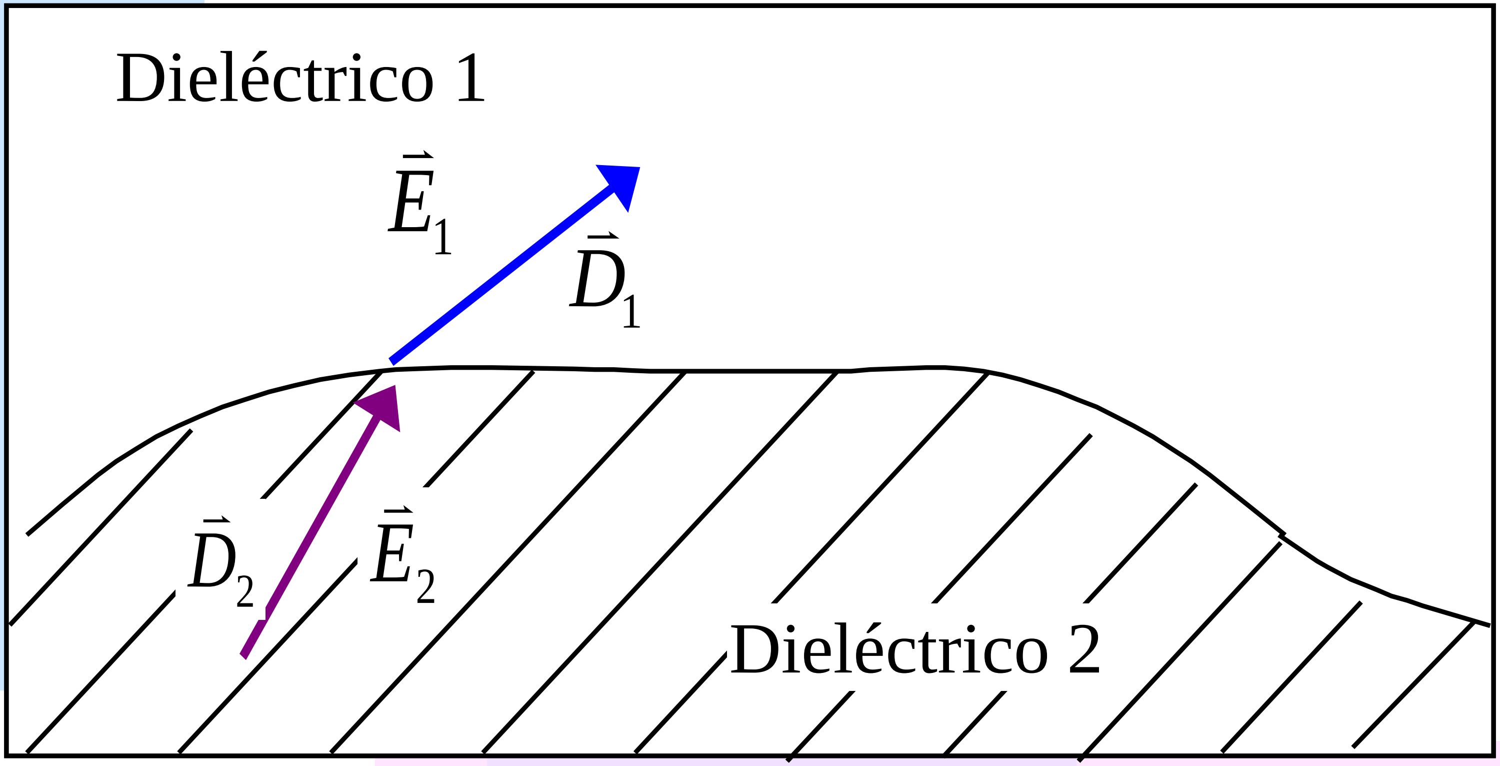
FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 8
Medios Materiales III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

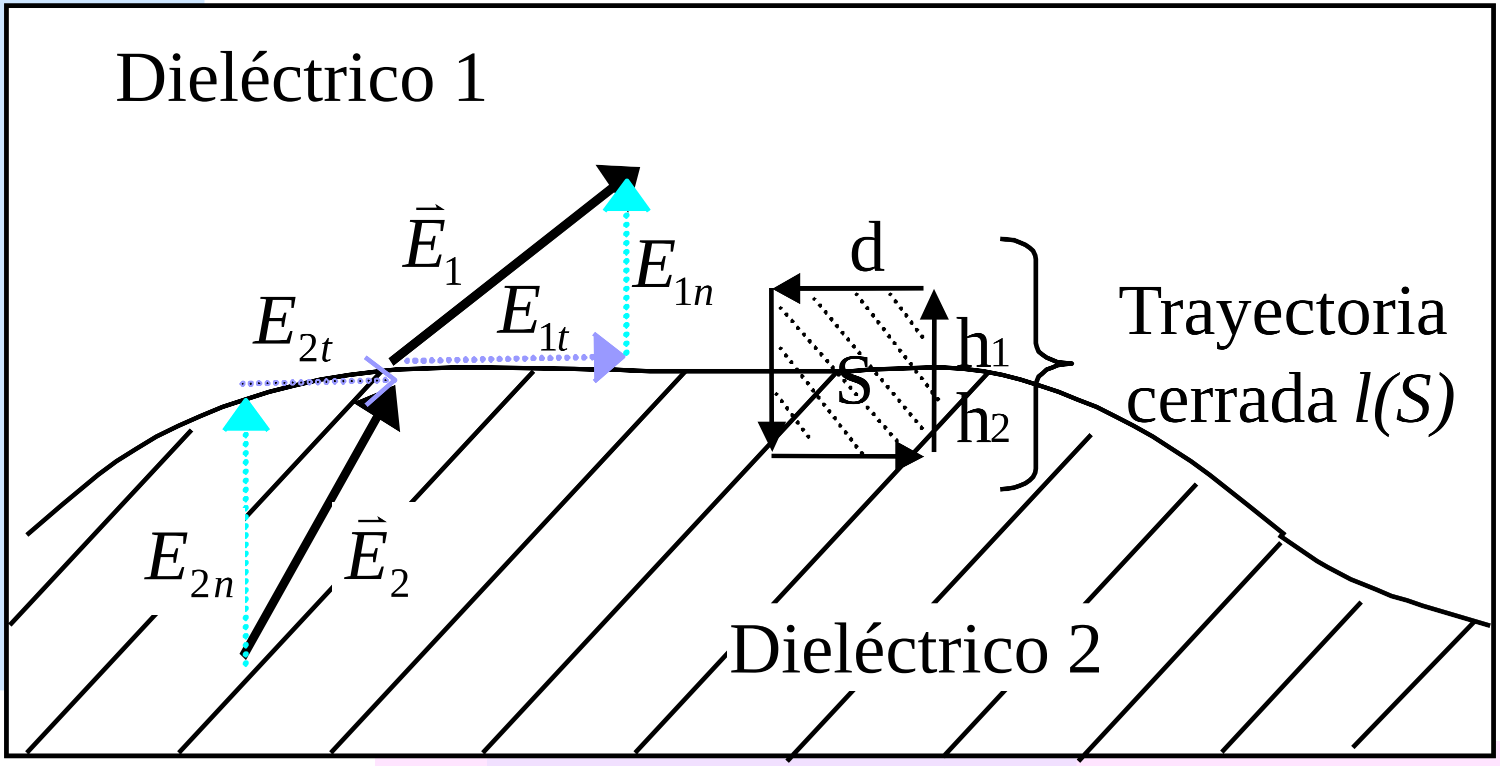
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Ejemplos
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

Condiciones de borde


Dieléctrico 1
$\vec{E}_1$
$\vec{D}_1$
$\vec{D}_2$
$\vec{E}_2$
Dieléctrico 2

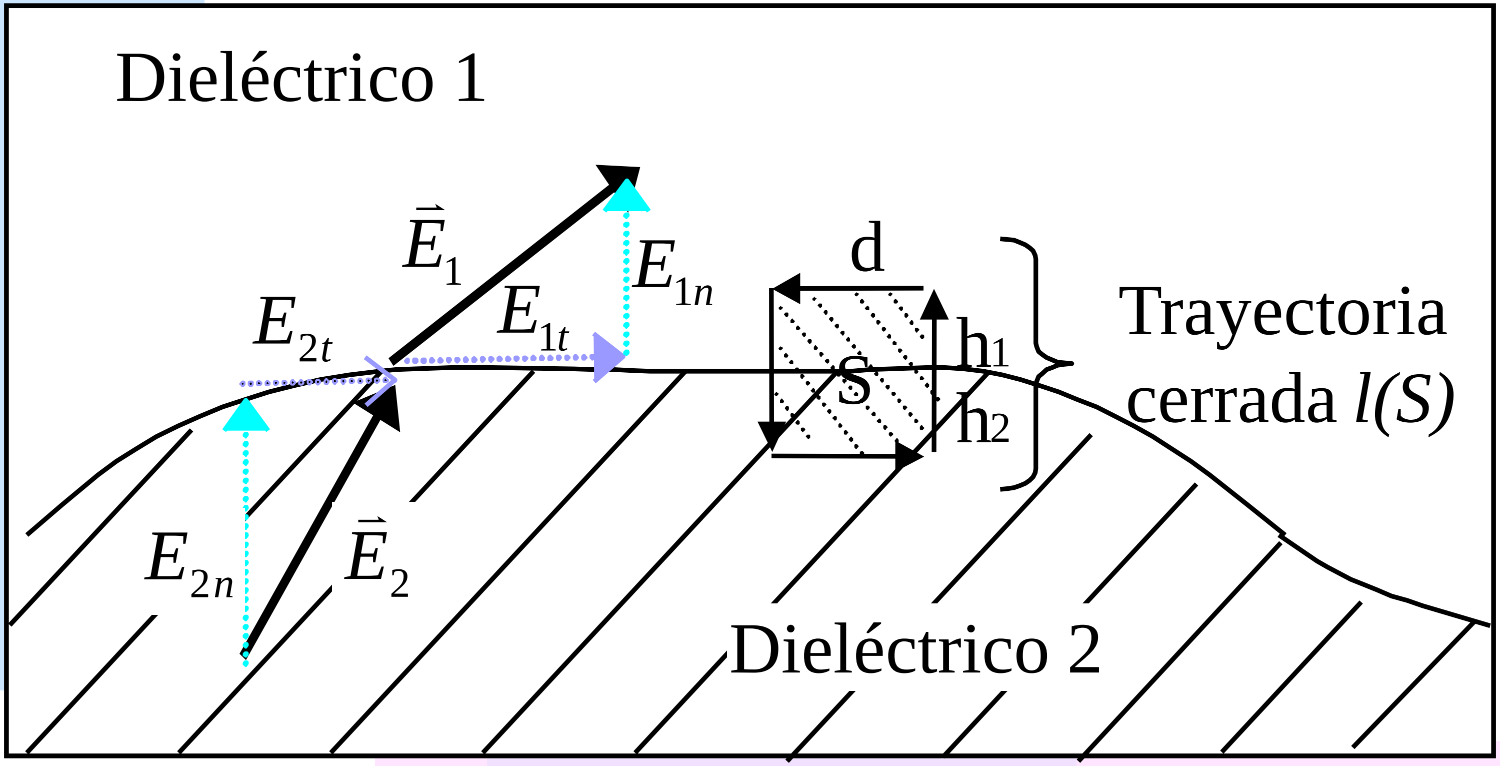
Usaremos dos ecuaciones $\nabla \times \vec{E} = 0$ **y** $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

Condiciones de borde para el campo eléctrico


Dieléctrico 1
$\vec{E}_1$
E_{1n}
E_{1t}
E_{2t}
d
h1
S
h2
Trayectoria cerrada *l(S)*
E_{2n}
$\vec{E}_2$
Dieléctrico 2

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

• Condiciones de borde para el campo eléctrico


Dieléctrico 1
$\vec{E}_1$
E_{1n}
E_{2t}
E_{1t}
d
h1
S
h2
Trayectoria cerrada *l(S)*
E_{2n}
$\vec{E}_2$
Dieléctrico 2

