FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 9
Conductores en Electrostática-I

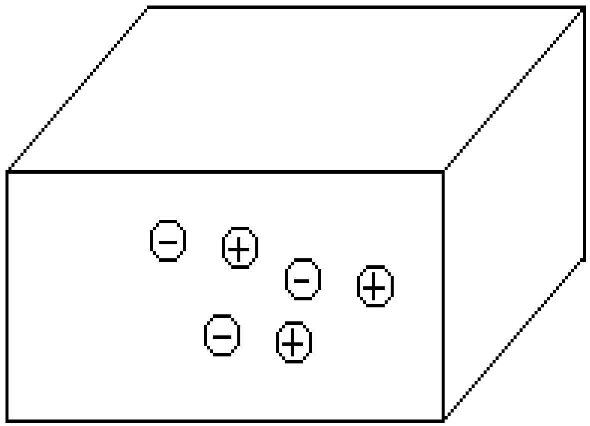
LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Modelo básico de conductores
- Propiedades
- Caso conductor con oquedad
- Ejemplos

Modelo Básico de Conductores

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula

Hipótesis:

•Abundantes cargas positivas y negativas (infinitas)

• Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

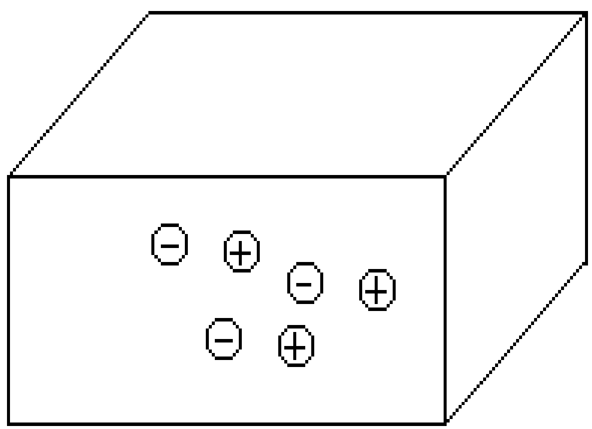
Estado de Equilibrio Electrostático:

Ya no hay movimiento de Cargas

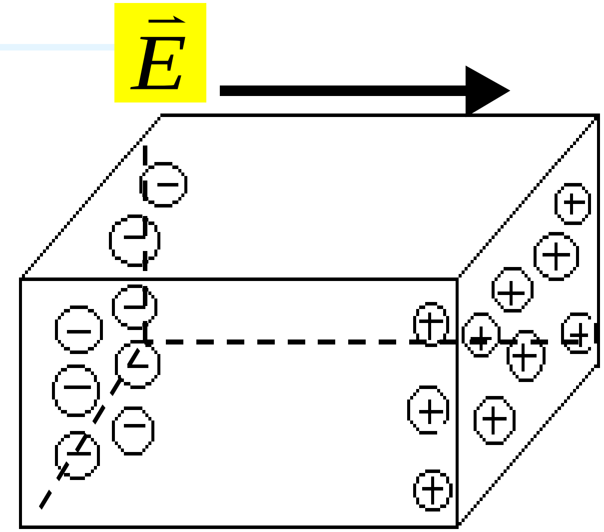
Campo eléctrico nulo en el interior (de lo contrario habría movimiento de cargas)

Modelo Básico de Conductores

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula

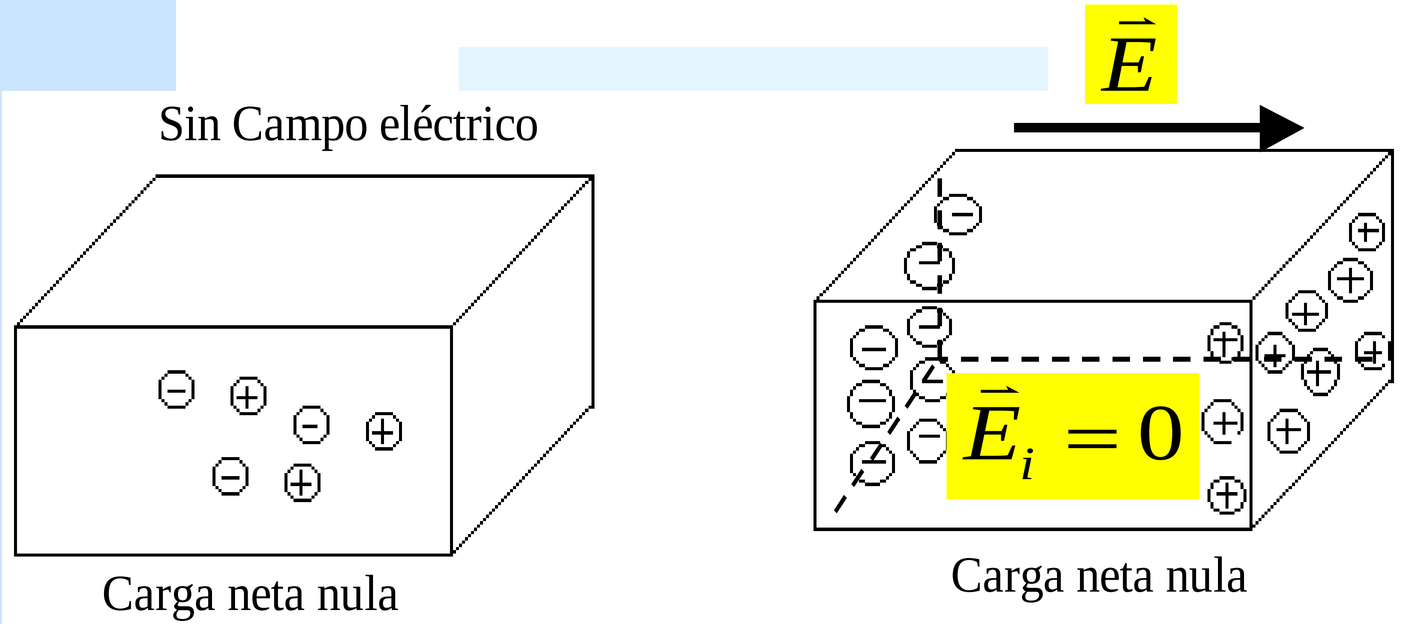


Carga neta nula

- Abundantes cargas positivas y negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

Estado de Equilibrio → **Campo eléctrico nulo en el interior**

Propiedades

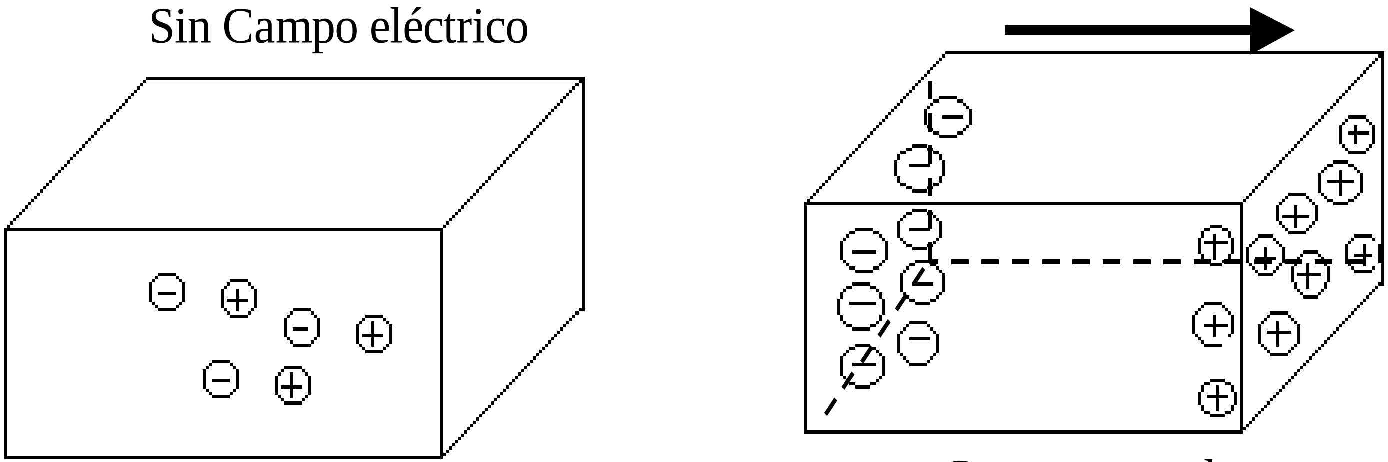


1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

Estado de Equilibrio dentro del conductor

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$

Propiedades



2. Toda la superficie del conductor es una equipotencial

Estado de Equilibrio dentro del conductor

$$\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

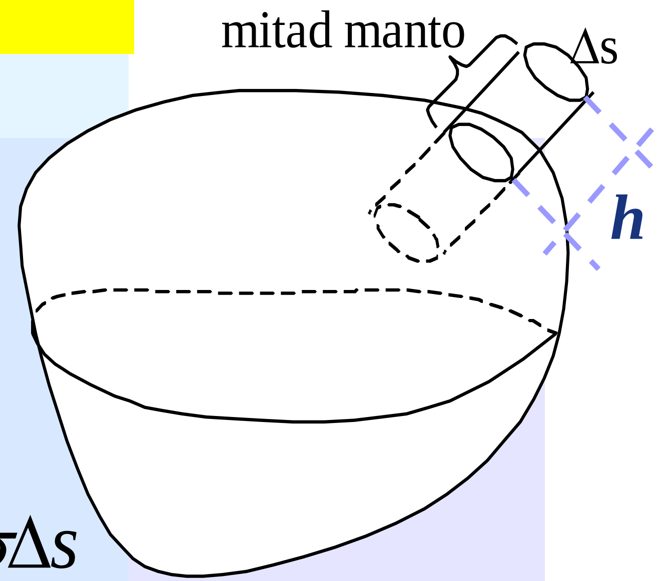
No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor

Propiedades

Conductor en estado de Equilibrio

$$\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow D_{\text{int.}} = 0$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\substack{mitad\\manto}} D \cdot dS + \iint\limits_{\substack{tapa\\exterior}} \vec{D} \cdot dS$$



