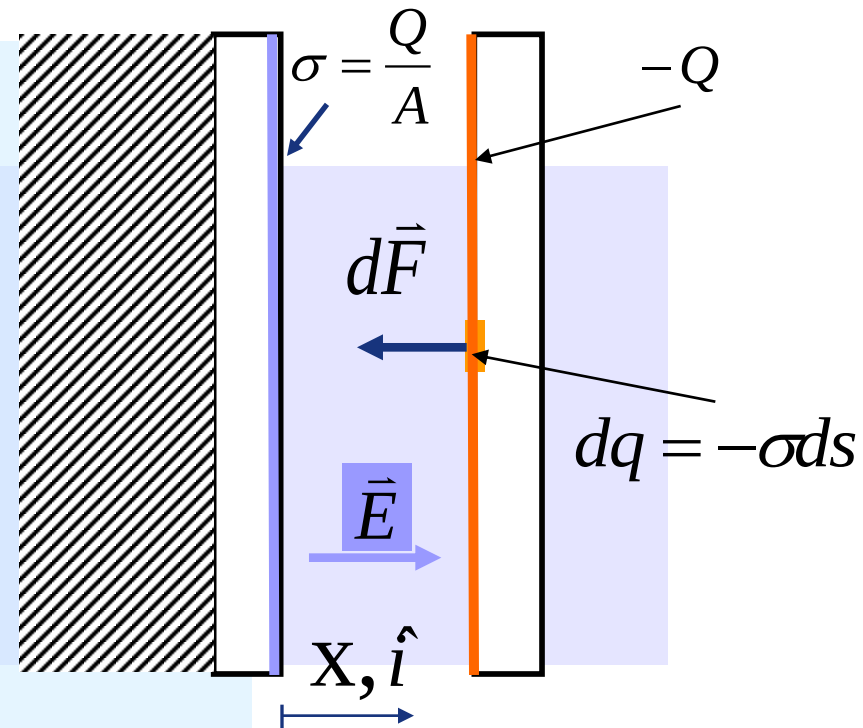
Fuerza es independiente de la distancia x



Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza producida por el campo de una placa sobre las cargas de la otra





Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza sobre elemento dq de otra placa con $-Q$

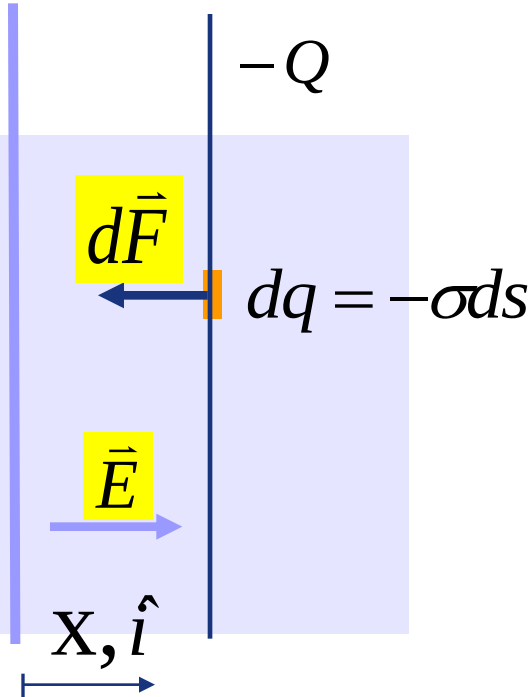
$$d\vec{F} = \vec{E} dq$$

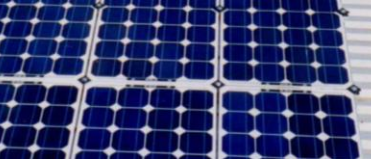
Notar que este campo es sólo el producido por el plano Q , es decir,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

Campo producido por placa con Q en la posición de la placa con carga $-Q$

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$





Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Fuerza producida por campo entre las placas