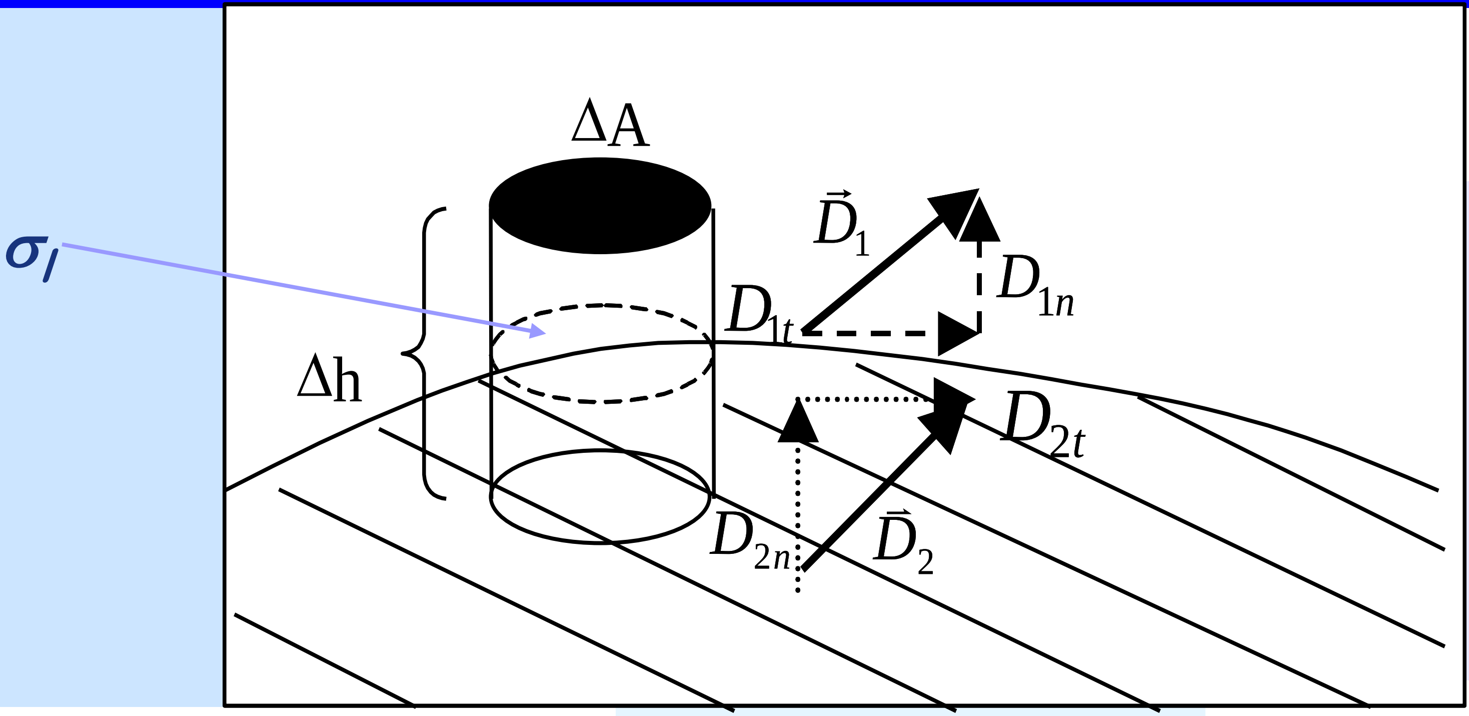
$$\oint_{l(S)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow -E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$h_1 \to 0,\quad h_2 \to 0 \Rightarrow -E_{1t}d + E_{2t}d = 0$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t}$$

$$\therefore \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

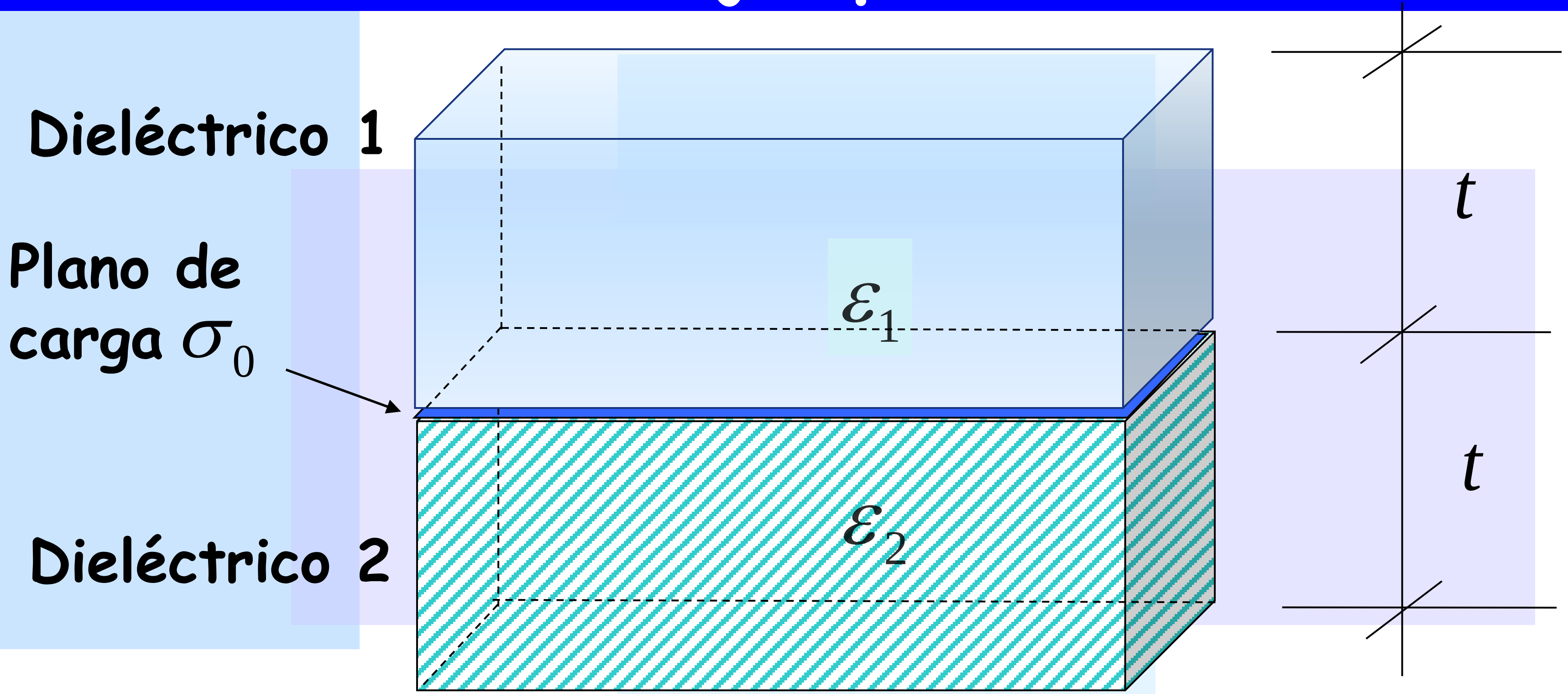
Condiciones de borde para el campo eléctrico



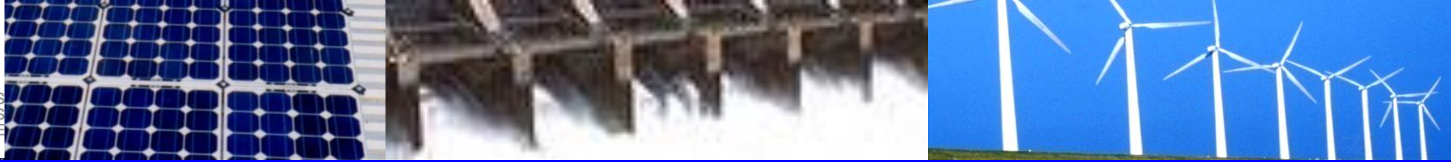
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}\text{, y } Q_{libre} = \sigma_l \Delta A \Rightarrow D_{1n}\Delta A - D_{2n}\Delta A + \iint_{manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sigma_l \Delta A$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta h \to 0 \Rightarrow \iint_{manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l \\ &\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l \end{aligned}\right\} \text{si } \sigma_l = 0 \Rightarrow \begin{aligned} &D_{1n} = D_{2n} \\ &\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{aligned}$$

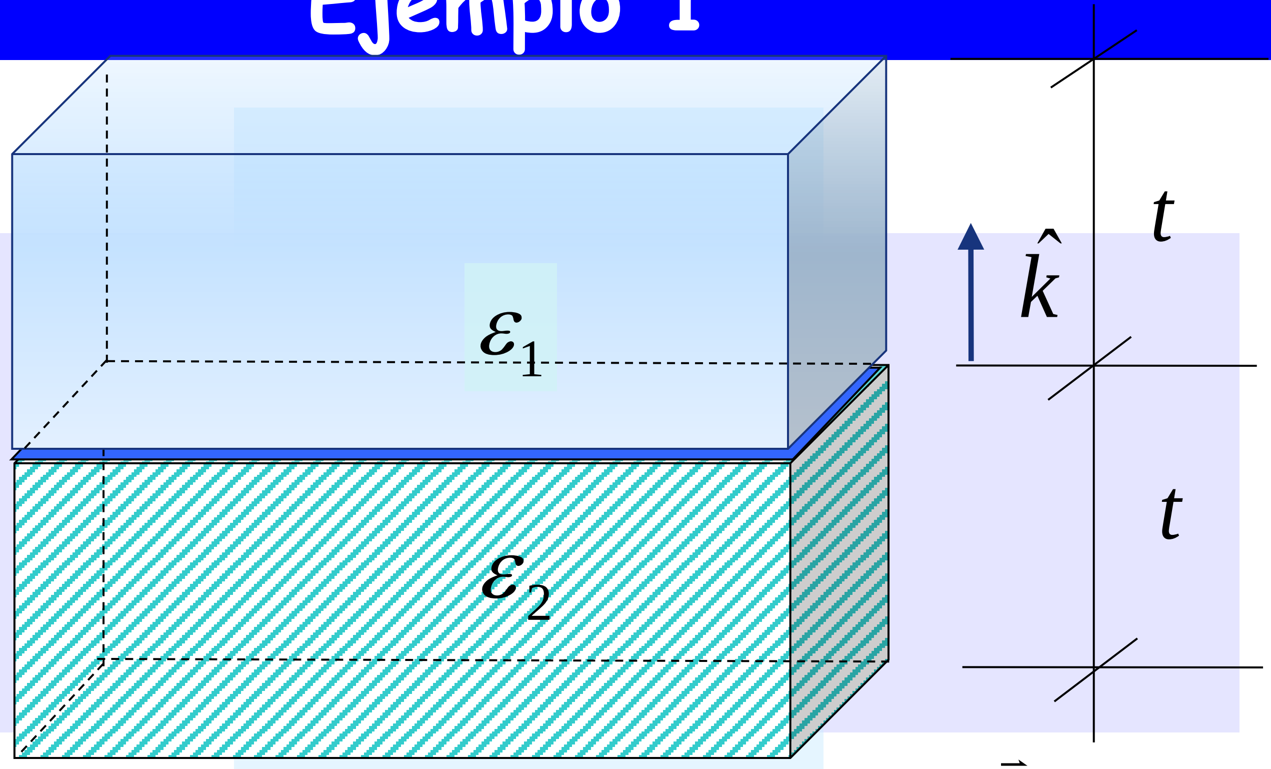
Ejemplo 1


Dieléctrico 1
Plano de carga σ_0
Dieléctrico 2
ε_1
ε_2
t
t

ε_1, ε_2 **Constantes. Se pide** $\vec{E}$, $\vec{D}$ **en todo el espacio.**



Ejemplo 1



Dieléctrico 1

Plano de carga σ_0

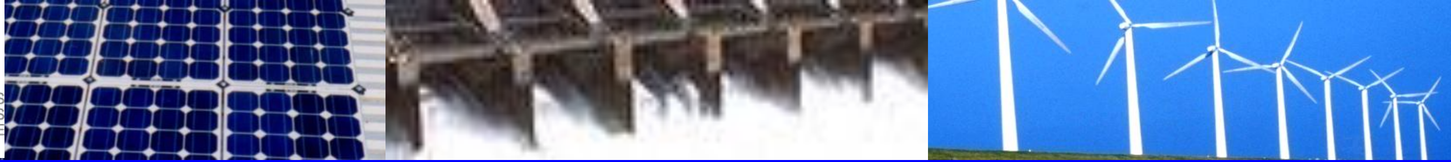
Dieléctrico 2

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{y} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\vec{D}$$

Fuentes de $\vec{D}$ son sólo cargas libres σ, luego $\vec{D} = D\hat{k}$ constante