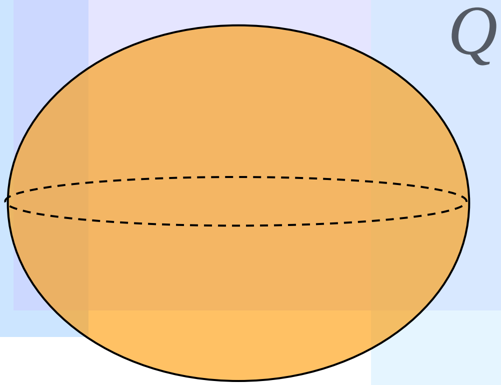
$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_n \Delta s \;\Rightarrow D_n \Delta s = \sigma \Delta s$$

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor (sino la carga se movería)

$$D_n = \varepsilon_0 E_n \quad \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

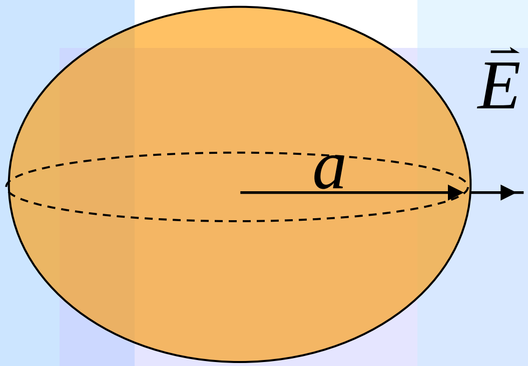
Ejemplos

¿De que signo es el potencial de un conductor cargado con carga Q>0?



Ejemplos

En la superficie



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

para

$$r \to \infty$$

$$\vec{E} \to 0\hat{n}$$

$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

$$ref = \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \int_{r}^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Ejemplos

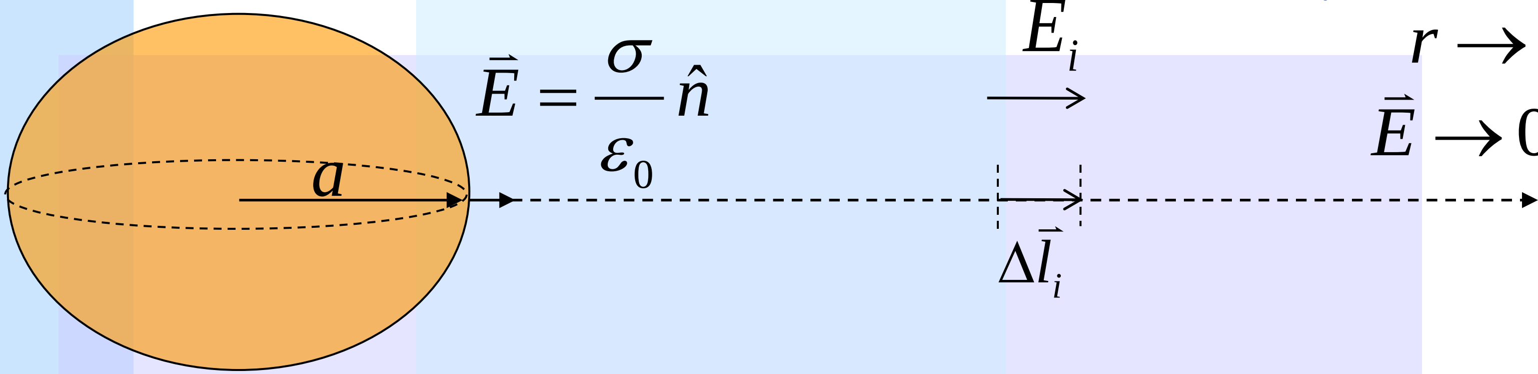
En la superficie

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

para

$$r \to \infty$$

$$\vec{E} \to 0\hat{n}$$



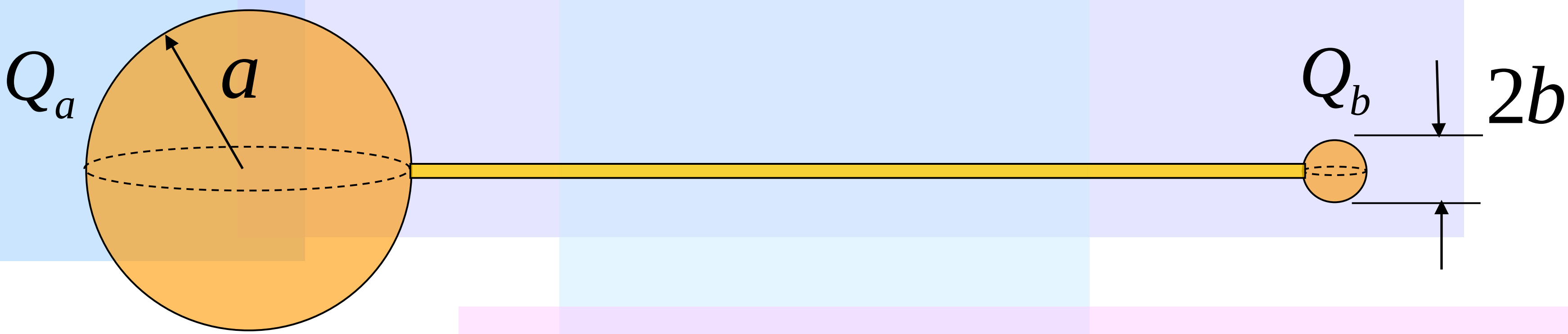
$$V(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\vec{E}_i \bullet \Delta\vec{l}_i}_{>0}$$

$$\therefore V(\vec{r} = a) > 0$$

Ejemplos

¿Cuál es la razón entre las cargas de ambas esferas si se unen por un conductor muy delgado?

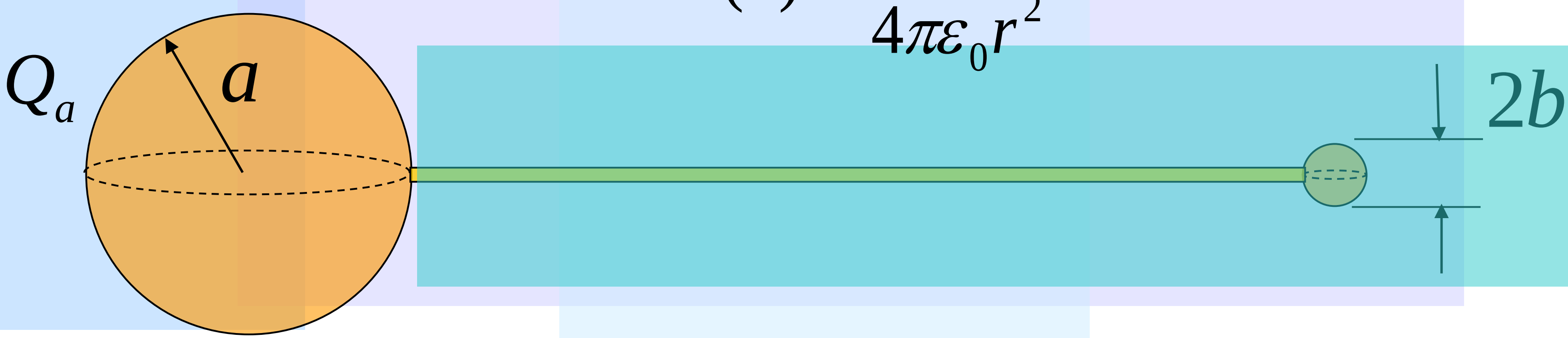


Supuesto: esferas están a gran distancia entre sí

Ejemplos

Si esferas están a gran distancia entonces el campo de una esfera no afecta a la otra

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{Q_a \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$ref = \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\therefore V(\vec{r} = a) = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

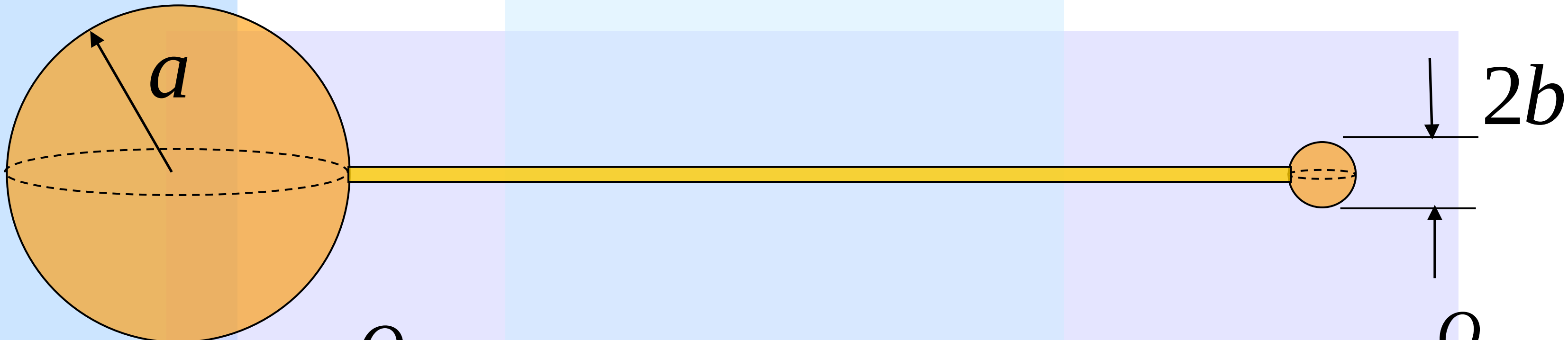
Ejemplos

Para la otra esfera el cálculo es similar

$$ref = \infty \Rightarrow V_{ref} = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad V(\vec{r} = b) = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