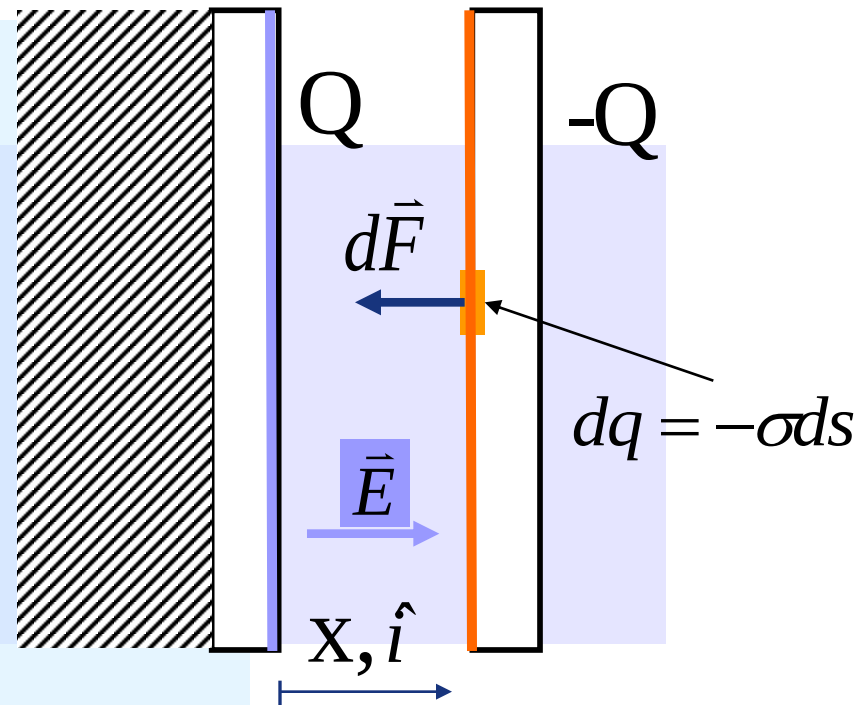
$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} \sigma ds = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A \hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{(\sigma A)^2}{2\epsilon_0 A} \hat{i}$$

$$\therefore \vec{F} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \hat{i}$$



Fuerza es independiente de la distancia x



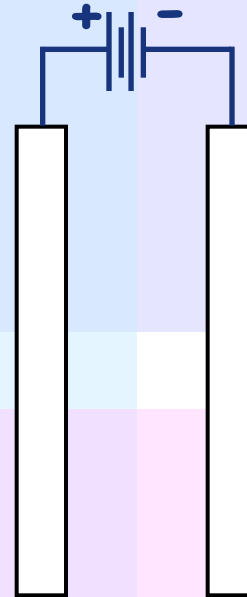
Fuerza electromotriz

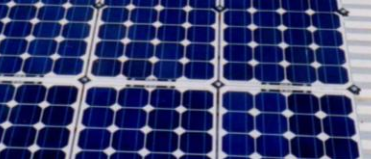
¿Existen dispositivos capaces de mantener una diferencia de potencial entre dos conductores?

Si

Esto se logra mediante una fem o batería, la cual es un dispositivo que tiene la capacidad para mantener la diferencia de potencial constante entre sus bornes

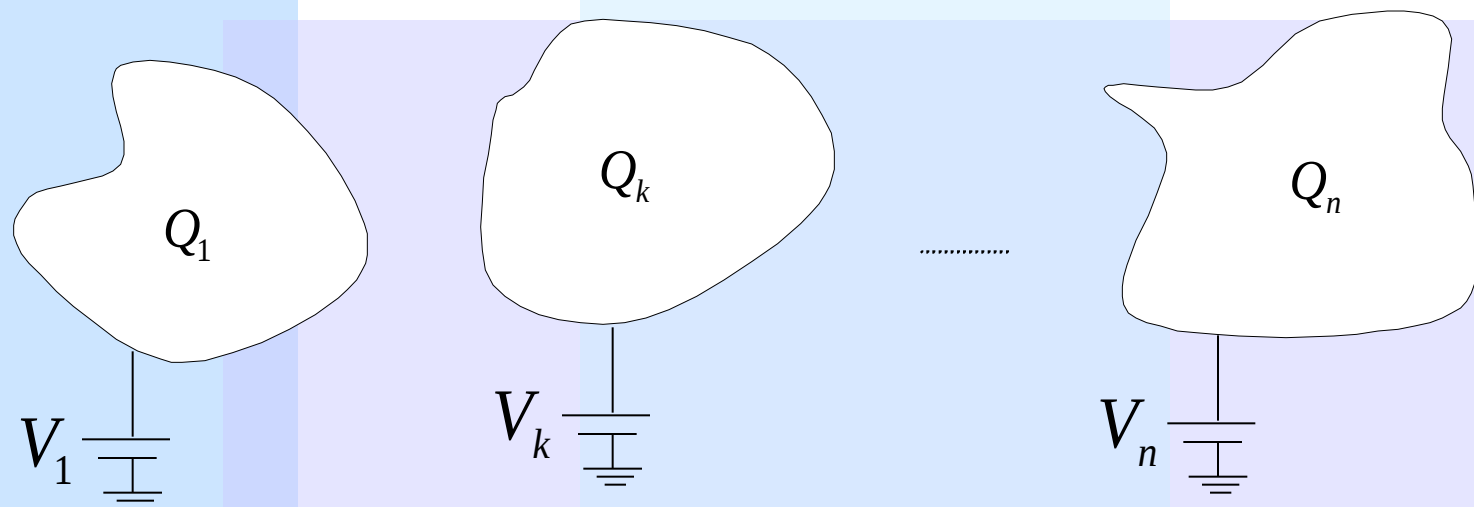
$$V_Q - V_{-Q} = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$