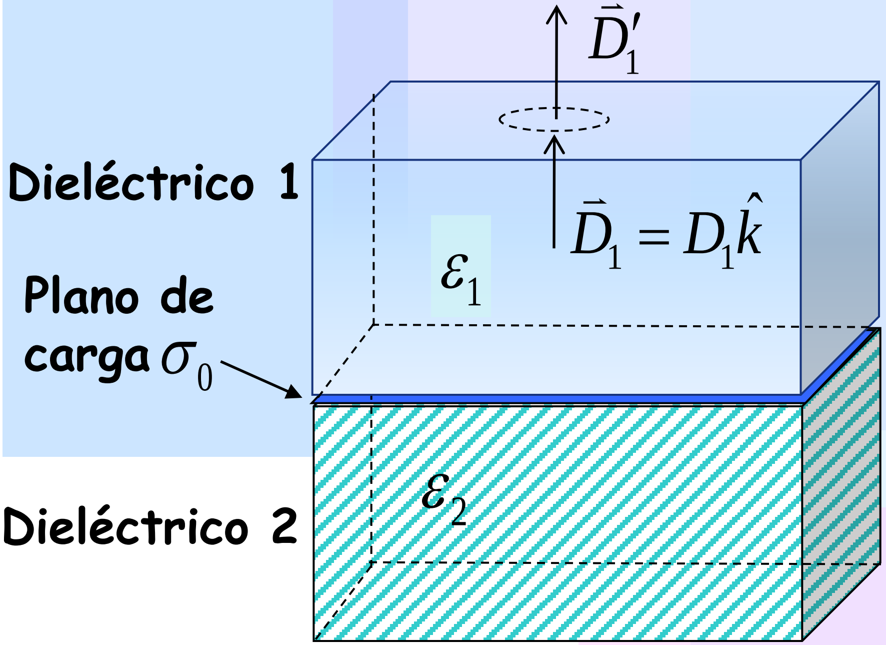
$$\Rightarrow \vec{D} = D\,\hat{k},\ \vec{E} = E\,\hat{k}\ \ y$$

$$\vec{P} = P\,\hat{k}$$



Ejemplo 1

Aplicando condiciones de borde $\vec{D}_1' = \vec{D}_1$

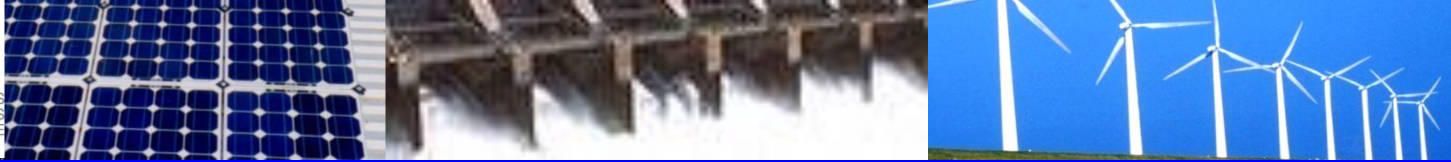

$\vec{D}_1'$
Dieléctrico 1
ε_1
$\vec{D}_1 = D_1\hat{k}$
Plano de carga σ_0
ε_2
Dieléctrico 2

$$\vec{D}_1' = D_1'\hat{k},\ \vec{E}_1' = E_1'\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1' = 0$$

$$\vec{D}_1 = D_1\hat{k},\ \vec{E}_1 = E_1\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1 = P_1\hat{k}$$

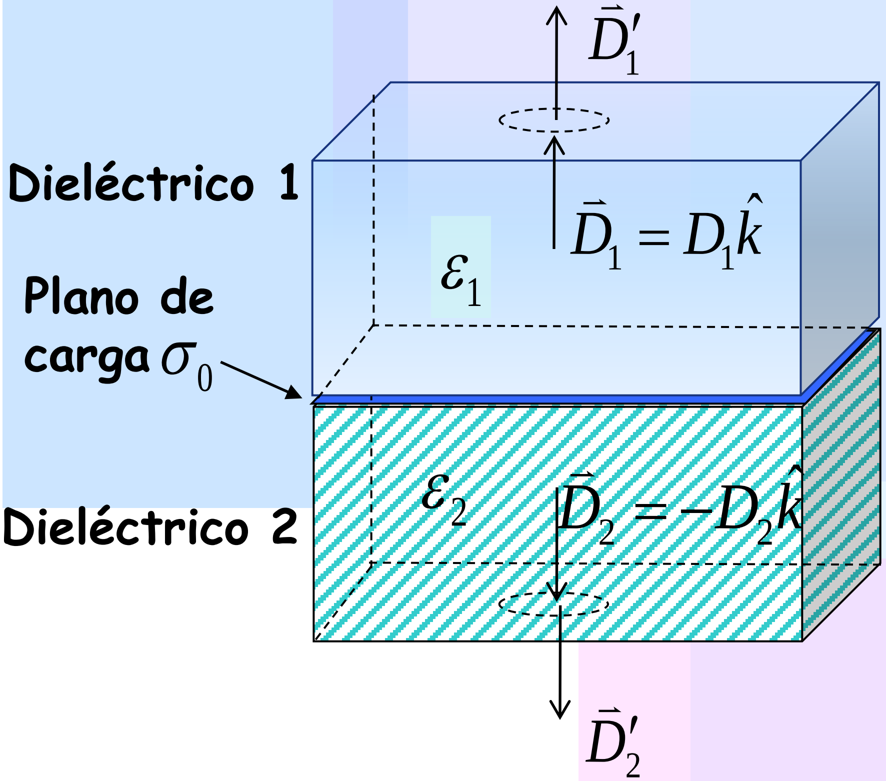
$$\uparrow \hat{k}$$

$$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k},\ \vec{E}_2 = -E_2\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2 = -P_2\hat{k}$$



Ejemplo 1

Aplicando condiciones de borde $\vec{D}_1' = \vec{D}_1$


$\vec{D}_1'$
Dieléctrico 1
$\vec{D}_1 = D_1\hat{k}$
ε_1
Plano de carga σ_0
ε_2
$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k}$
Dieléctrico 2
$\vec{D}_2'$

$\vec{D}_1' = D_1'\hat{k},\ \vec{E}_1' = E_1'\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1' = 0$

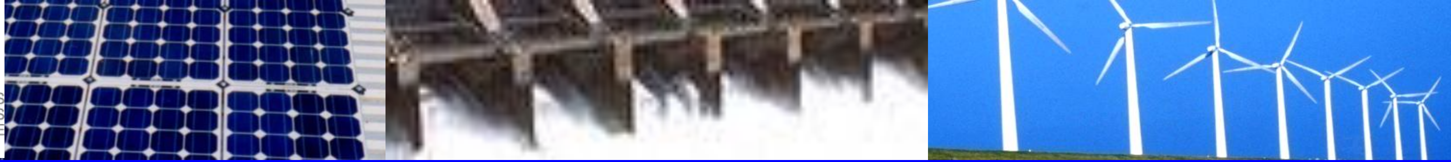
$\vec{D}_1 = D_1\hat{k},\ \vec{E}_1 = E_1\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1 = P_1\hat{k}$

$\hat{k}$

$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2 = -P_2\hat{k}$

$\vec{D}_2' = -D_2'\hat{k}, \vec{E}_2' = -E_2'\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2' = 0$

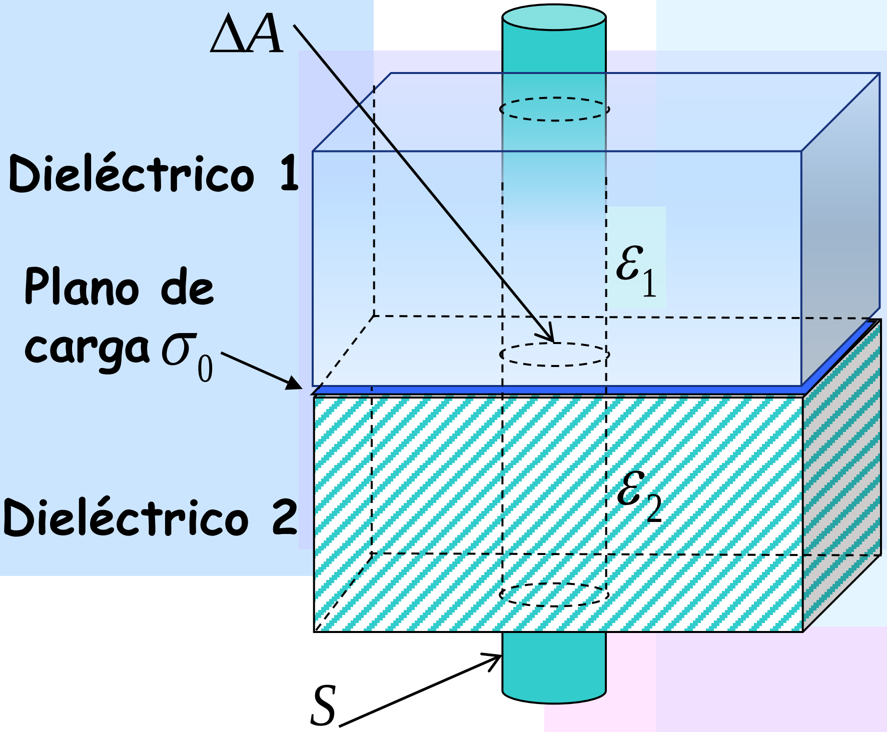
Aplicando condiciones de borde $\vec{D}_2' = \vec{D}_2$



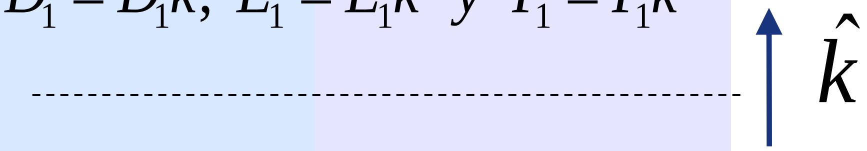
Ejemplo 1

Ley de Gauss en la materia

$$Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}$$


ΔA
Dieléctrico 1
ε_1
Plano de carga σ_0
ε_2
Dieléctrico 2
S

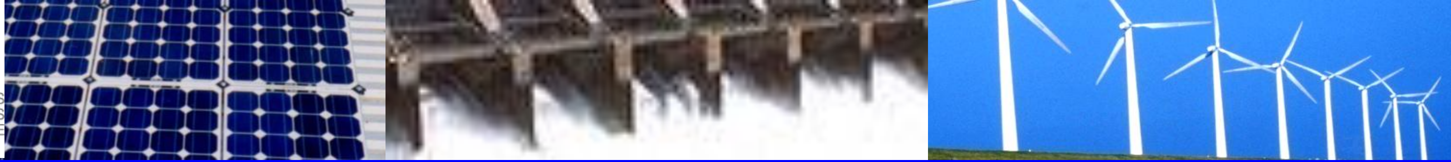
$$\vec{D}_1 = D_1\hat{k},\ \vec{E}_1 = E_1\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1 = P_1\hat{k}$$



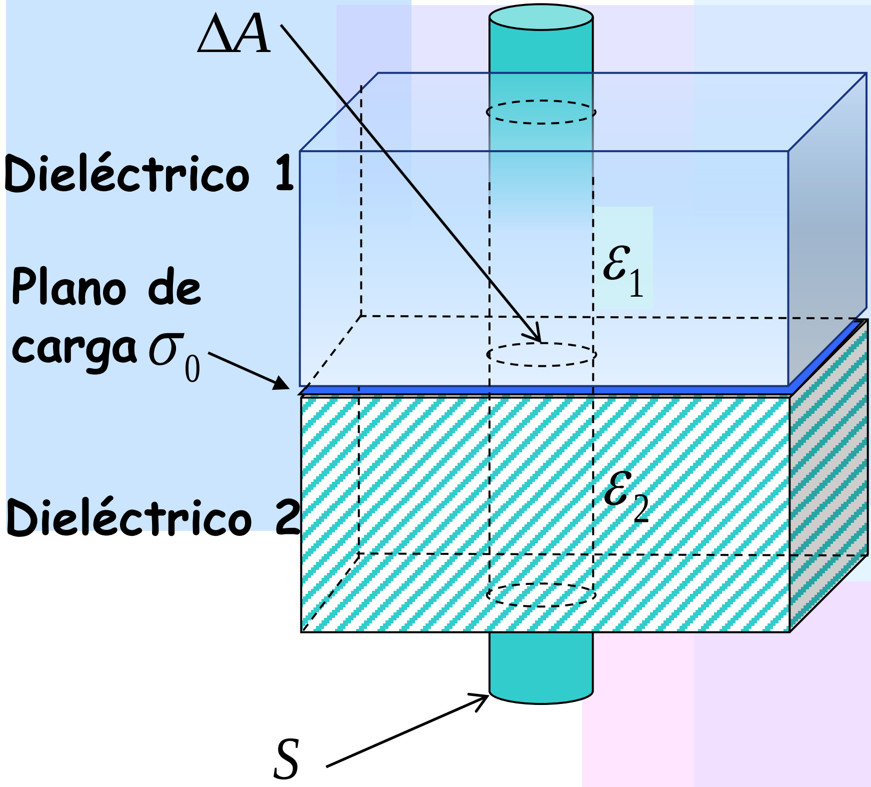
$$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2 = -P_2\hat{k}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres $\Rightarrow D_1 = D_2 = D$ ⇨

$$\left.\begin{array}{l} Q_T = \Delta A \sigma_0 \\ \oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 2\Delta A D \end{array}\right\} D = \frac{\sigma_0}{2}$$



Ejemplo 1


ΔA
Dieléctrico 1
ε_1
Plano de carga σ_0
Dieléctrico 2
ε_2
S

$$\vec{D}_1' = \frac{\sigma_0}{2}\hat{k},\ \vec{E}_1' = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1' = 0\hat{k}$$