Ejemplos

Luego



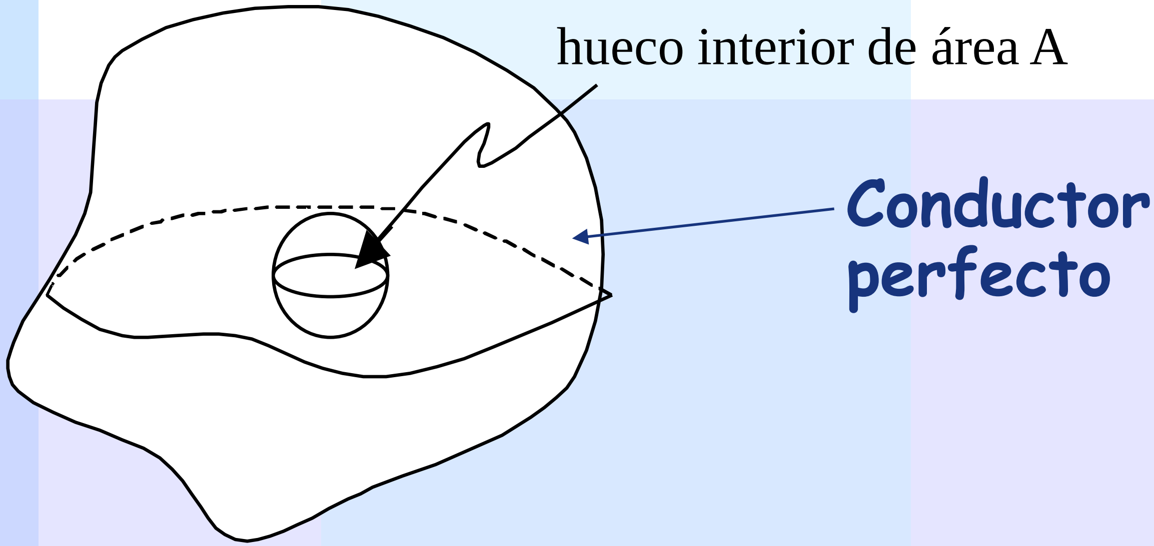
$$V(\vec{r}=a)=\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad V(\vec{r}=b)=\frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\vec{E}_a=\frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}=\frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{n} \qquad \vec{E}_b=\frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}=\frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{n}$$

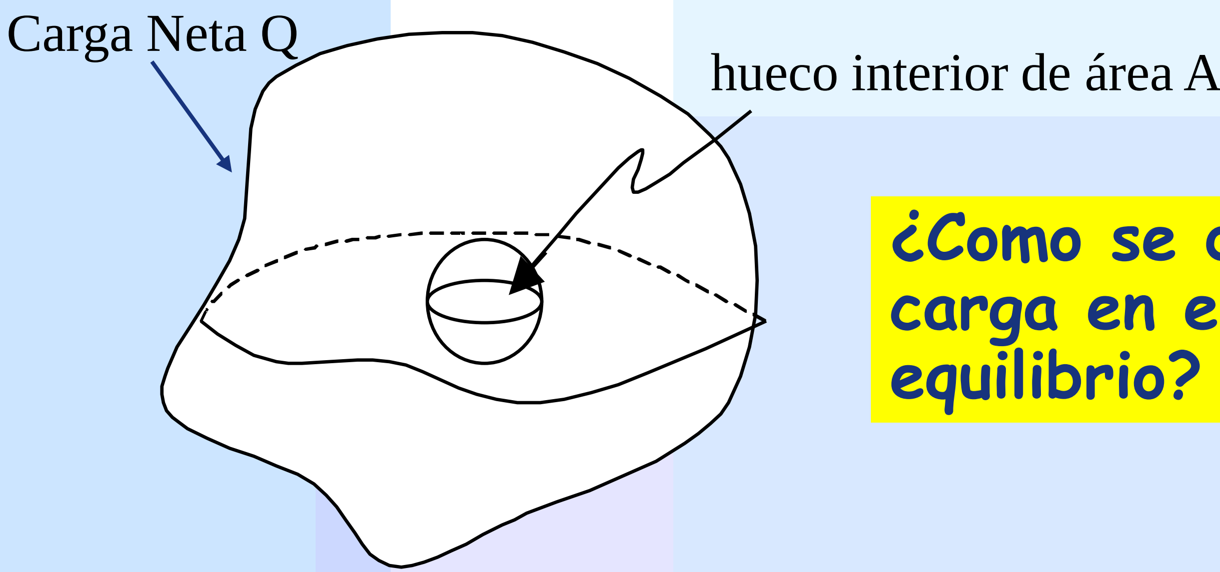
$$V(r=a)=V(r=b) \quad \Rightarrow \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\boxed{\therefore \frac{Q_a}{Q_b}=\frac{a}{b}}$$

Caso Conductor con Oquedad

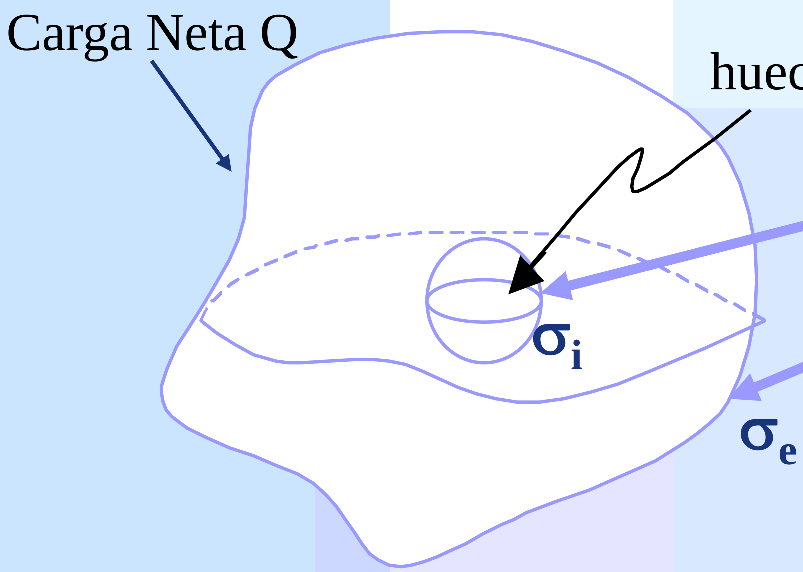


Caso Conductor con Oquedad



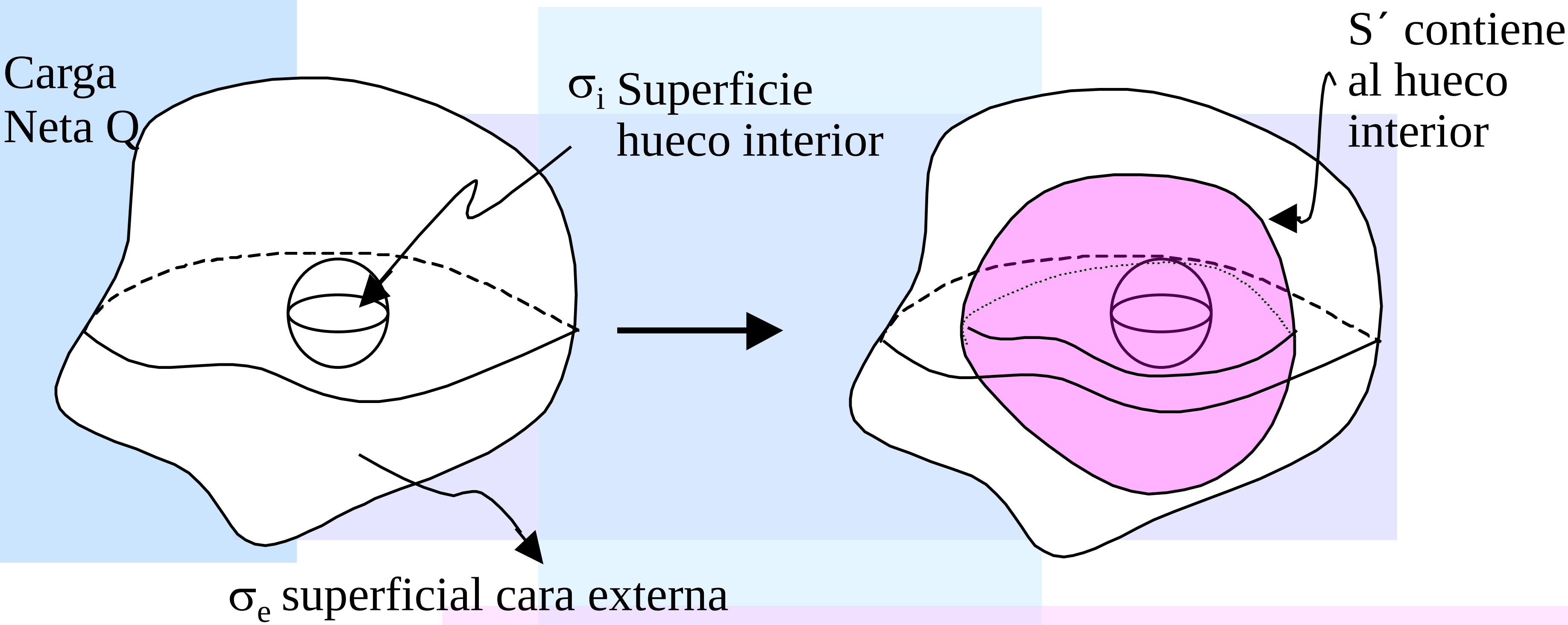
¿Como se distribuye la carga en el estado de equilibrio?