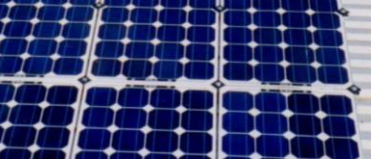
Energía con Fuentes de Voltaje Constante

Consideremos n conductores con potencial constante

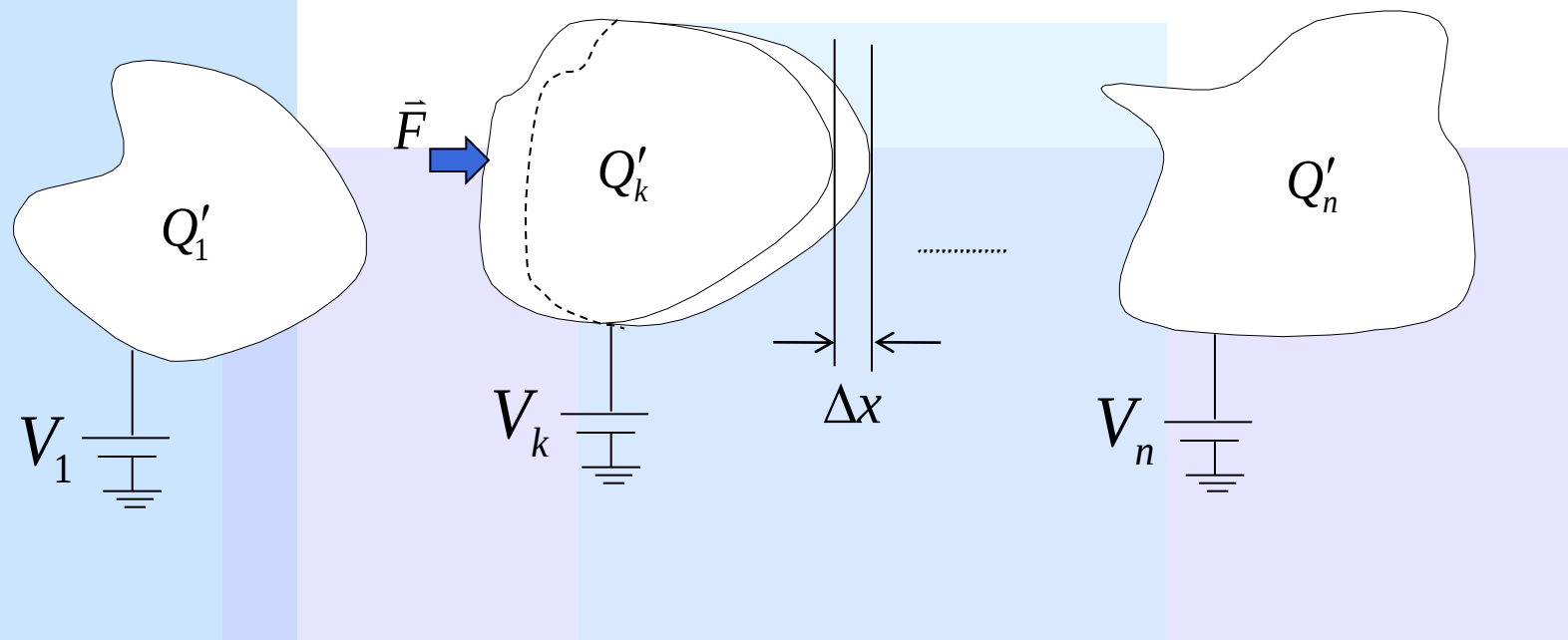


Indica voltaje cero

El potencial de cada conductor está fijo mediante fuentes de voltaje (fuerza electromotriz fem)