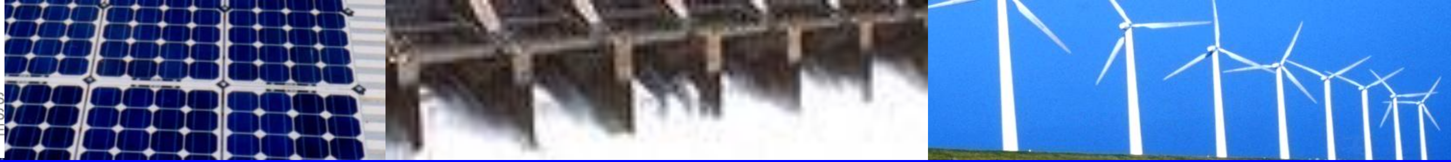
$$\vec{D}_1 = \frac{\sigma_0}{2}\hat{k},\ \vec{E}_1 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_1}\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\sigma_0}{2\varepsilon_1}\hat{k}$$

$\uparrow \hat{k}$

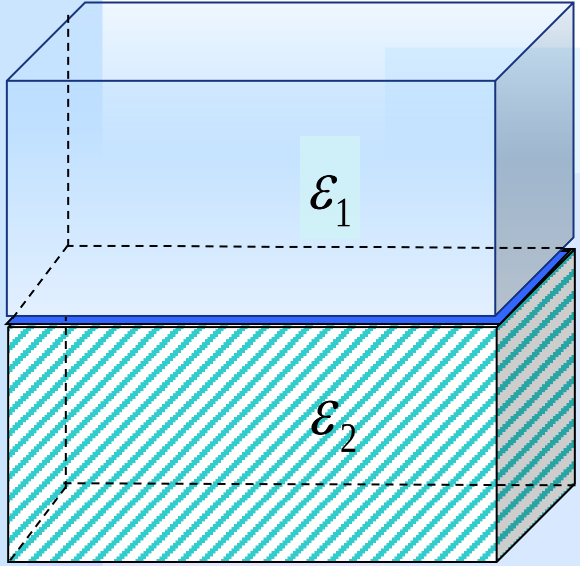
$$\vec{D}_2 = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k},\ \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_2}\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2 = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\sigma_0}{2\varepsilon_2}\hat{k}$$

$$\vec{D}_2' = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k},\ \vec{E}_2' = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2' = 0\hat{k}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres. Fuentes de E son todas las cargas: Libres y de polarización



Ejemplo 1


ε_1
ε_2

Dieléctrico 1

Plano de carga σ_0

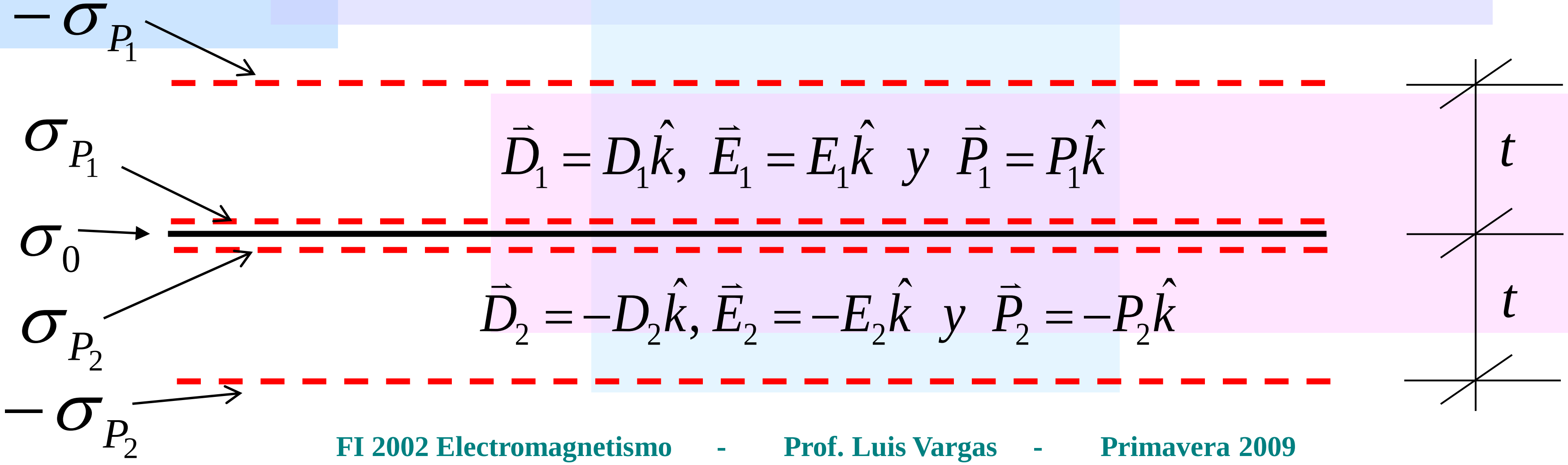
Dieléctrico 2

$$\vec{D}_1 = D_1\hat{k},\ \vec{E}_1 = E_1\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1 = P_1\hat{k}$$

$\hat{k}$

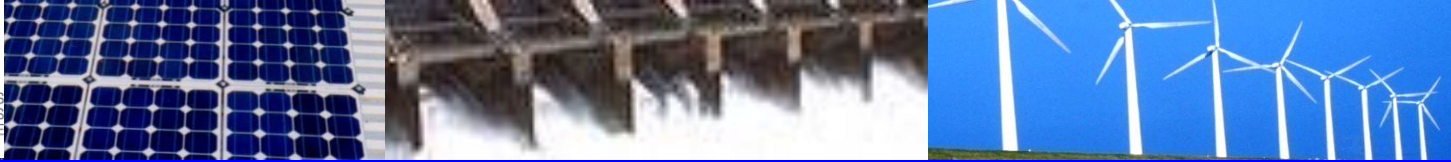
$$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k},\ \vec{E}_2 = -E_2\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2 = -P_2\hat{k}$$

Se formarán densidades de carga superficial σ_{P_1} **y** σ_{P_2} **en los dieléctricos**


$-\sigma_{P_1}$
σ_{P_1}
σ_0
σ_{P_2}
$-\sigma_{P_2}$
t
t

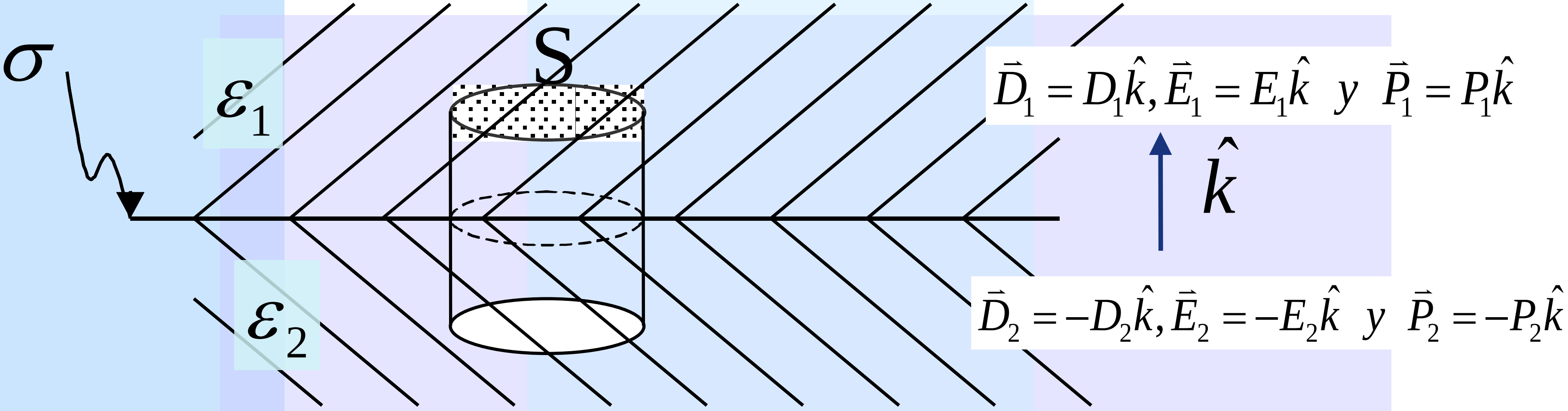
$$\vec{D}_1 = D_1\hat{k},\ \vec{E}_1 = E_1\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_1 = P_1\hat{k}$$

$$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k},\ \vec{E}_2 = -E_2\hat{k}\ \ y\ \ \vec{P}_2 = -P_2\hat{k}$$



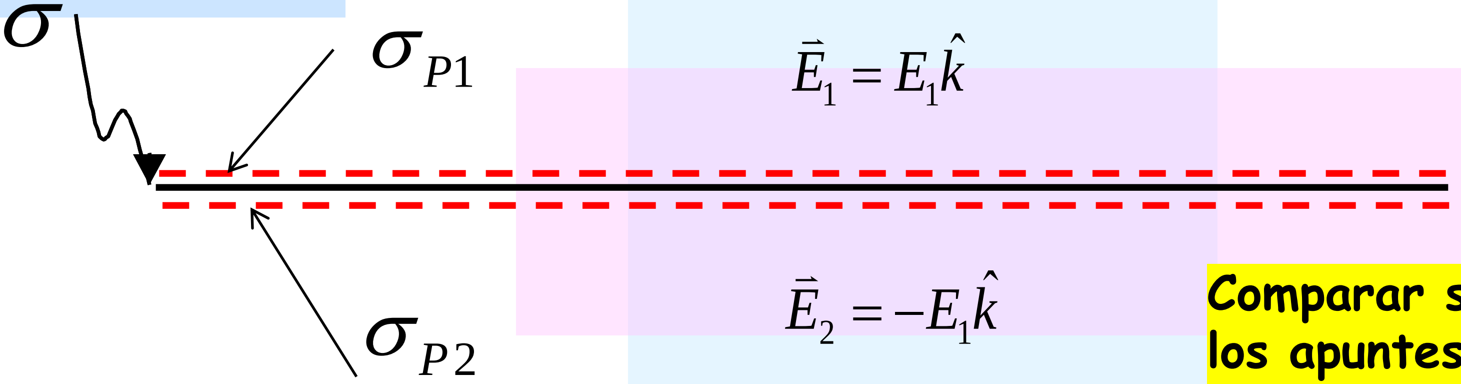
Ejemplo 2

Supongamos ahora que los medios son infinitos, es decir, supongamos $t \to \infty$


σ
ε_1
ε_2
S
$\hat{k}$

$\vec{D}_1 = D_1\hat{k}, \vec{E}_1 = E_1\hat{k} \;\; y \;\; \vec{P}_1 = P_1\hat{k}$

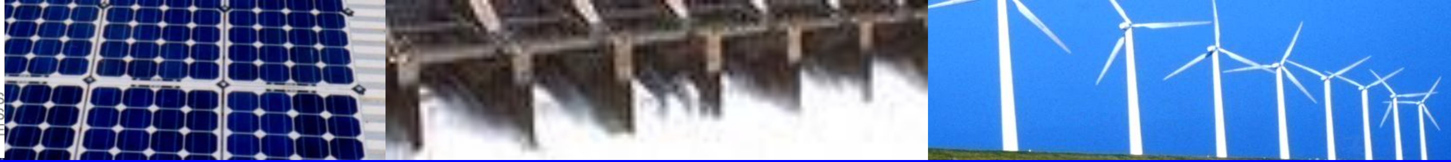
$\vec{D}_2 = -D_2\hat{k}, \vec{E}_2 = -E_2\hat{k} \;\; y \;\; \vec{P}_2 = -P_2\hat{k}$