Caso Conductor con Oquedad

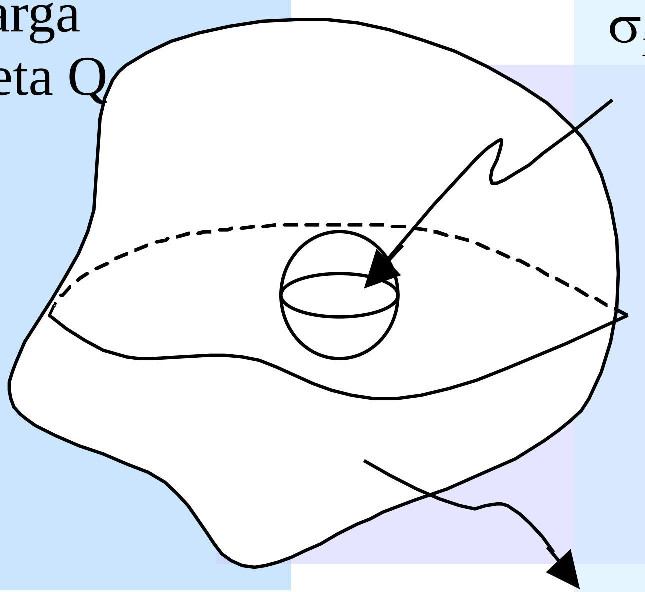


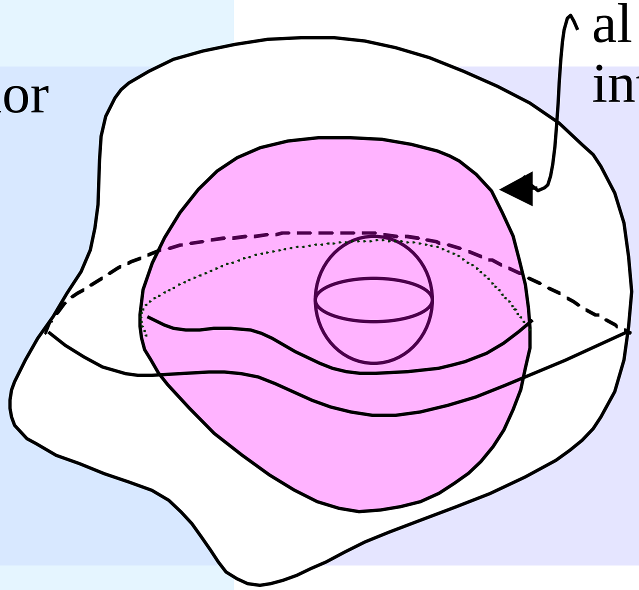
SOLO PUEDE HABER CARGA SUPERFICIAL

Caso Conductor con Oquedad



Caso Conductor con Oquedad



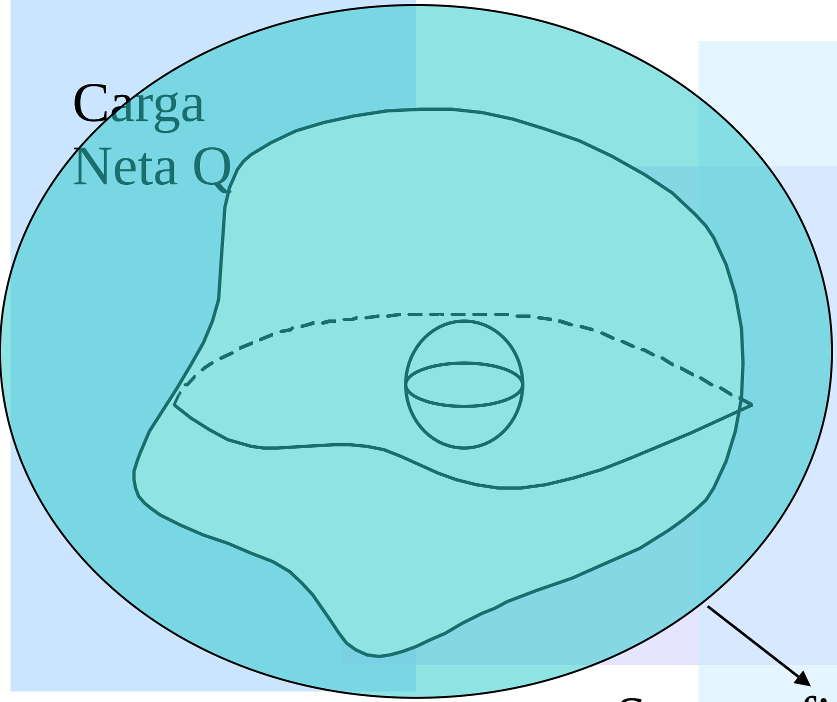


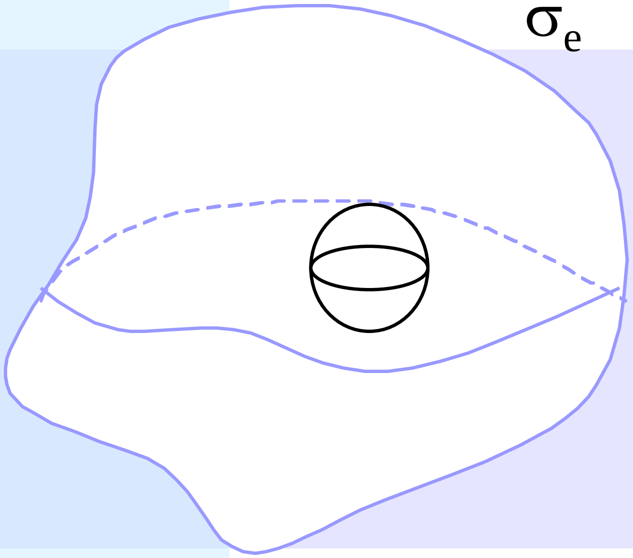
$$\oiint_{S'} \vec{D}_{\text{int.}} \cdot dS = Q_{total}$$

$$Q_{total} = \sigma_i A \quad \text{y} \quad \vec{D}_{\text{int.}} = 0 \Rightarrow Q_{total} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = 0$$