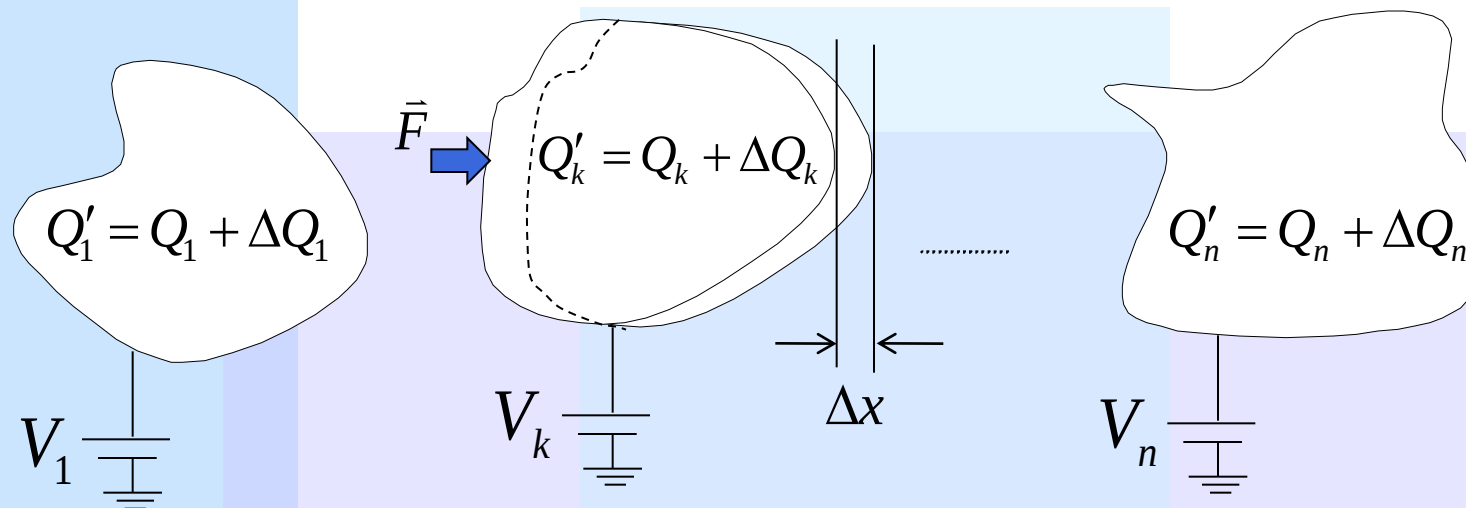
Energía con Fuentes de Voltaje Constante



- Supondremos que el conductor k experimenta un desplazamiento virtual Δx
- Se produce una variación en todas las cargas



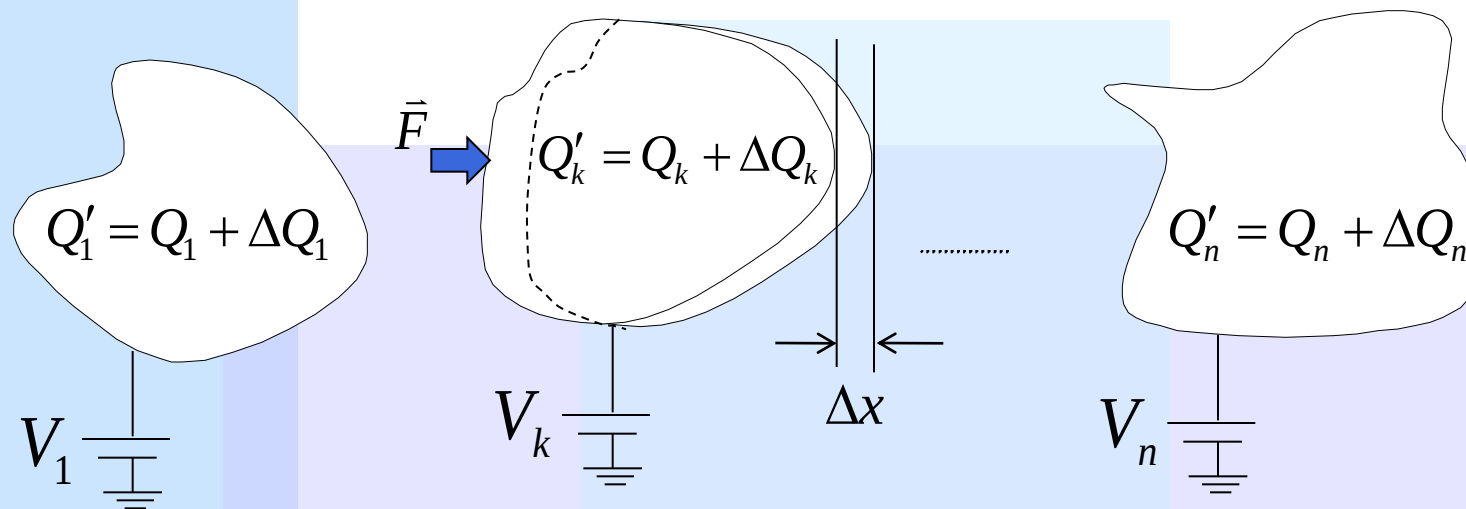
Energía con Fuentes de Voltaje Constante



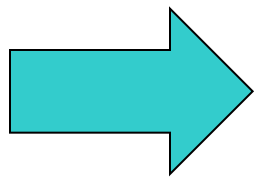
- La variación en las cargas $\Delta Q_i = Q_i - Q'_i$ es suministrada por cada fuente de voltaje (fem)
- Notar que esto se hace manteniendo constante el potencial en cada conductor



Energía con Fuentes de Voltaje Constante



- El trabajo realizado por cada fem es $\Delta W_i = V_i \Delta Q_i$
- El trabajo realizado por la fuerza externa es $\Delta W_e = F \Delta x$



Luego el cambio de energía electrostática del sistema es $\Delta U = \Delta W_e + \sum_{i=1}^n \Delta W_i$