σ
σ_{P1}
σ_{P2}

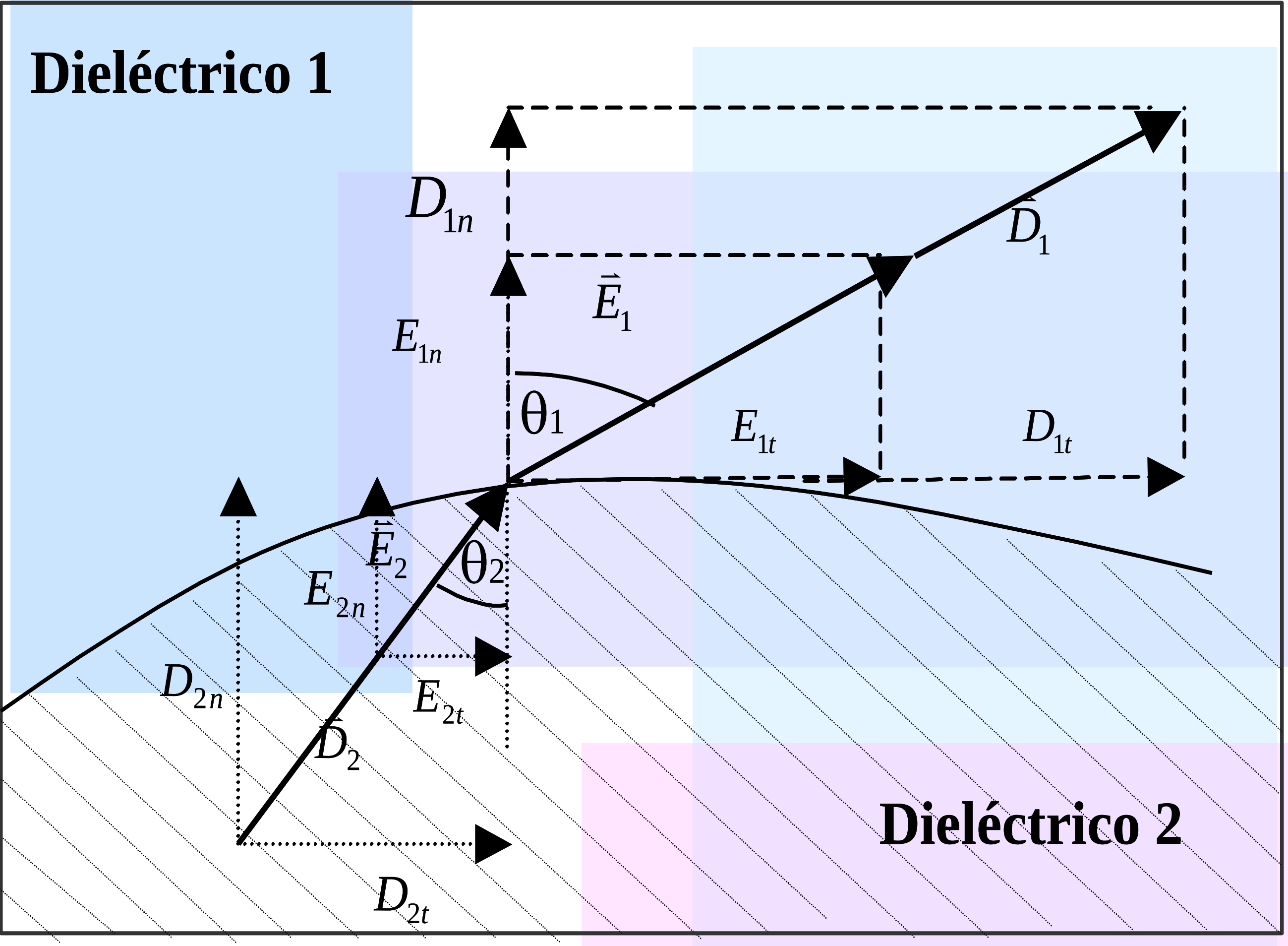
$\vec{E}_1 = E_1\hat{k}$

$\vec{E}_2 = -E_1\hat{k}$

Comparar solución (está en los apuntes) con Ejemplo 1 anterior y meditar…



Refracción del campo eléctrico


Dieléctrico 1
D_{1n}
$\vec{D}_1$
$\vec{E}_1$
E_{1n}
θ1
E_{1t}
D_{1t}
$\vec{E}_2$
θ2
E_{2n}
D_{2n}
E_{2t}
$\vec{D}_2$
D_{2t}
Dieléctrico 2

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

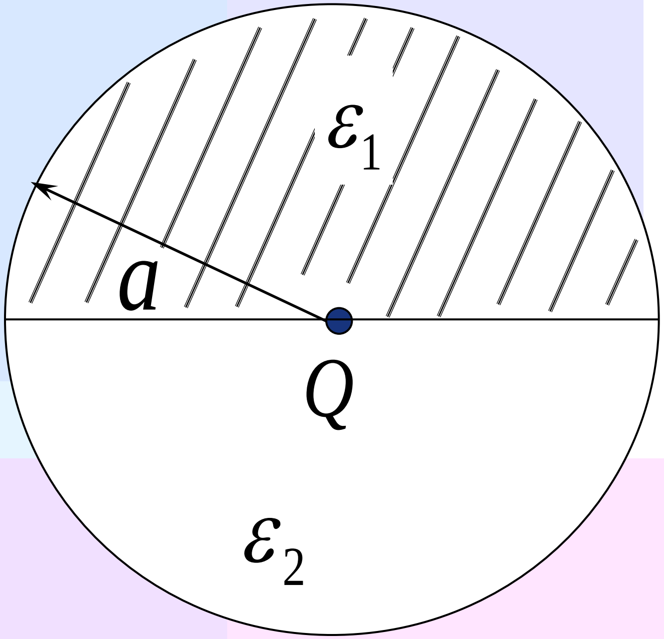
$$\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mathrm{tg}\,\theta_2}{\varepsilon_2}$$

Ley de Refracción de Campos Eléctricos $\therefore \dfrac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$

Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Calcular E y D dentro de la esfera de radio a



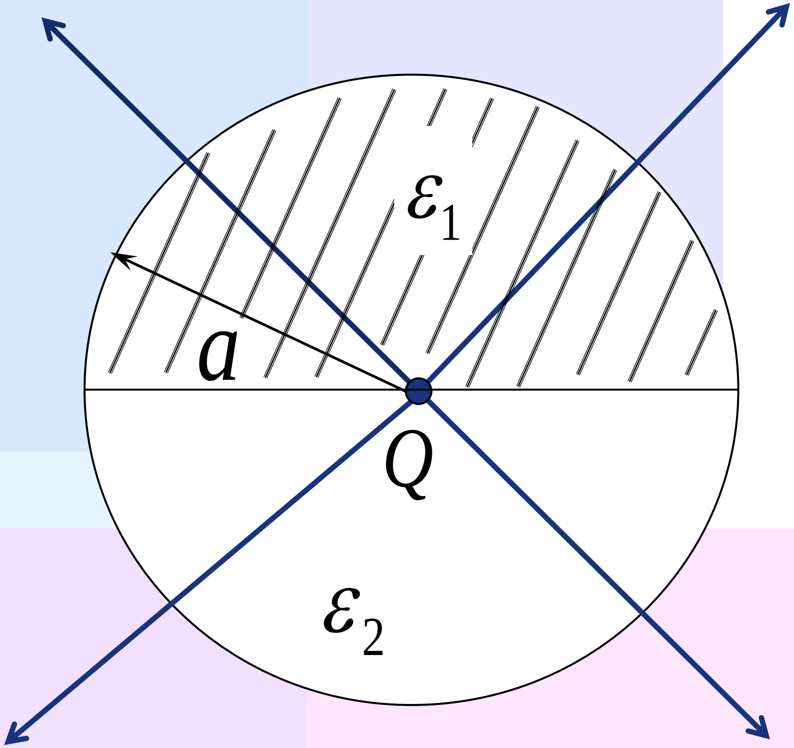
Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Supuesto:
Campos son radiales

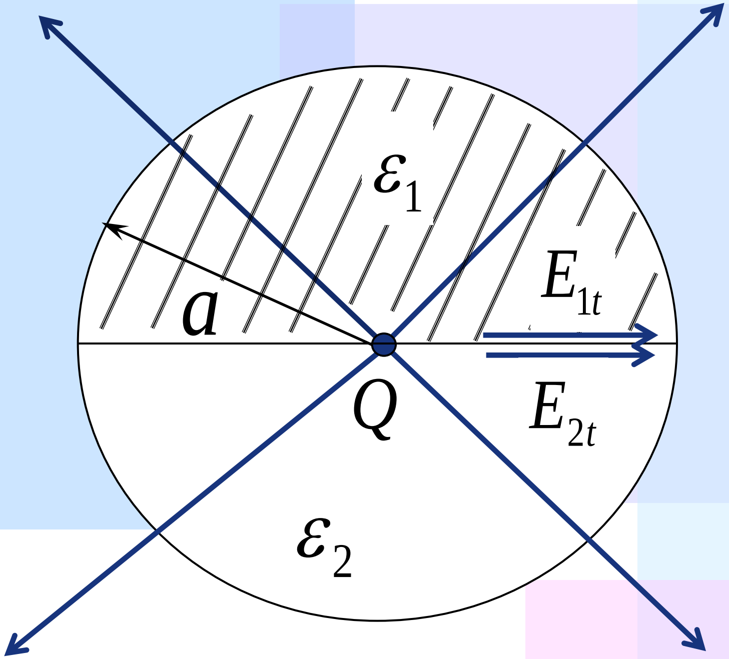
$$\vec{D}_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = D_2(r)\hat{r},$$

$$\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = E_2(r)\hat{r},$$



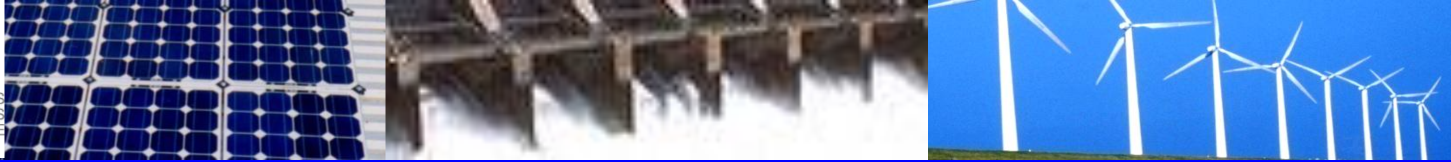
Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro



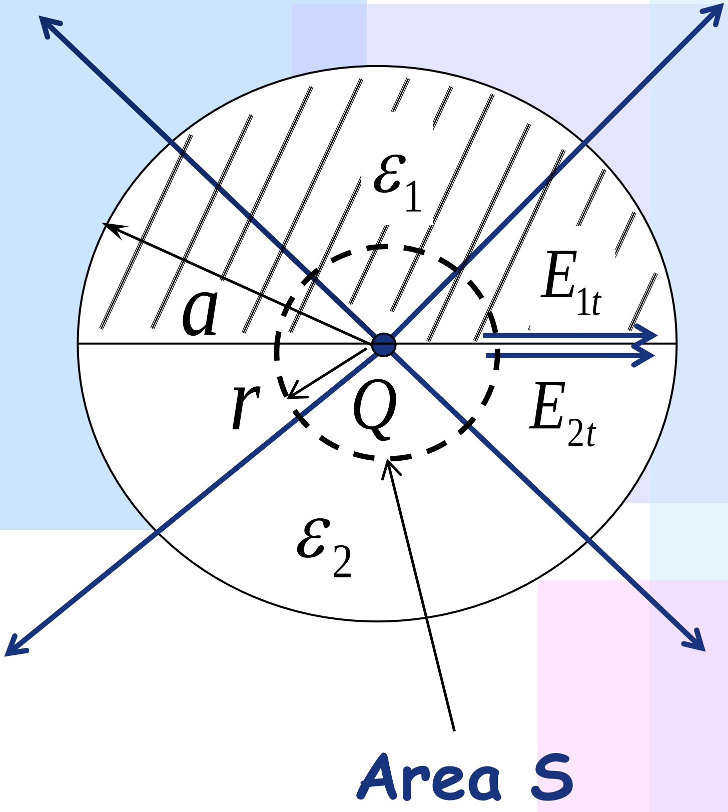
Condición de Borde

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \dfrac{D_1(r)}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_2(r)}{\varepsilon_2} \end{cases}$$



Consideraciones sobre Simetría

I. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro



Aplicando la Ley de Gauss en S:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} \quad \Rightarrow$$

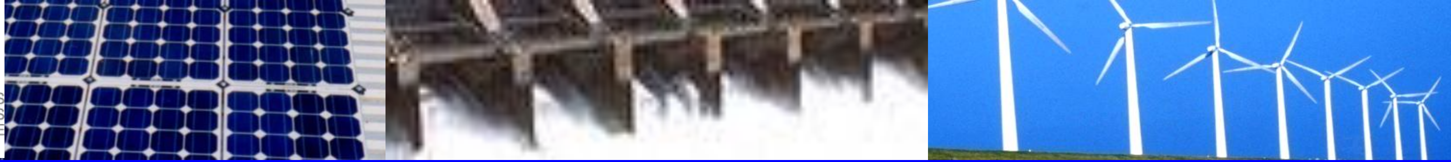
$$\iint_{ZONA\,I} \vec{D}_1 \bullet d\vec{s} + \iint_{ZONA\,II} \vec{D}_2 \bullet d\vec{s} = Q \quad \Rightarrow$$