Caso Conductor con Oquedad





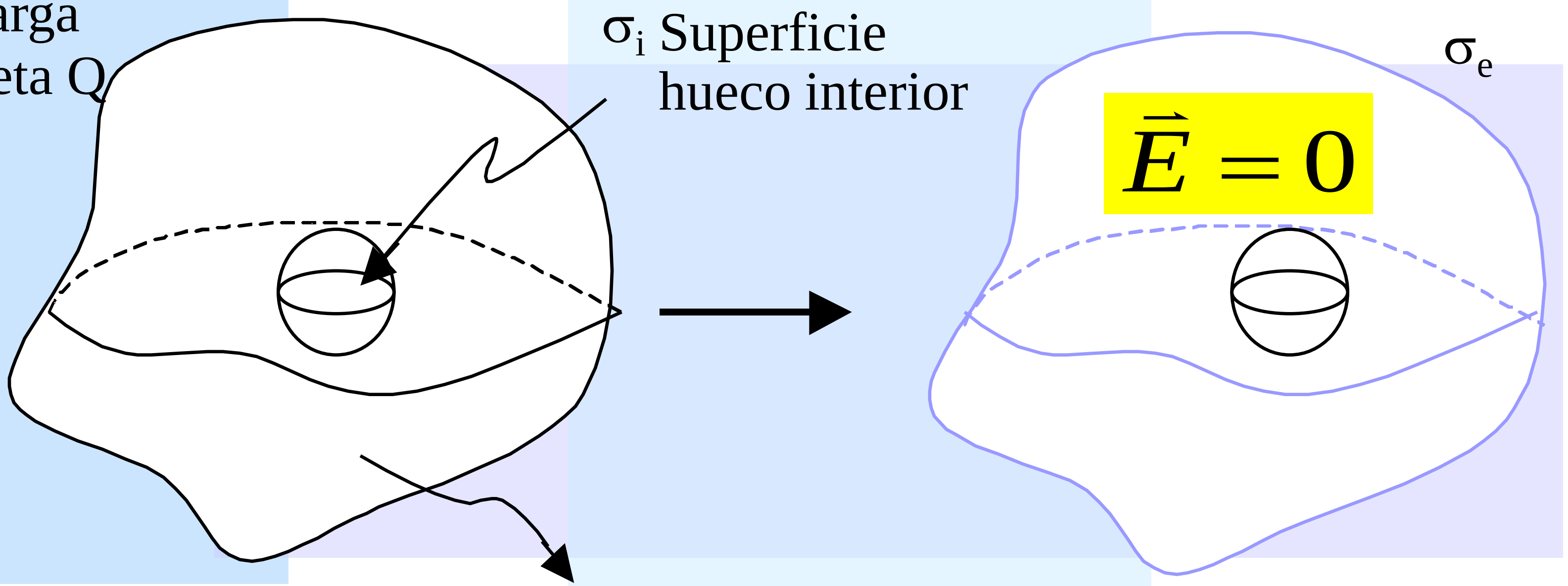
S: superficie cara externa

$$\sigma_i = 0$$

$$\Rightarrow Q = \oiint_S \sigma_e ds$$

La carga Q se distribuye en la superficie exterior solamente

Caso Conductor con Oquedad

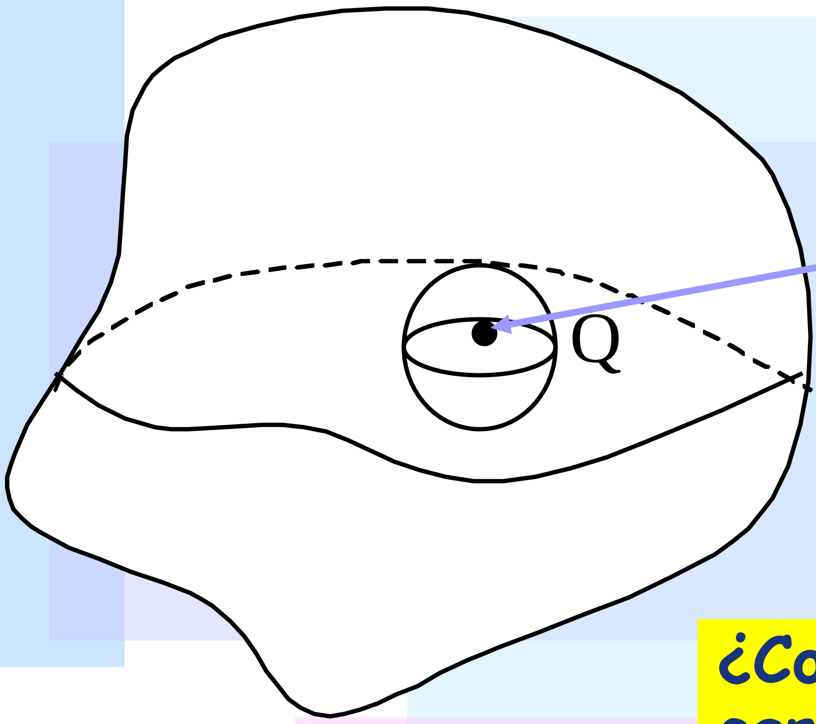


$$\sigma_i = 0$$

$$\Rightarrow Q = \oiint_S \sigma_e \, ds$$

La carga Q se distribuye en la superficie exterior solamente

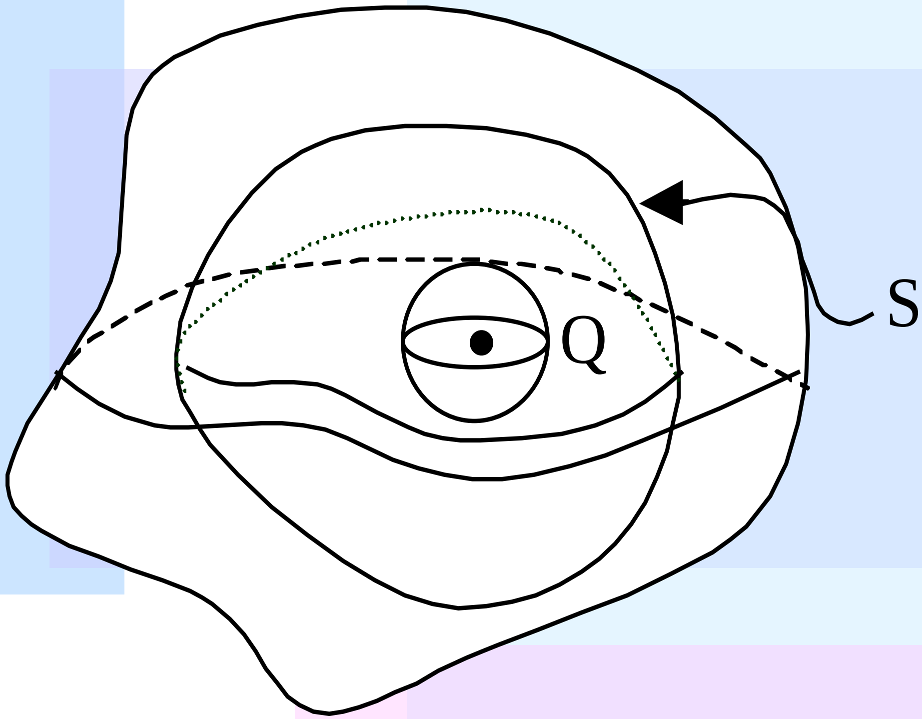
Conductor con oquedad y carga en su interior



Carga Q puesta a propósito en el interior (en la oquedad)

¿Como se distribuye la carga en el estado de equilibrio?

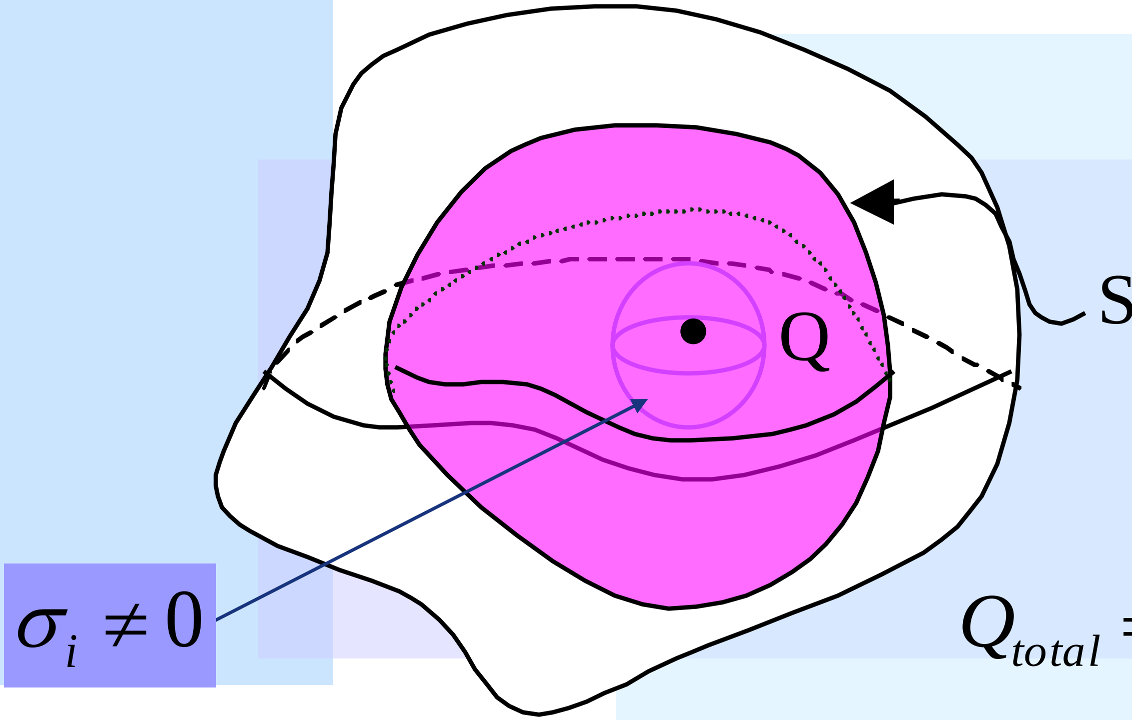
Conductor con oquedad y carga en su interior



$$\oiint_{S'} \vec{D}_{\text{int.}} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\vec{D}_{\text{int.}} = 0 \Rightarrow \quad Q_{total} = 0$$

Conductor con oquedad y carga en su interior



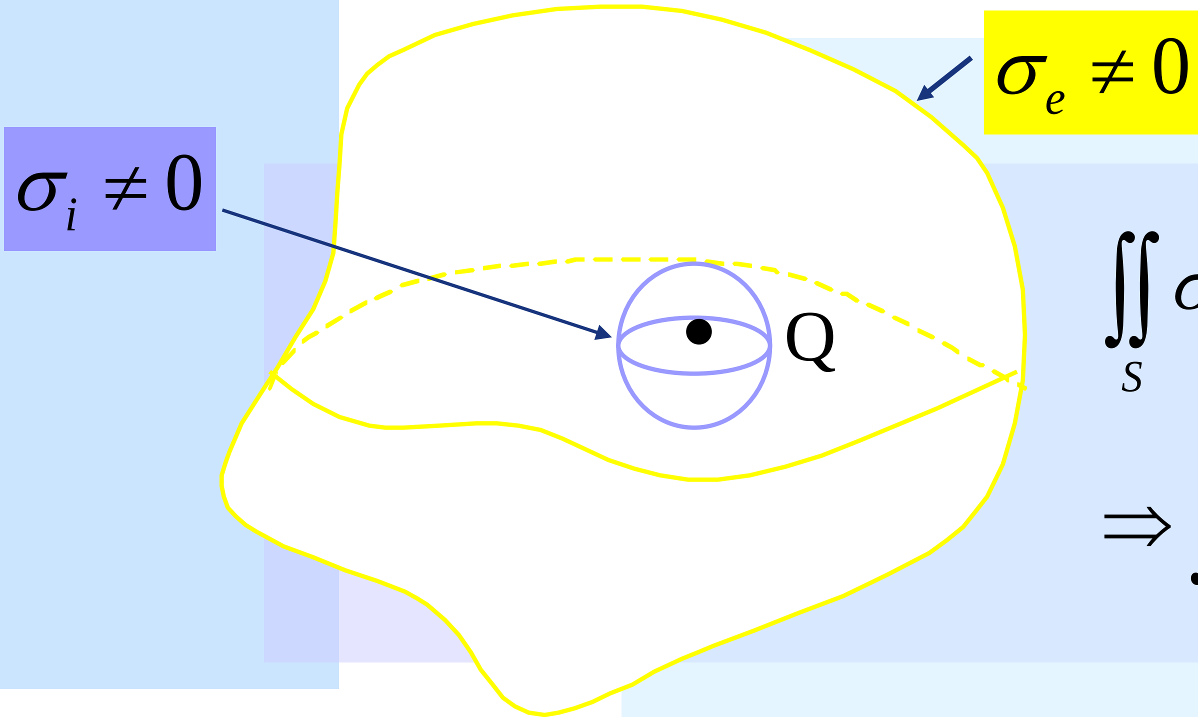
$$\oiint_{S'} \vec{D}_{\text{int.}} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\vec{D}_{\text{int.}} = 0 \Rightarrow Q_{total} = 0$$

$$Q_{total} = 0 \Rightarrow \iint_A \sigma_i dS + Q = 0$$

Dado que la superficie S encierra a Q, la única manera que se puede satisfacer la condición $Q_{total}=0$ es con una densidad de carga superficial en la oquedad!