Energía de un Sistema de Conductores

En este caso, el cambio en la energía electrostática del sistema es igual al trabajo mecánico de desplazamiento más la energía proporcionada por las fuentes que mantienen el potencial constante en cada conductor (fem).

$$\Delta U = \Delta W_e + \sum_{i=1}^n \Delta W_i$$

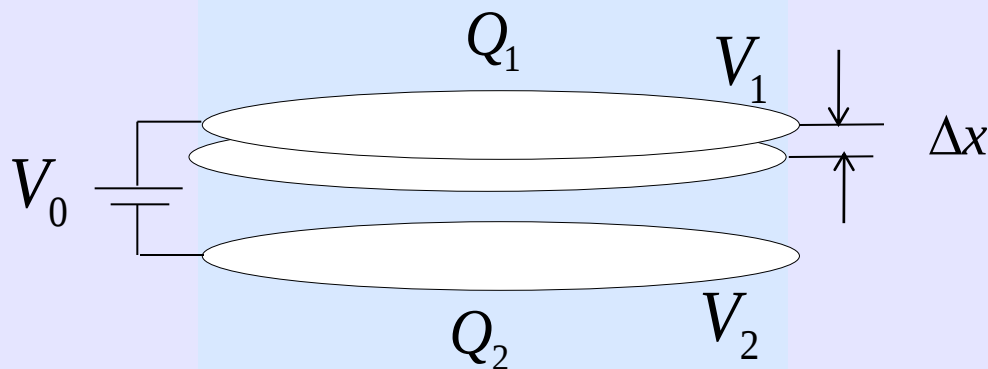
Notar que $\Delta U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q_i \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q_i = \Delta W_e + \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q_i$

$$\Rightarrow \Delta W_e = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q_i \Rightarrow F \Delta x = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q_i$$



Caso Condensadores a Potencial Constante

Condensador se mantiene a una misma diferencia de potencial



$$\Delta W = -\frac{1}{2} \sum V_i \Delta Q_i \Rightarrow \Delta W = -\frac{1}{2} (V_1 \Delta Q_1 + V_2 \Delta Q_2) \Rightarrow$$

$$\Delta Q_2 = -\Delta Q_1 = -\Delta Q \Rightarrow \Delta W = -\frac{1}{2} \overbrace{(V_1 - V_2)}^{V_0} \Delta Q \quad \Delta W = -\frac{1}{2} V_0 \Delta Q$$

pero $\Delta Q = \Delta C V_0 \Rightarrow \Delta W = -\frac{1}{2} V_0^2 \Delta C$

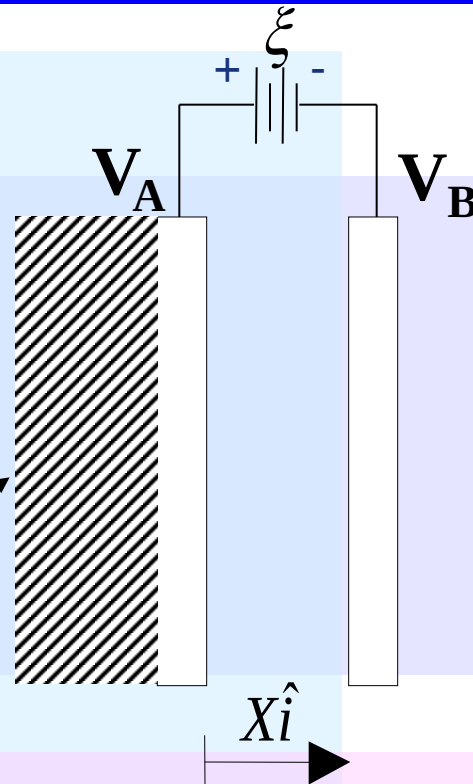


Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas con diferencia de potencial constante

$$\vec{F} = \nabla W$$

No se mueve



$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Al producirse el movimiento de atracción, la diferencia de potencial se mantiene constante ($\Delta V = V_A - V_B = \xi$ constante)



Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

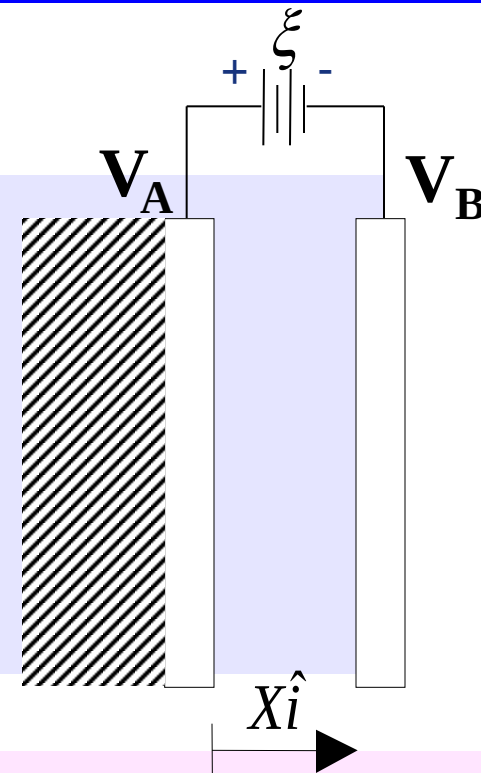
La capacidad es función de la distancia x