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$

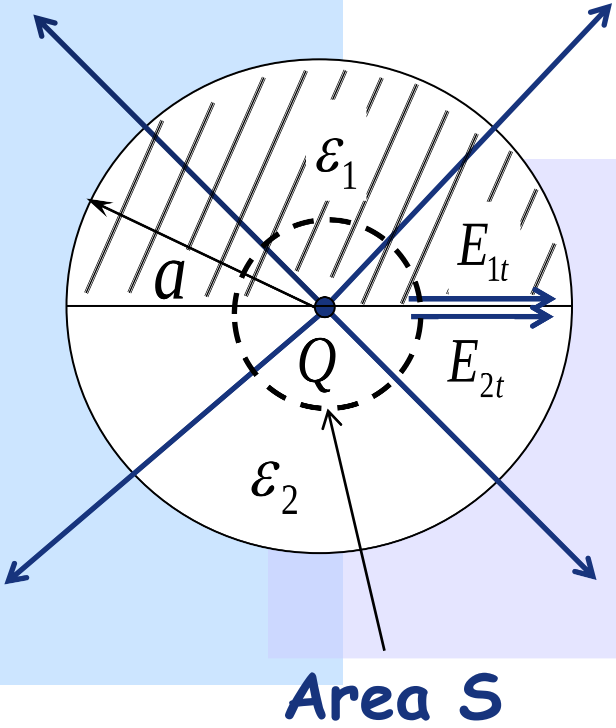
Se llega al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q \\ \varepsilon_1 D_2 = \varepsilon_1 D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

resolviendo



Consideraciones sobre Simetría



$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

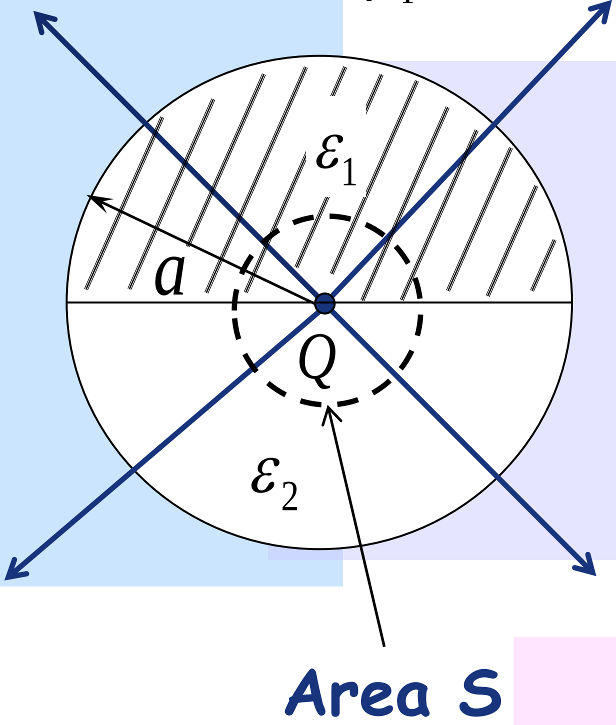
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P}_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Consideraciones sobre Simetría



$$\rho_P = -\nabla \bullet \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot P_\theta\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\phi}{\partial \phi}$$

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

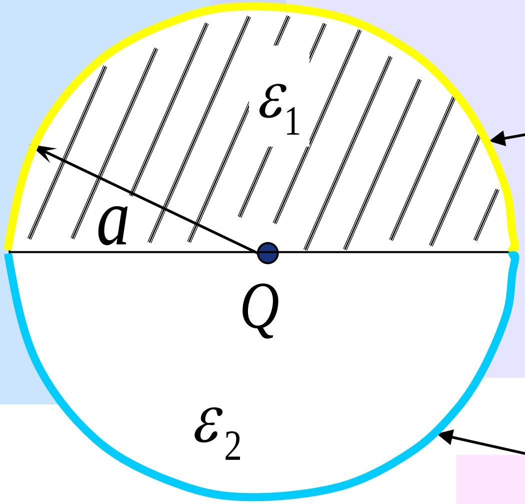
$$\Rightarrow \quad \rho_P = -\nabla \bullet \vec{P} = 0$$

$$\sigma_{Pi} = \vec{P} \bullet \hat{n} = \left.\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\right|_{r=a} \hat{r} \bullet \hat{r}$$

$$\sigma_{Pi} = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

Consideraciones sobre Simetría

$$\vec{P}_i = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

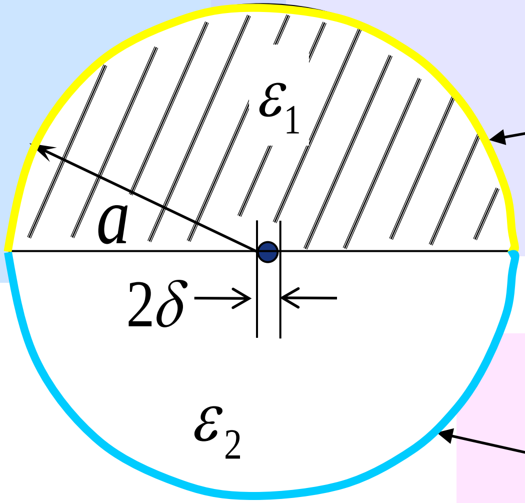
$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

¿Por qué la carga neta de polarización no es nula?

Consideraciones sobre Simetría

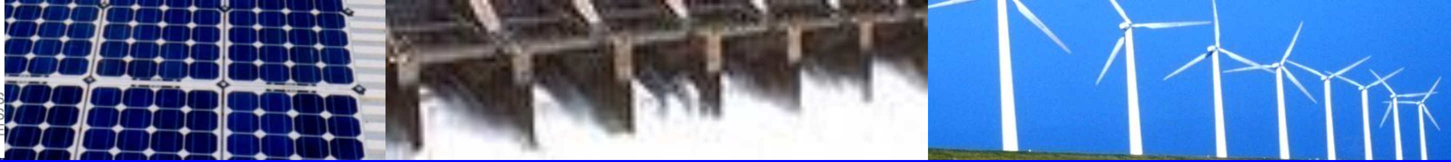
R. Porque el sistema contiene una carga puntual idealizada.

Si queremos representar en forma más real el sistema debemos considerar un pequeño radio δ para la carga.



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

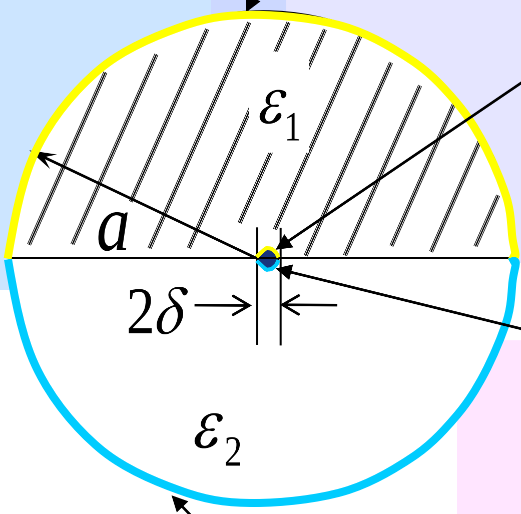


Consideraciones sobre Simetría

Con ello aparece carga en la superficie de contacto con la carga Q

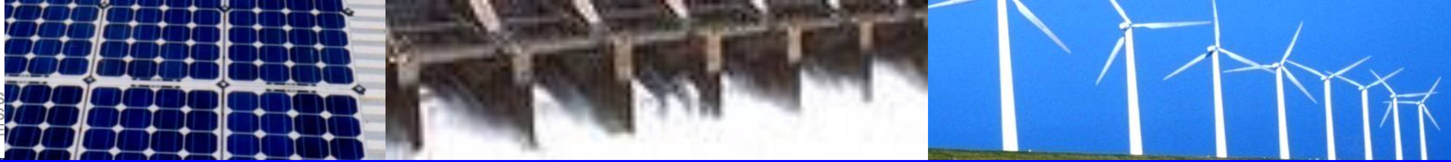
$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

$$\sigma'_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta^2}$$



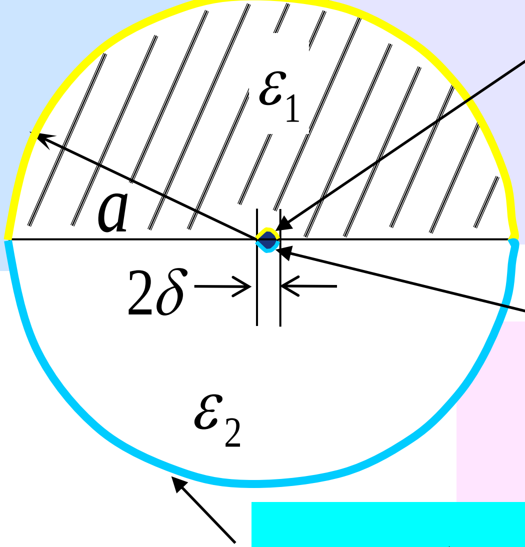
$$\sigma'_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta^2}$$

$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$



Consideraciones sobre Simetría

Con ello aparece carga en la superficie de contacto con la carga Q



$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

$$\sigma'_{P1} = \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta^2}$$

Carga total nula

$$\sigma'_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta^2}$$

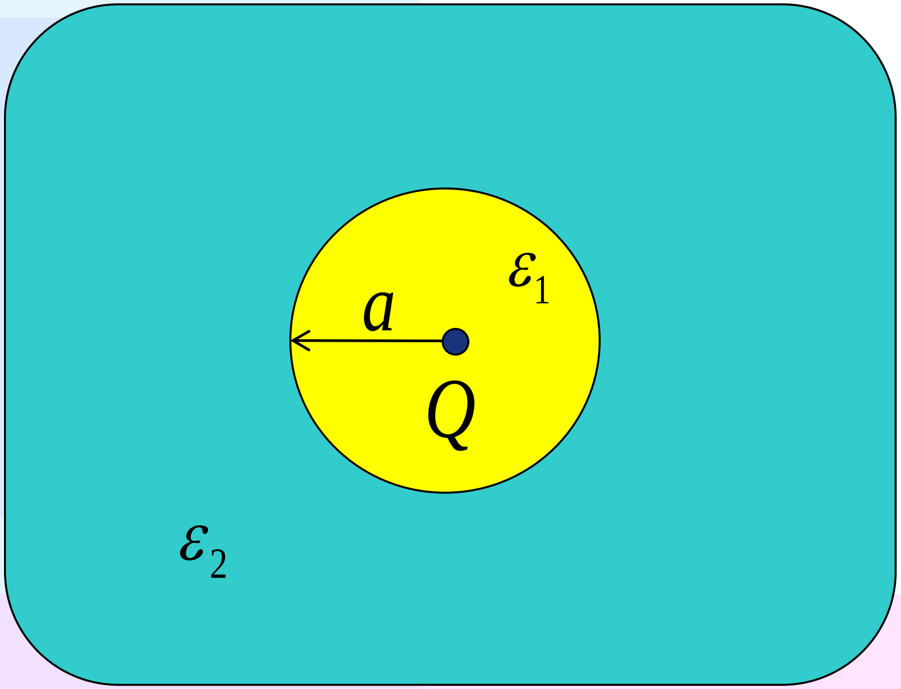
$$\sigma_{P2} = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}$$

Carga total nula

Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Calcular E y D en todo el espacio suponiendo que el medio 2 es infinito



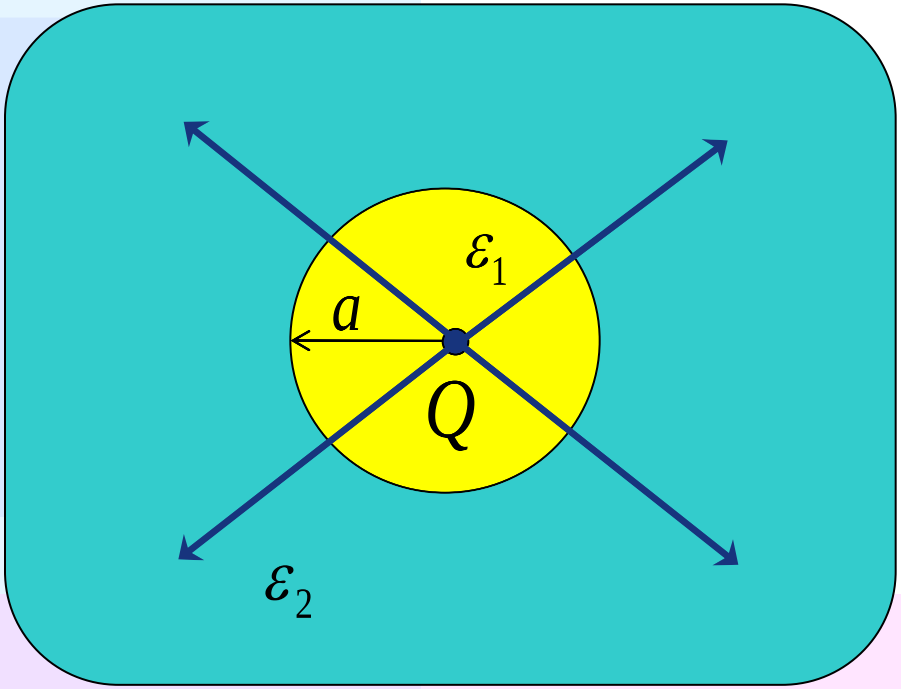
Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Campos son radiales

$$\vec{D}_1 = D_1(r)\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = D_2(r)\hat{r}$$