Conductor con oquedad y carga en su interior

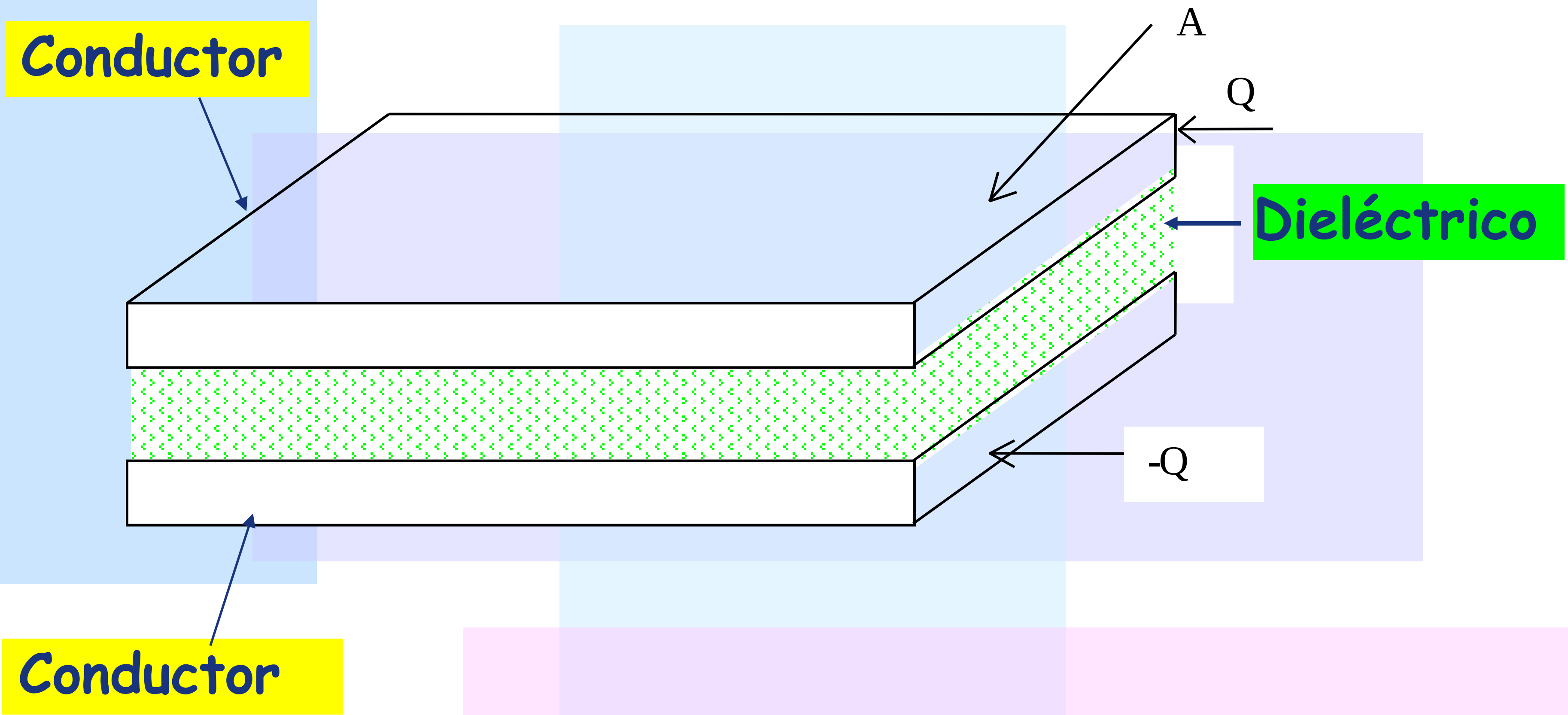


$$\iint_S \sigma_e \, dS + \iint_A \sigma_i \, dS = 0$$

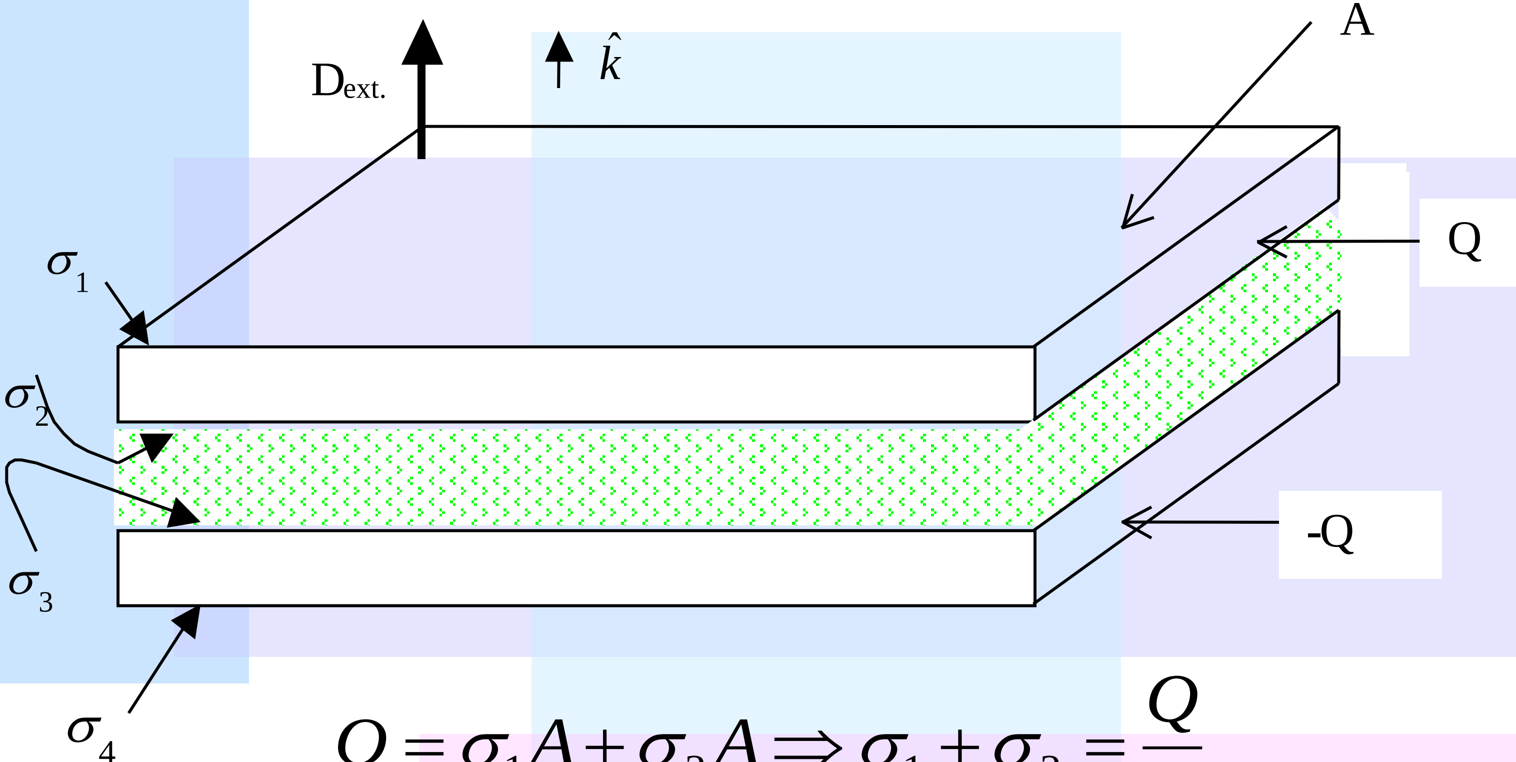
$$\Rightarrow \iint_S \sigma_e \, dS = Q$$

Para cumplir la condición de carga neta nula en el conductor aparece una densidad de carga en la superficie exterior σ_e

EJEMPLO



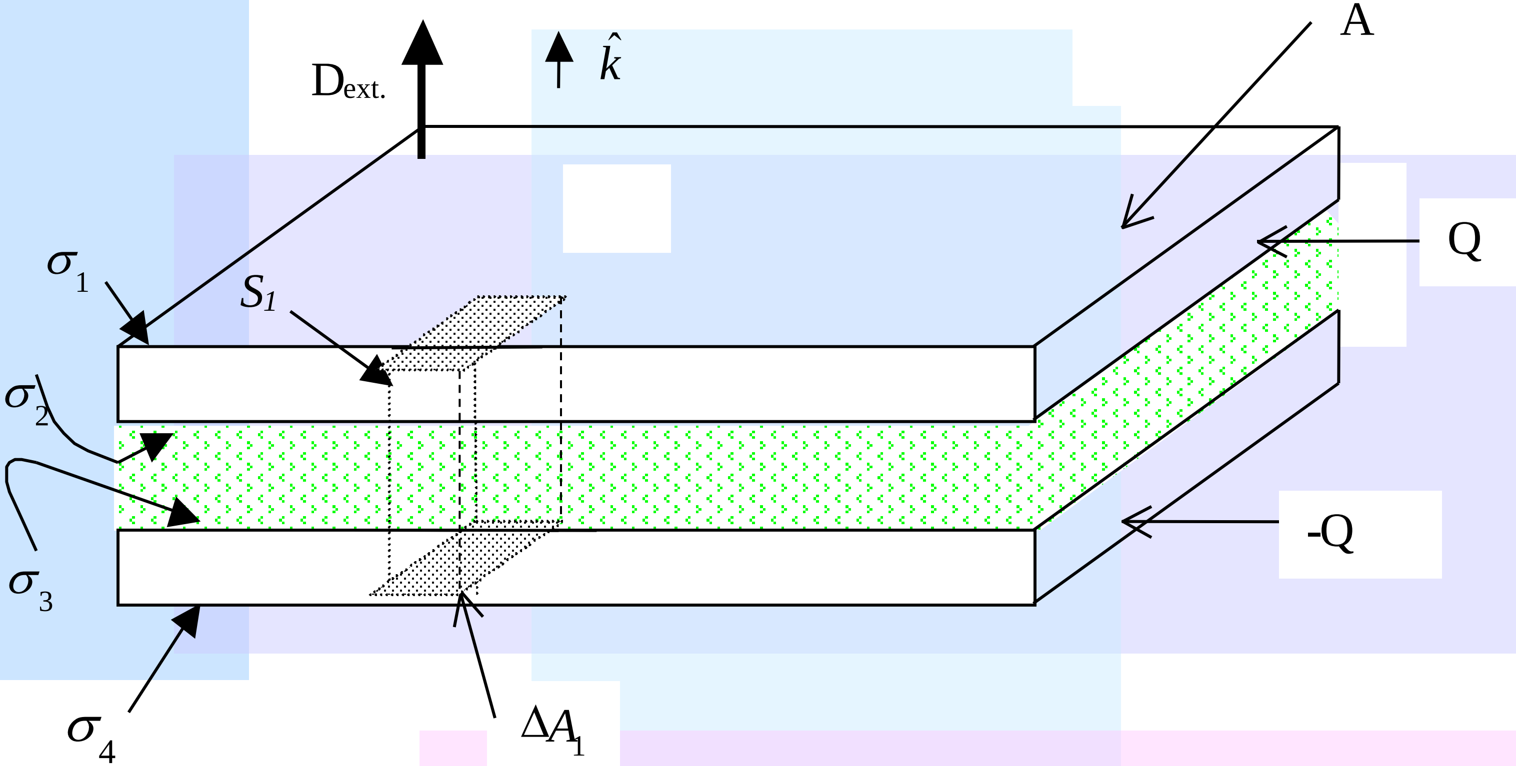
EJEMPLO



$$Q = \sigma_1 A + \sigma_2 A \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{A}$$

$$-Q = \sigma_3 A + \sigma_4 A \Rightarrow \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{Q}{A}$$