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{x} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x} \xi^2$$



$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial x} \hat{i} = - \frac{\epsilon_0 A \xi^2}{2x^2} \hat{i}$$

Fuerza es dependiente de la distancia x





Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

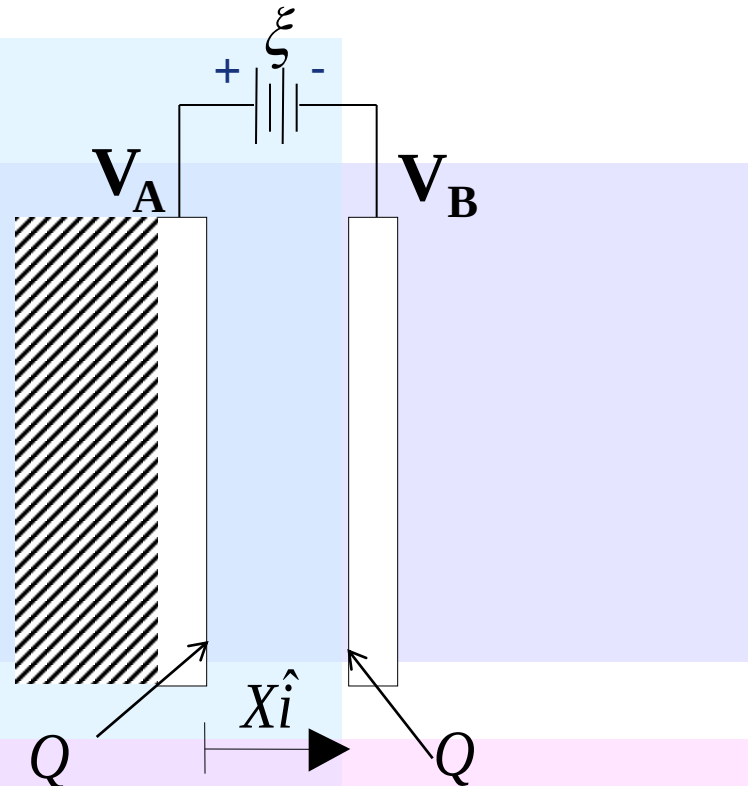
Campo producido por placa con Q en la posición de la placa con carga $-Q$

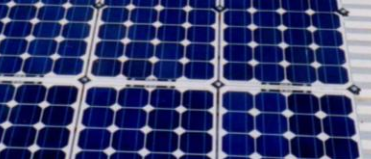
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} = \frac{Q}{2A\epsilon_0} \hat{i}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{x} \Rightarrow Q = \epsilon_0 \frac{A}{x} \xi$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{x} \xi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \epsilon_0 \frac{A}{x} \xi \frac{1}{2A\epsilon_0} \hat{i} = \frac{\xi}{2x} \hat{i}$$