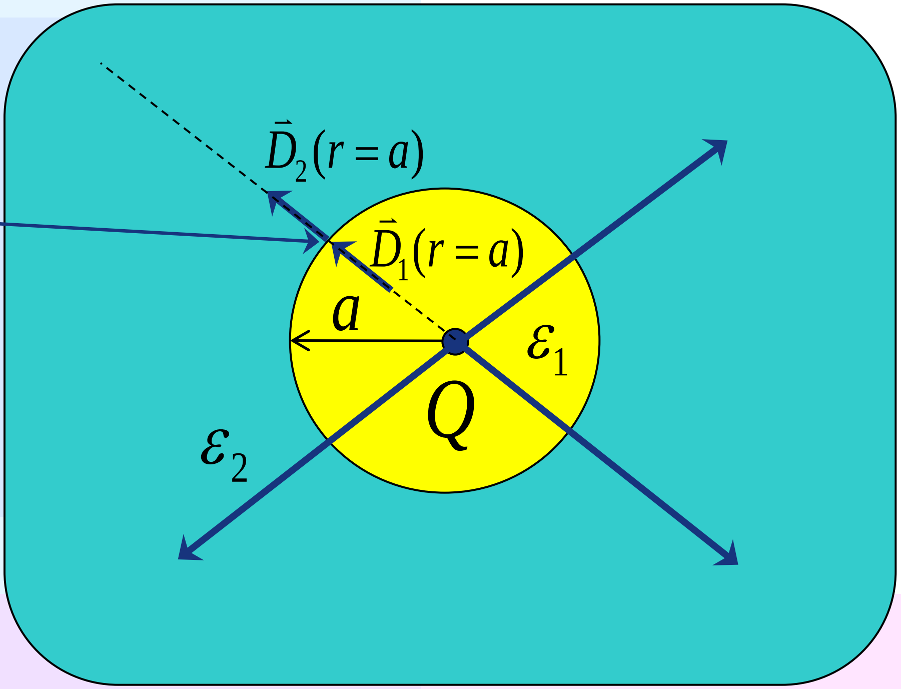
$$\vec{E}_1 = E_1(r)\hat{r}, \quad \vec{E}_2 = E_2(r)\hat{r}$$



Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Condición de Borde en *r* =*a*

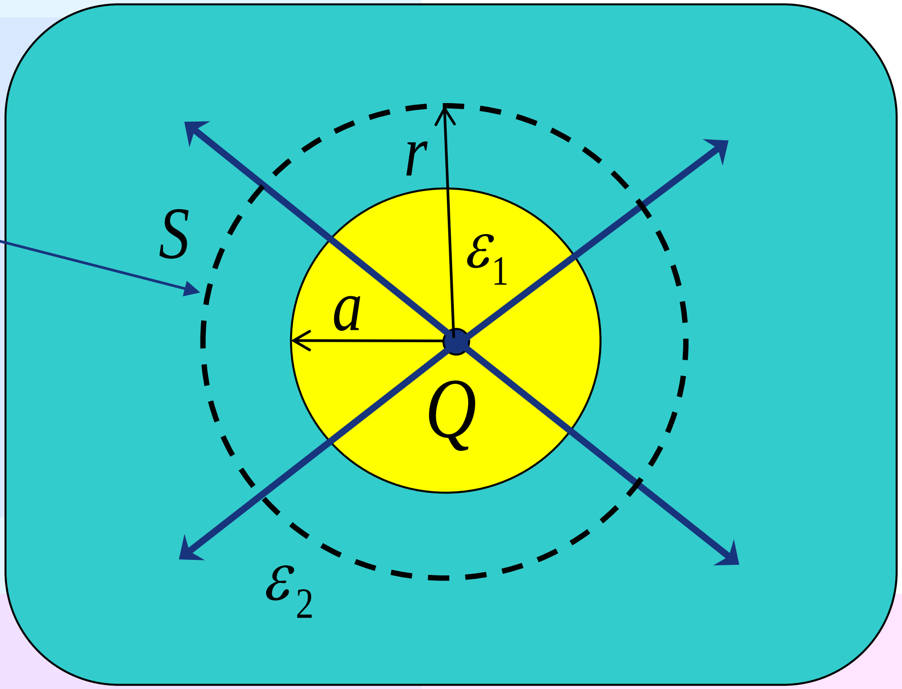

$\vec{D}_2(r=a)$
$\vec{D}_1(r=a)$
a
ε_1
Q
ε_2

Componente normal de D se mantiene

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_2(r=a)$$

Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro



Aplicando la ley de Gauss en S

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

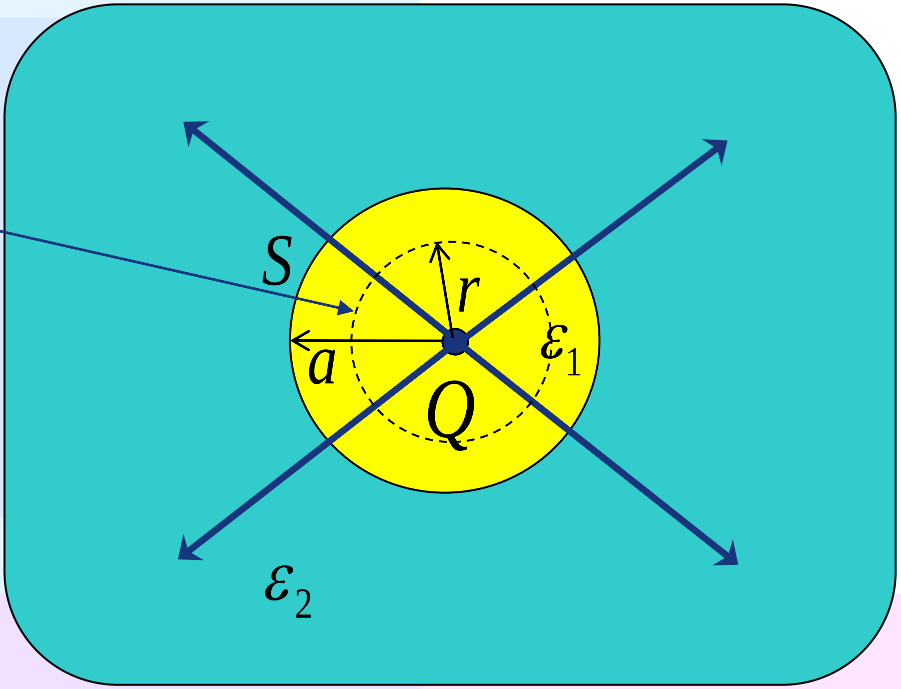
$$\Rightarrow 4\pi r^2 D_2(\vec{r}) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\hat{r}$$

Consideraciones sobre Simetría

II. Caso dos medios con carga puntual Q en el centro

Aplicando la ley de Gauss en S



$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

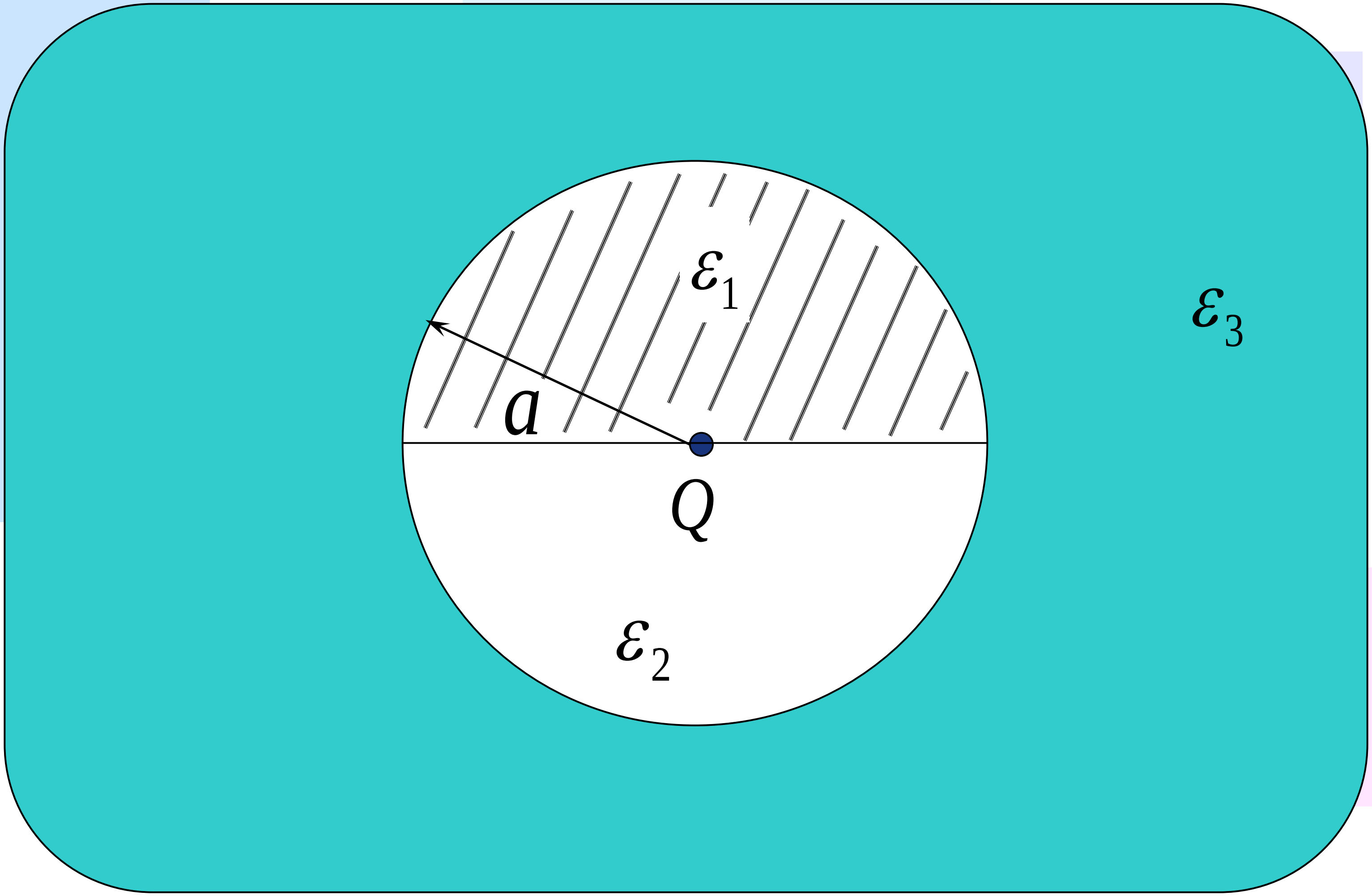
$$\Rightarrow 4\pi r^2 D_1(\vec{r}) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{r}$$

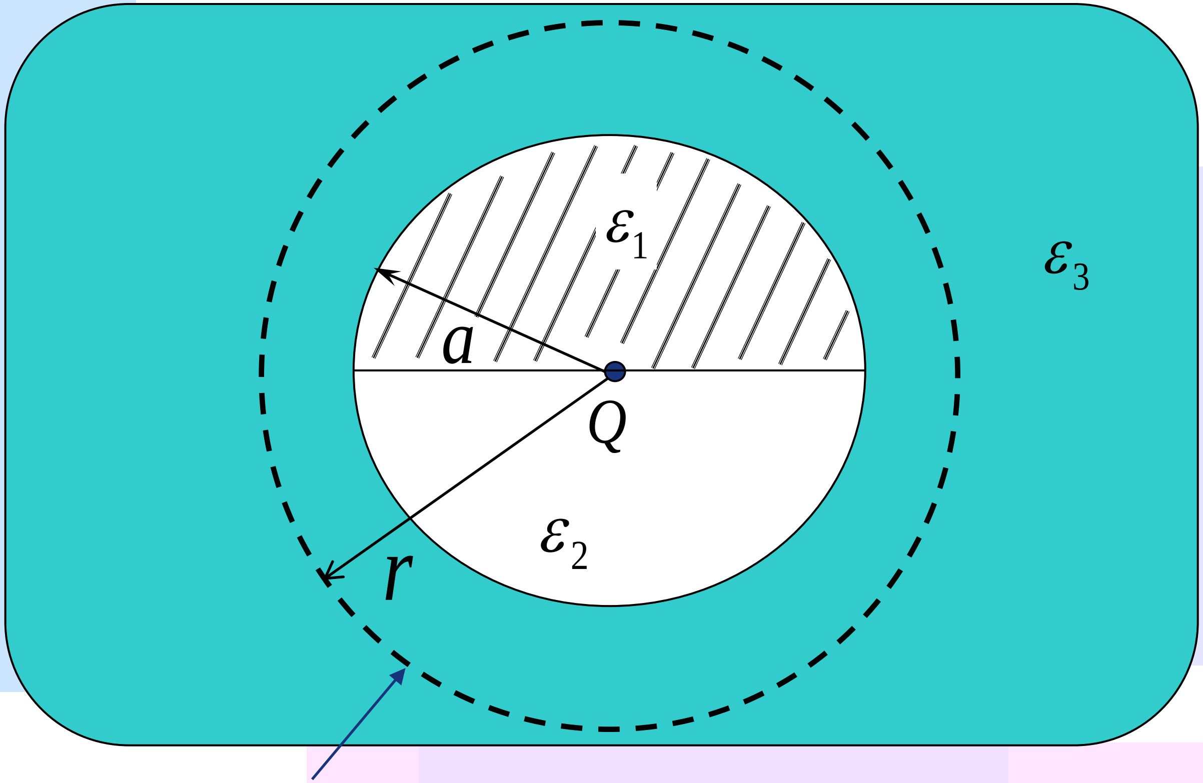
Notar que $D_1 = D_2$ en todo el espacio