EJEMPLO



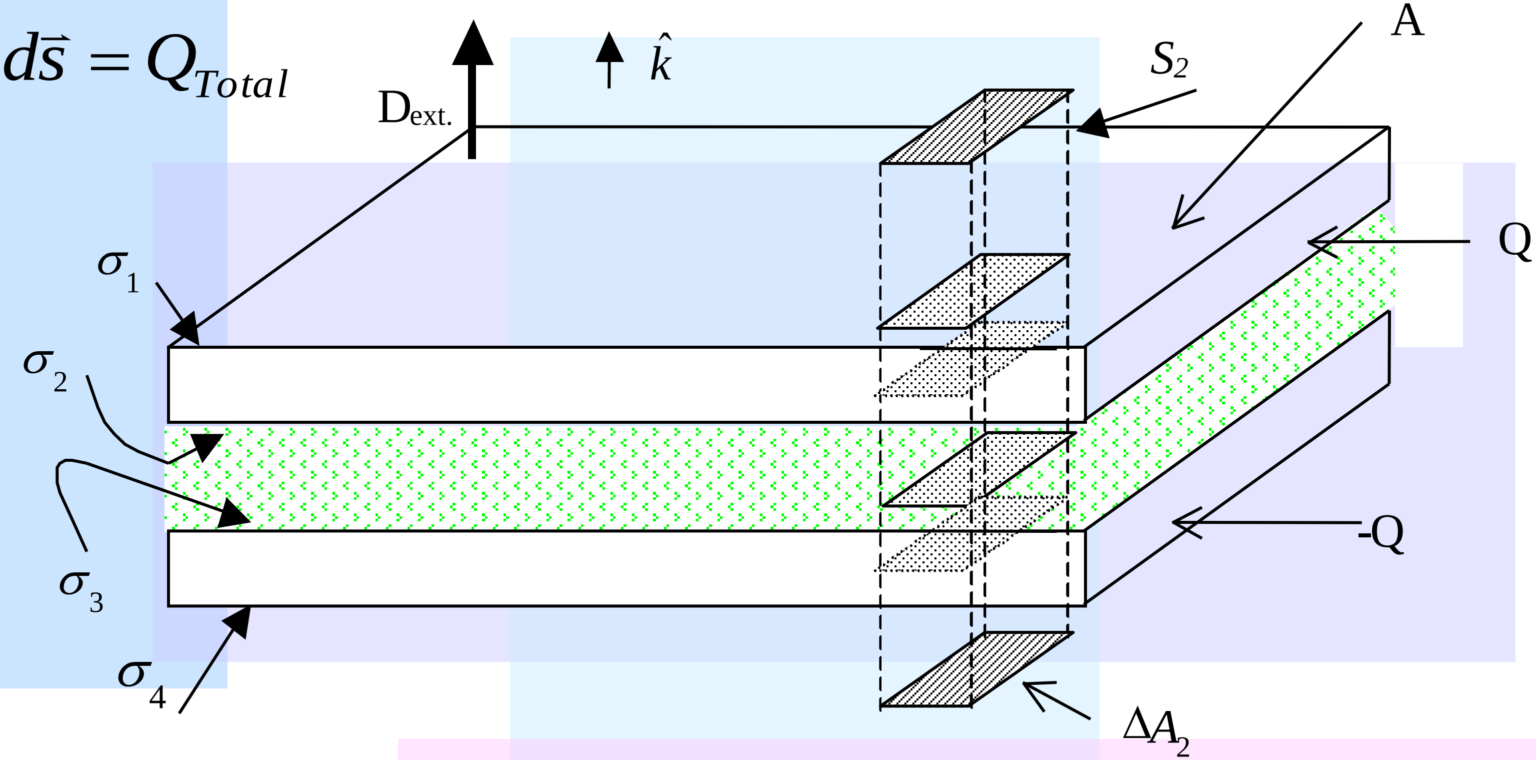
$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{carasmanto} D\cdot dS + \iint_{tapas} \vec{D}\cdot dS = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$Q_{Total} = \iint_{\Delta A_1} \sigma_2 \, dS + \iint_{\Delta A_1} \sigma_3 \, dS$$

EJEMPLO

$$\oiint_{S_2} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{Total}$$

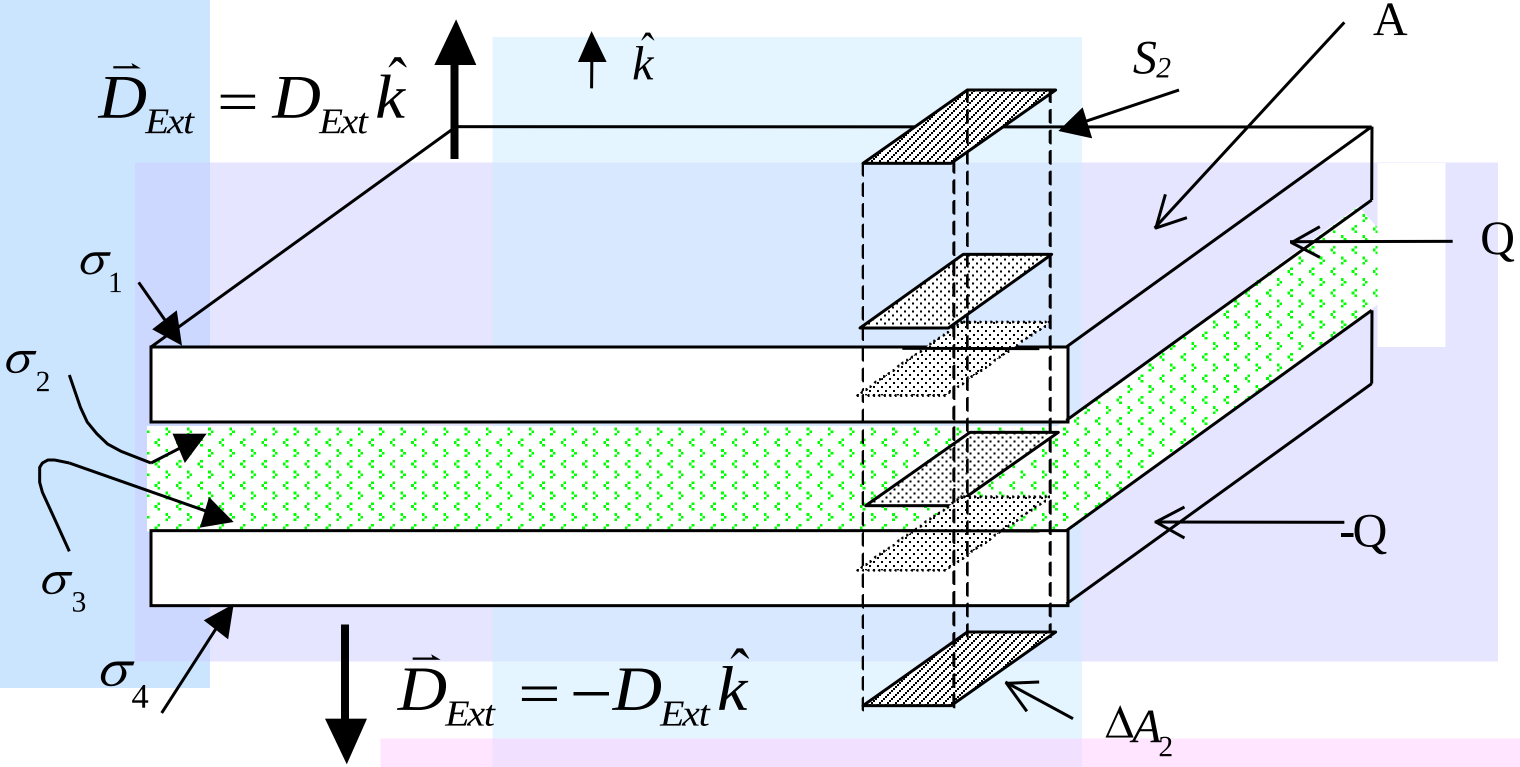


$$Q_{Total} = \sigma_1 \Delta A_2 + \sigma_2 \Delta A_2 + \sigma_3 \Delta A_2 + \sigma_4 \Delta A_2$$

$$Q_{Total} = (\underbrace{\sigma_1 + \sigma_2}_{Q/A} + \underbrace{\sigma_3 + \sigma_4}_{-Q/A}) \Delta A_2$$