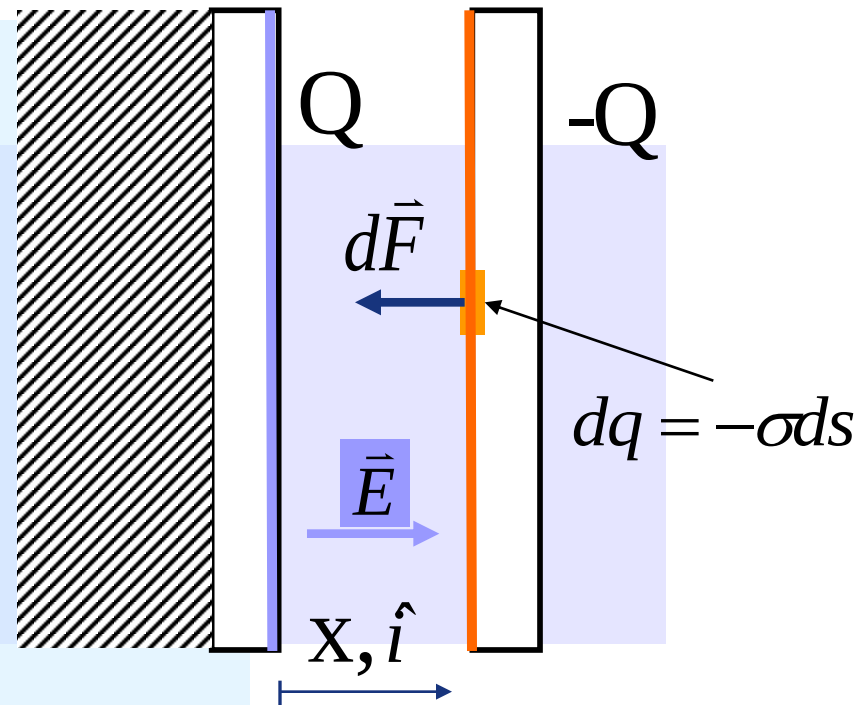
Fuerza Eléctrica y Energía

Fuerza producida por placa con
Q sobre placa con carga -Q

$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$

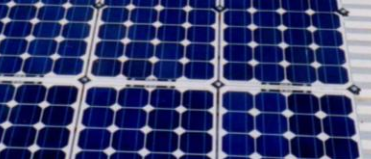
$$\vec{E} = \frac{\xi}{2x} \hat{i}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$



$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\xi}{2x} \hat{i} \frac{\epsilon_0 \xi}{x} ds = -\iint_A \frac{\epsilon_0 \xi^2}{2x^2} ds \hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\epsilon_0 A \xi^2}{2x^2} \hat{i}$$

Fuerza es dependiente de la distancia x y tiende a juntar las placas

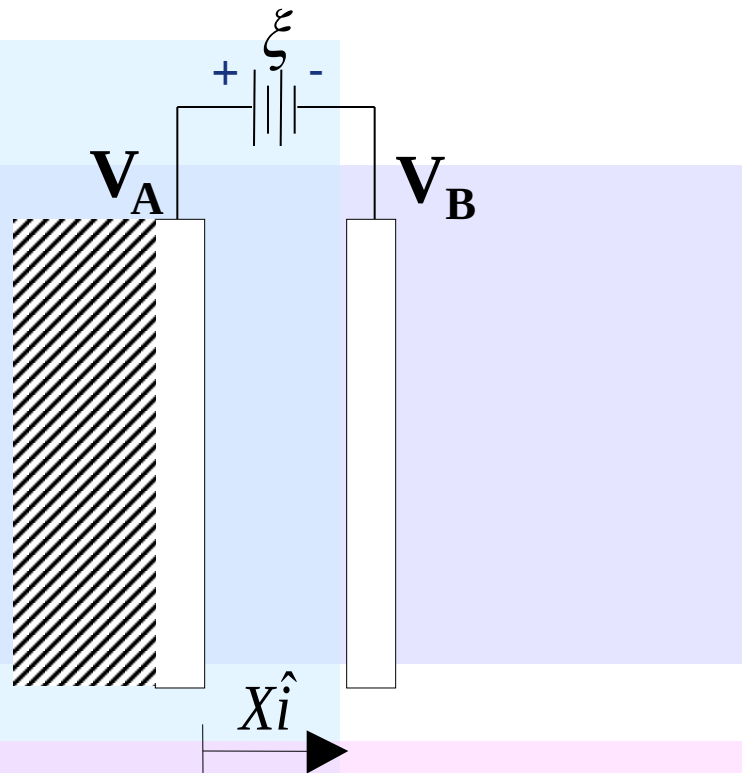


Fuerza Eléctrica y Energía

$$Q = \epsilon_0 \frac{A}{x} \xi$$

$$\vec{E} = \frac{\xi}{2x} \hat{i}$$

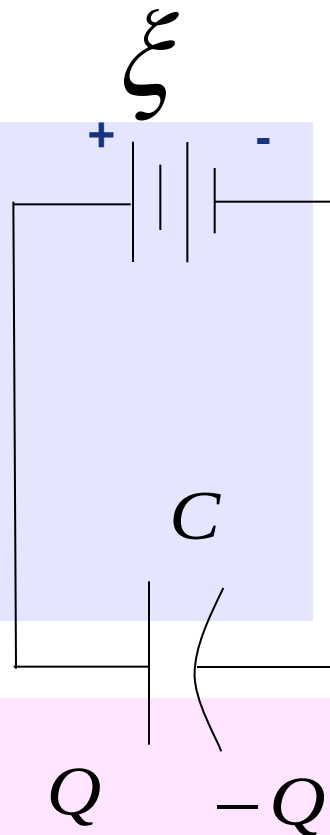
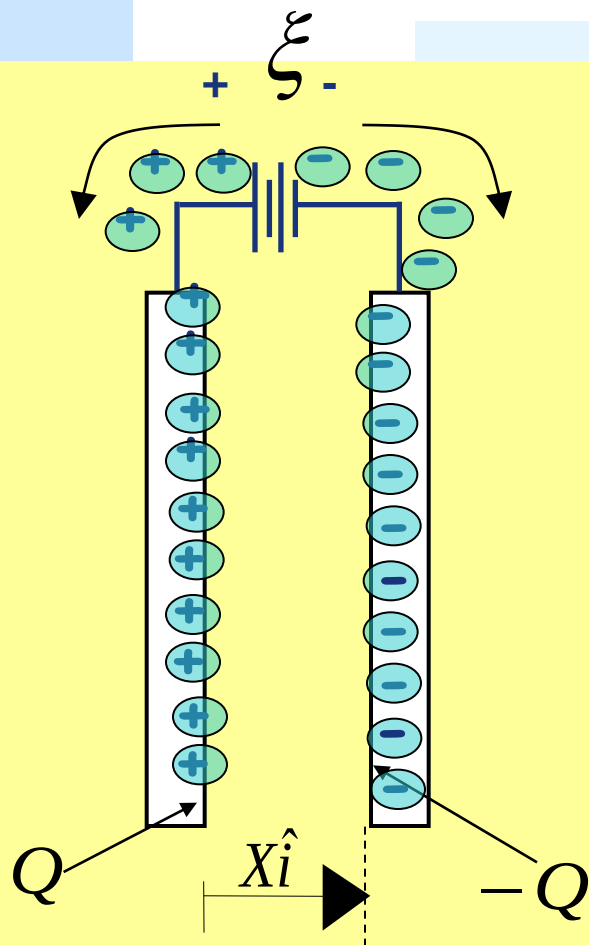
$$\vec{F} = -\frac{\epsilon_0 A \xi^2}{2x^2} \hat{i}$$



Al acercarse las placas la carga aumenta y, por lo tanto, aumenta la fuerza de atracción.



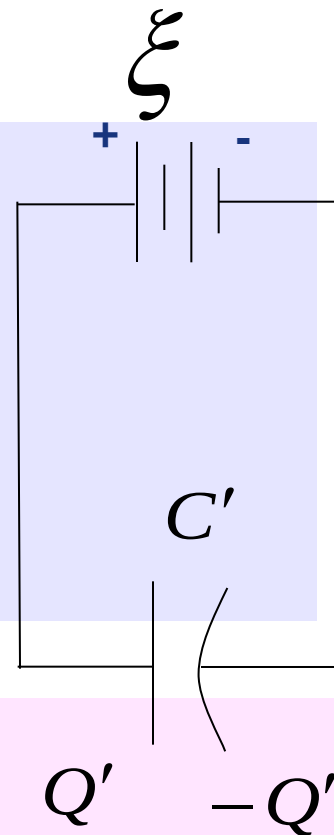
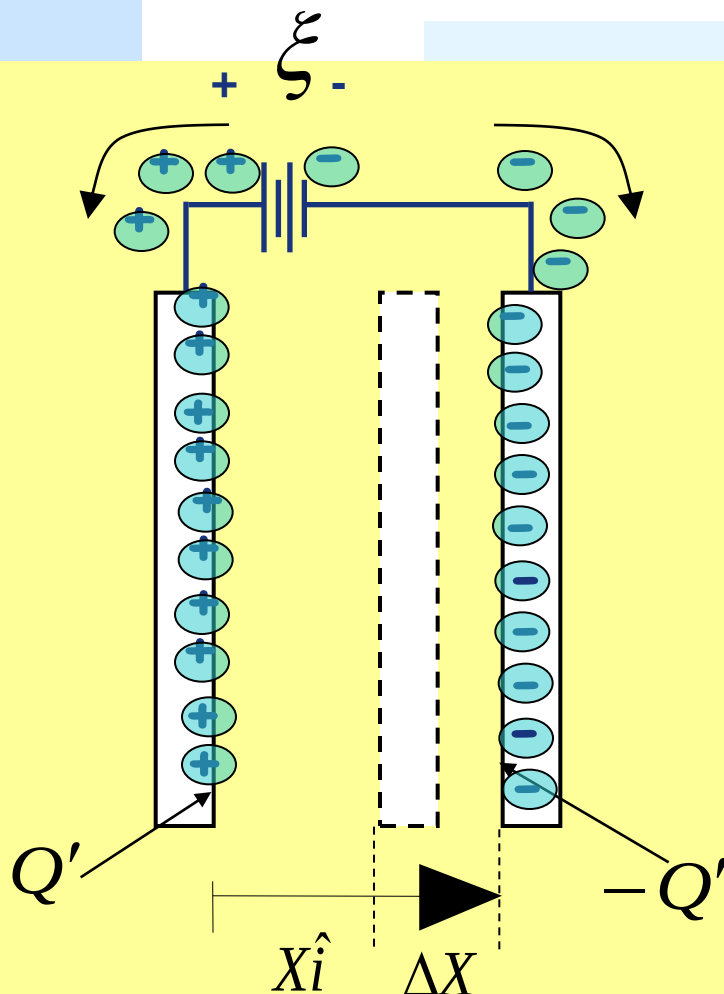
Fuerza electromotriz



La Fuerza Electromotriz (fem) ξ se encarga de mantener constante la diferencia de potencial



Fuerza electromotriz



Notar que la carga cambia. La suministra la fem