$$\Rightarrow Q_{Total} = 0$$

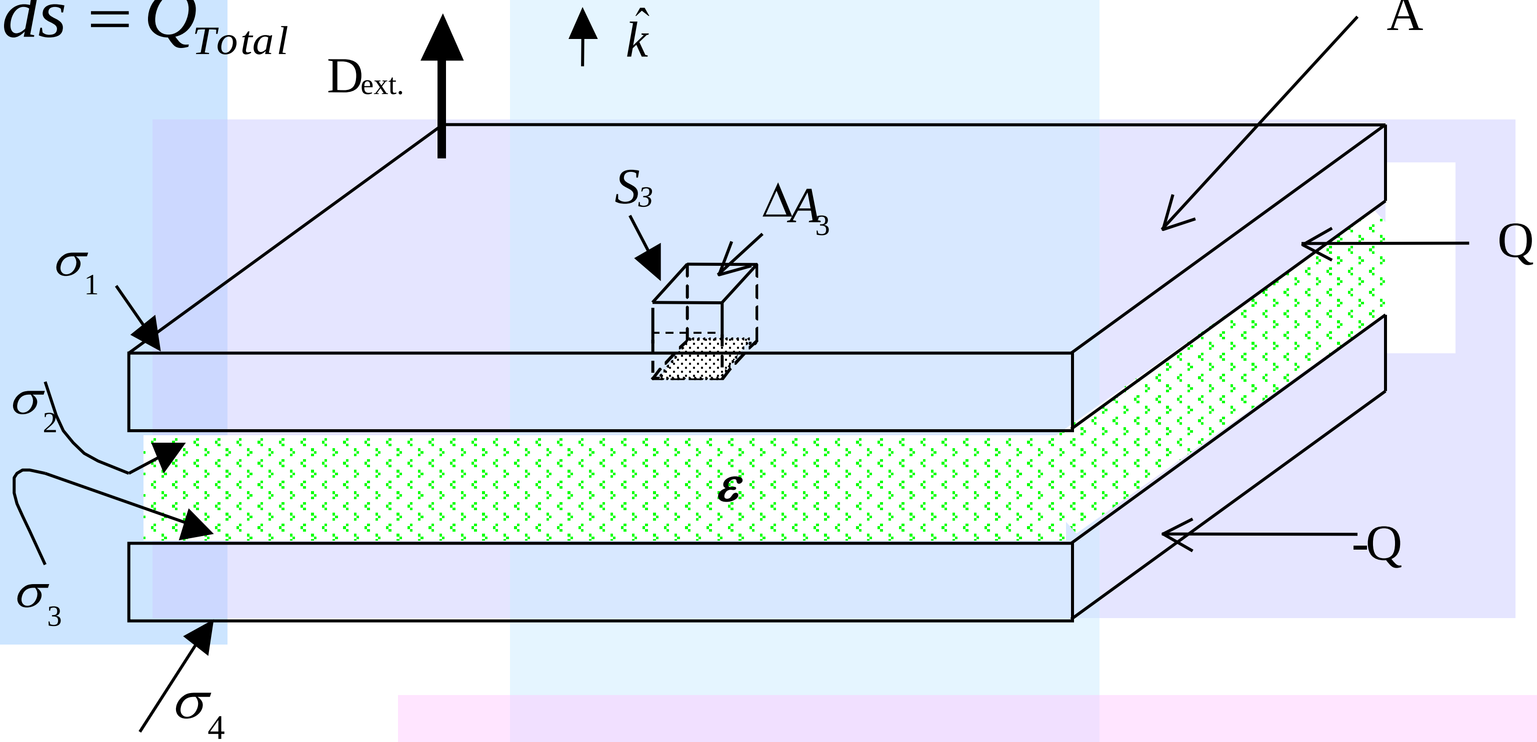
EJEMPLO



$$\oiint_{S_2} \vec{D} \bullet d\vec{s} = 2D_{Ext}\Delta A_2 \qquad \therefore \oiint_{S_2} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{Total} \Rightarrow D_{Ext} = 0$$

EJEMPLO

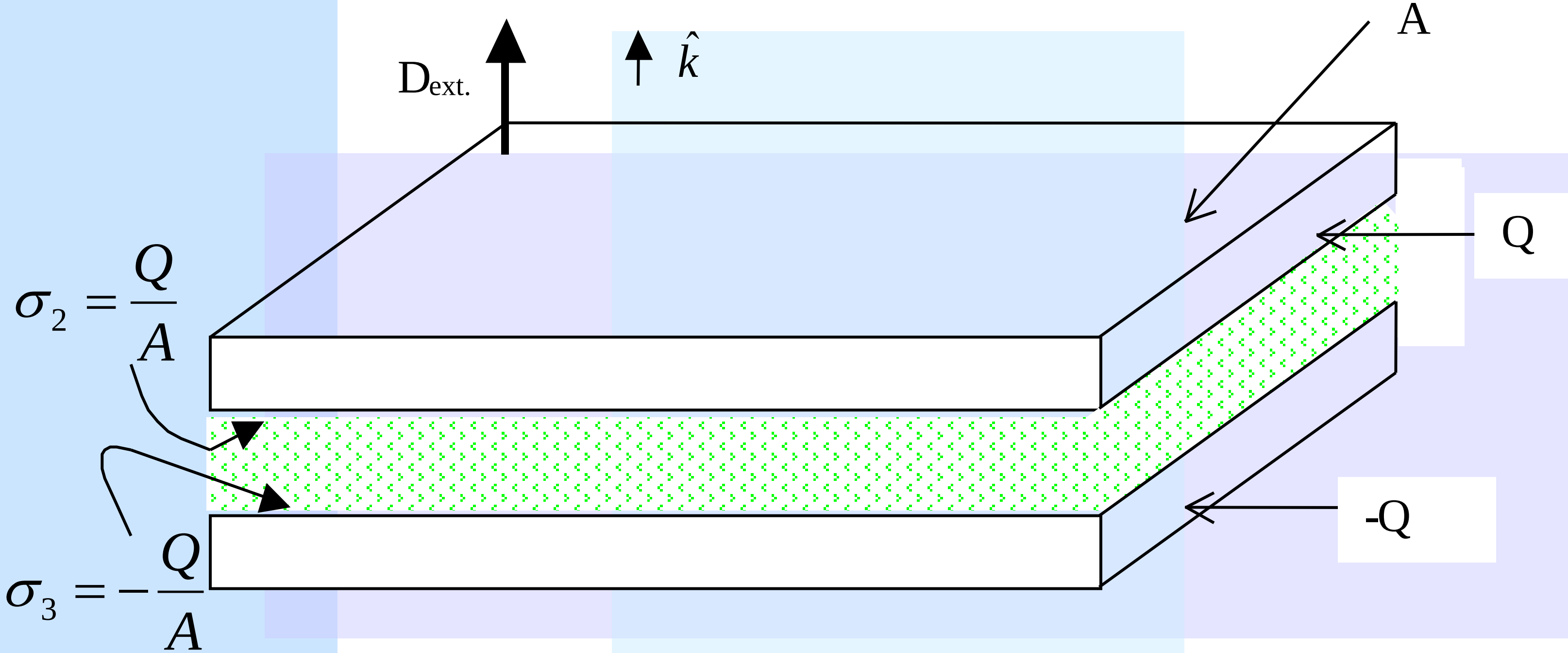
$$\oint\!\!\oint_{S_3} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{Total}$$



$$\oint\!\!\oint_{S_3} \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \qquad Q_{Total} = \sigma_1 \Delta A_3 \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

Similarmente $\sigma_4 = 0$

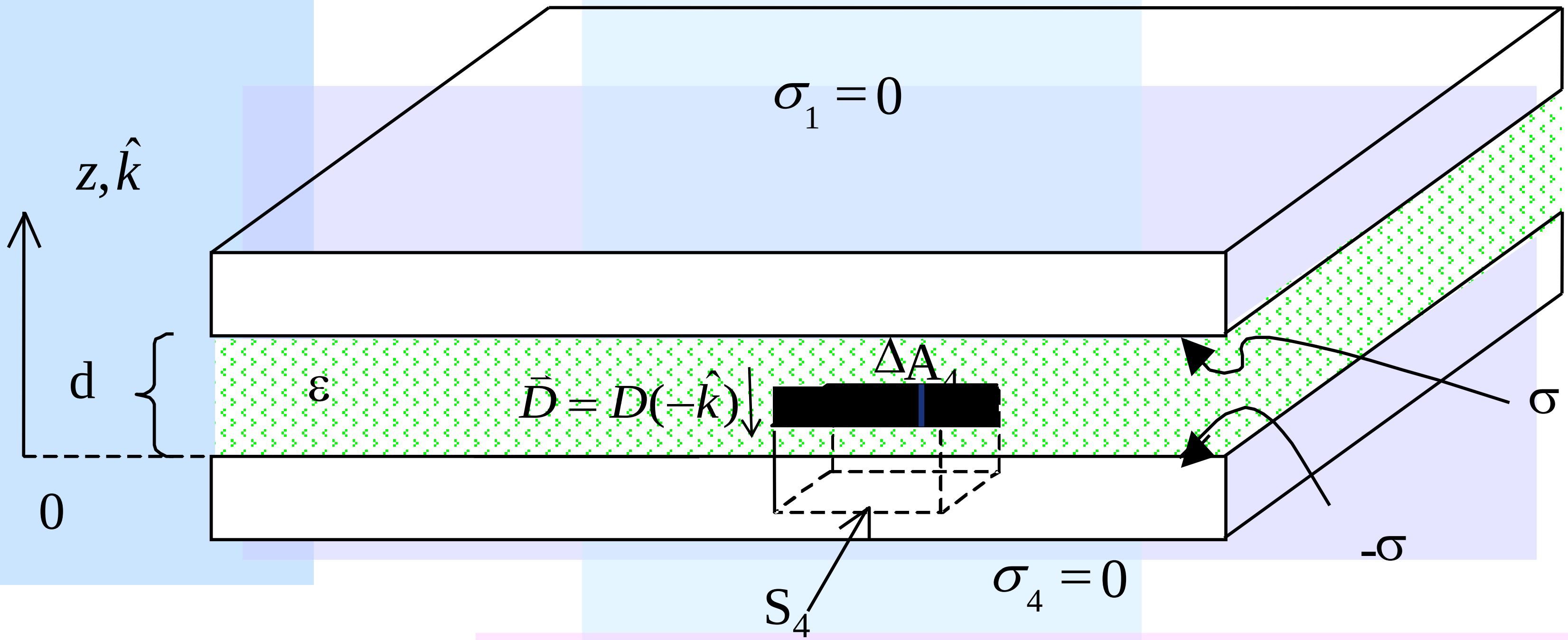
EJEMPLO



$$\sigma_2 = \frac{Q}{A} \equiv \sigma$$

$$\sigma_3 = -\frac{Q}{A} \equiv -\sigma$$

EJEMPLO



$$\therefore \oiint_{S_4} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{Total} \Rightarrow D(-\hat{k}) \bullet \Delta A_4 (\hat{k}) = -\sigma \Delta A_4 \Rightarrow D = \sigma$$

$$\therefore \vec{D} = \sigma(-\hat{k}), \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}(-\hat{k})$$

Propuesto: Calcular diferencia de potencial entre placas