Consideraciones sobre Simetría

III. Caso tres medios con carga puntual Q en el centro


ε_1
ε_3
a
Q
ε_2

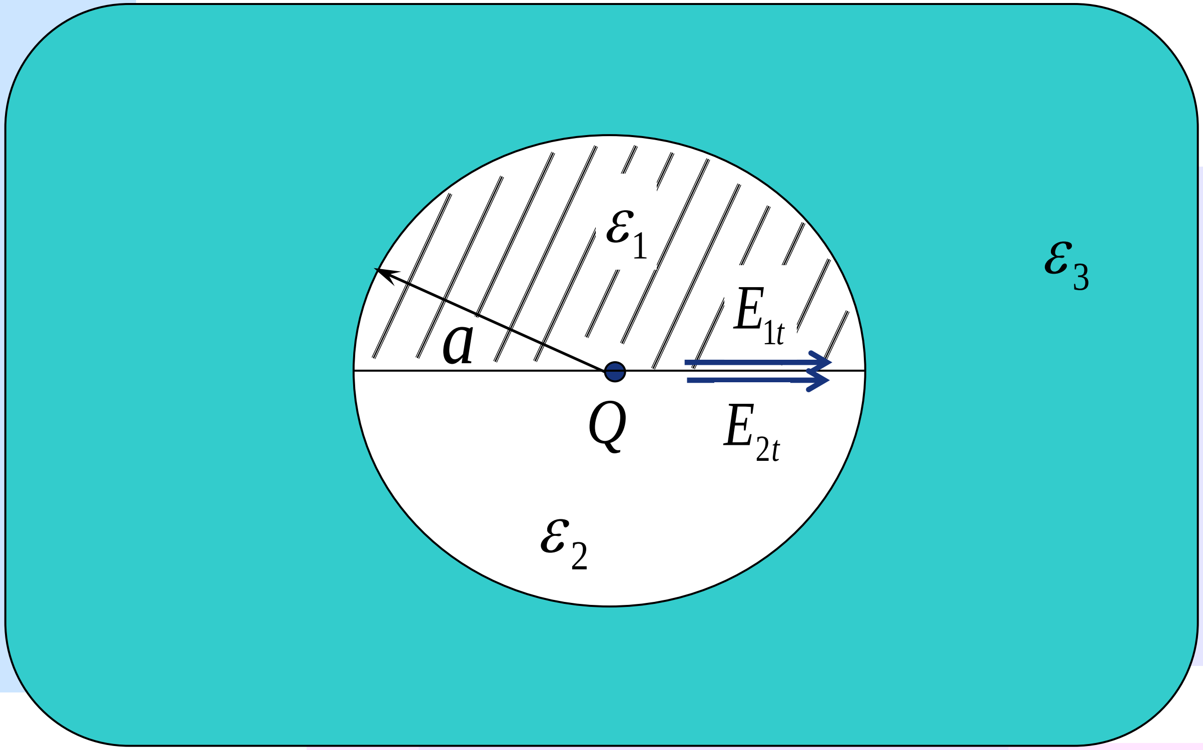
Consideraciones sobre Simetría


ε_1
ε_2
ε_3
a
Q
r

Aplicando la ley de Gauss en S

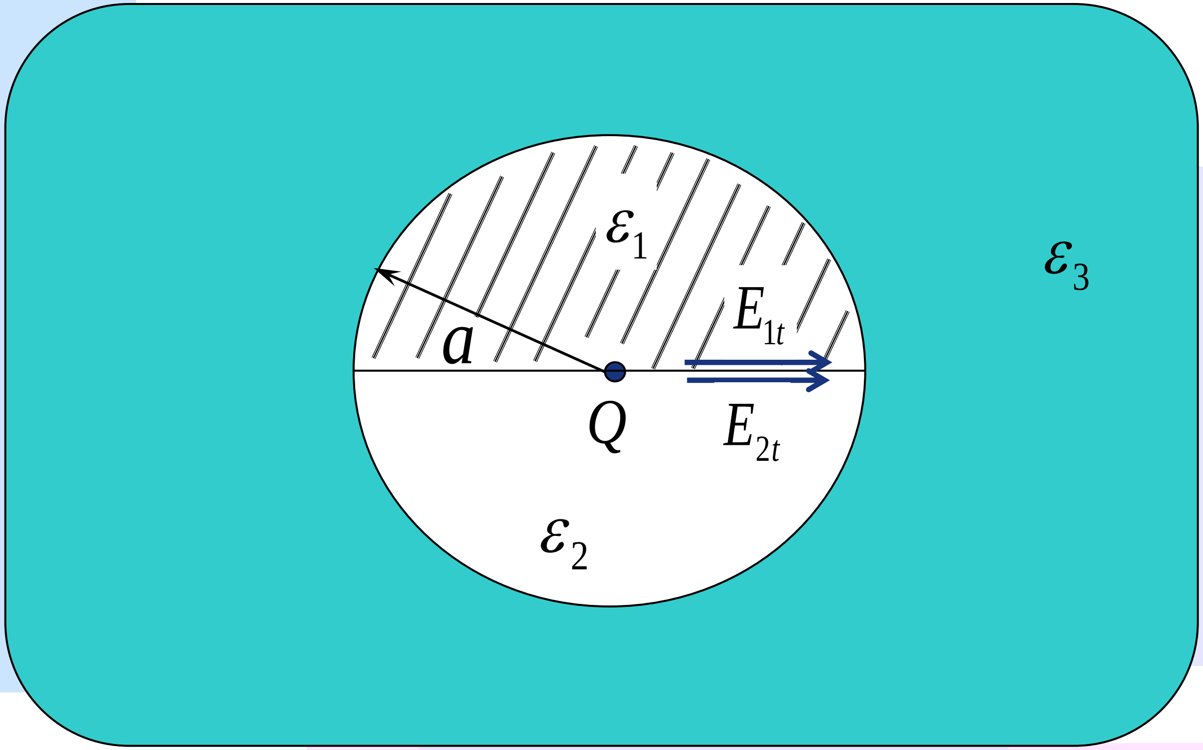
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} \;\Rightarrow \vec{D}_3(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}, \quad \vec{E}_3(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_3 r^2}\hat{r}$$

Consideraciones sobre Simetría


ε_1
ε_3
E_{1t}
a
Q
E_{2t}
ε_2

Para 0<r<a tenemos dos medios. En la superficie de separación la componente tangencial del campo es la misma

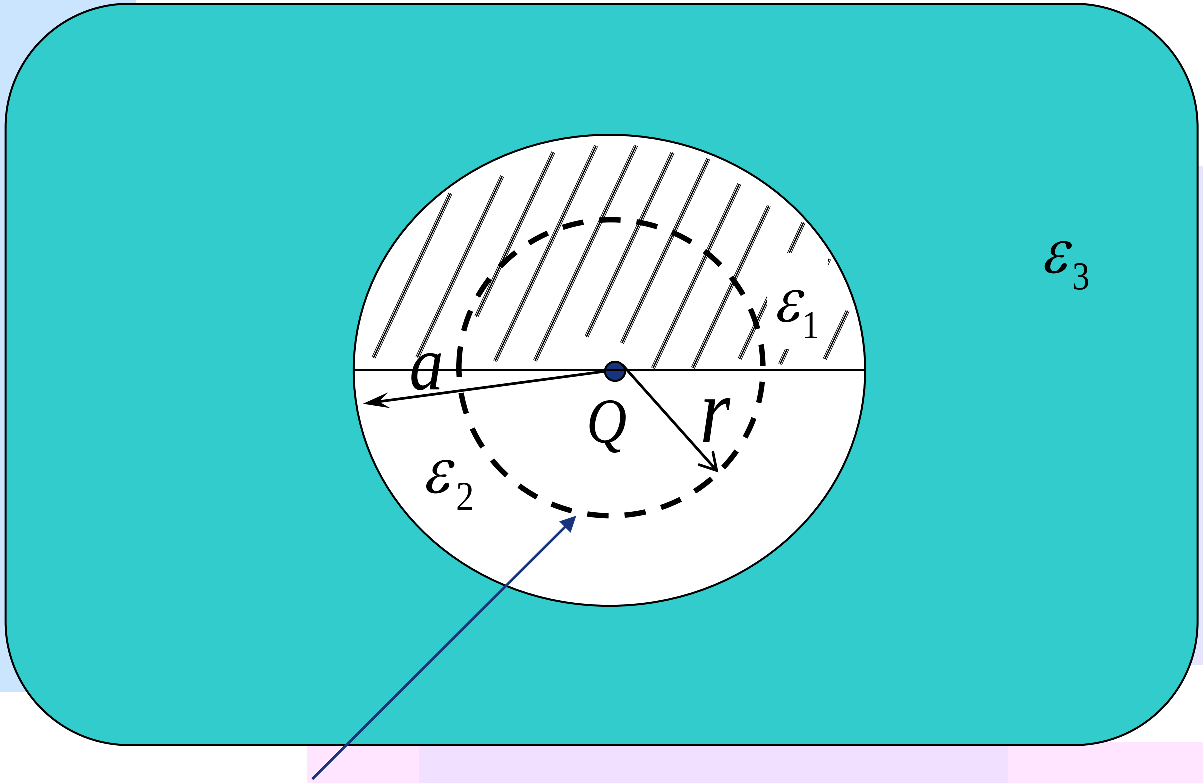
Consideraciones sobre Simetría


ε_1
ε_3
E_{1t}
a
Q
E_{2t}
ε_2

Luego dado que los campos son radiales, se debe cumplir:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \dfrac{D_1(r)}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_2(r)}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

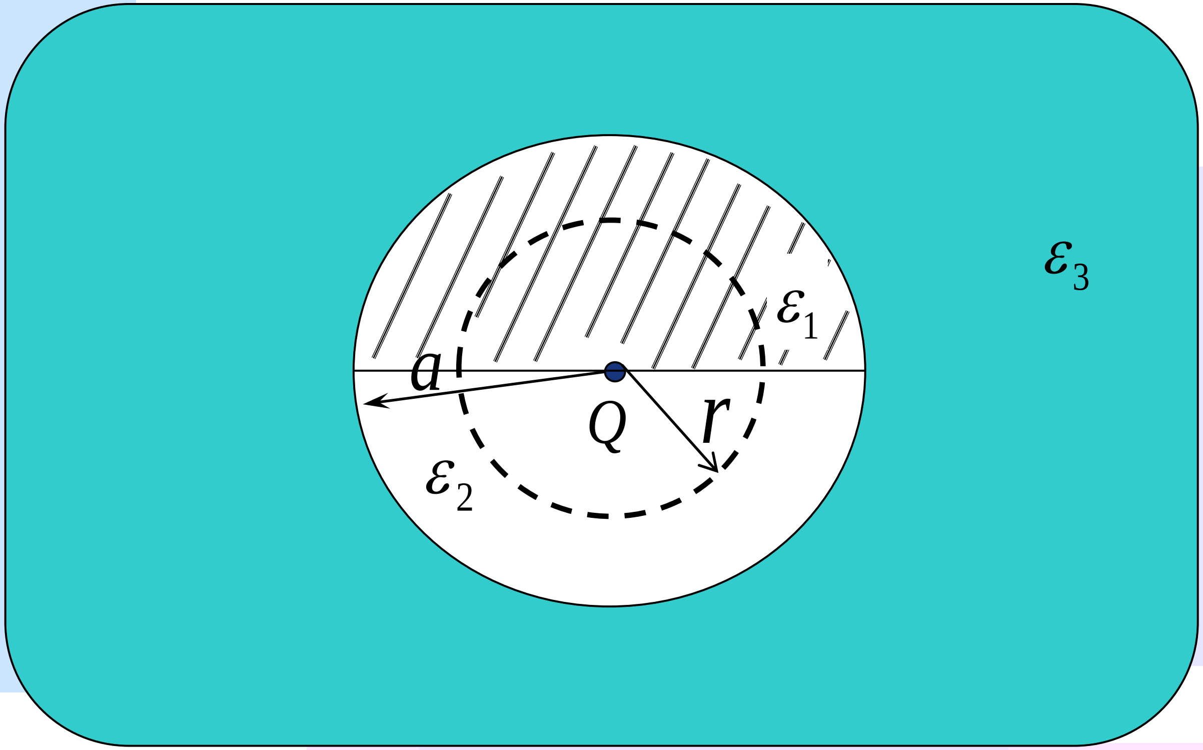
Consideraciones sobre Simetría


ε_3
ε_1
a
Q
r
ε_2

Aplicando la ley de Gauss en S

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} \;\Rightarrow\; \iint_{ZONA\ \ I} \vec{D}_1 \bullet d\vec{s} + \iint_{ZONA\ \ II} \vec{D}_2 \bullet d\vec{s} = Q \;\Rightarrow\; D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$

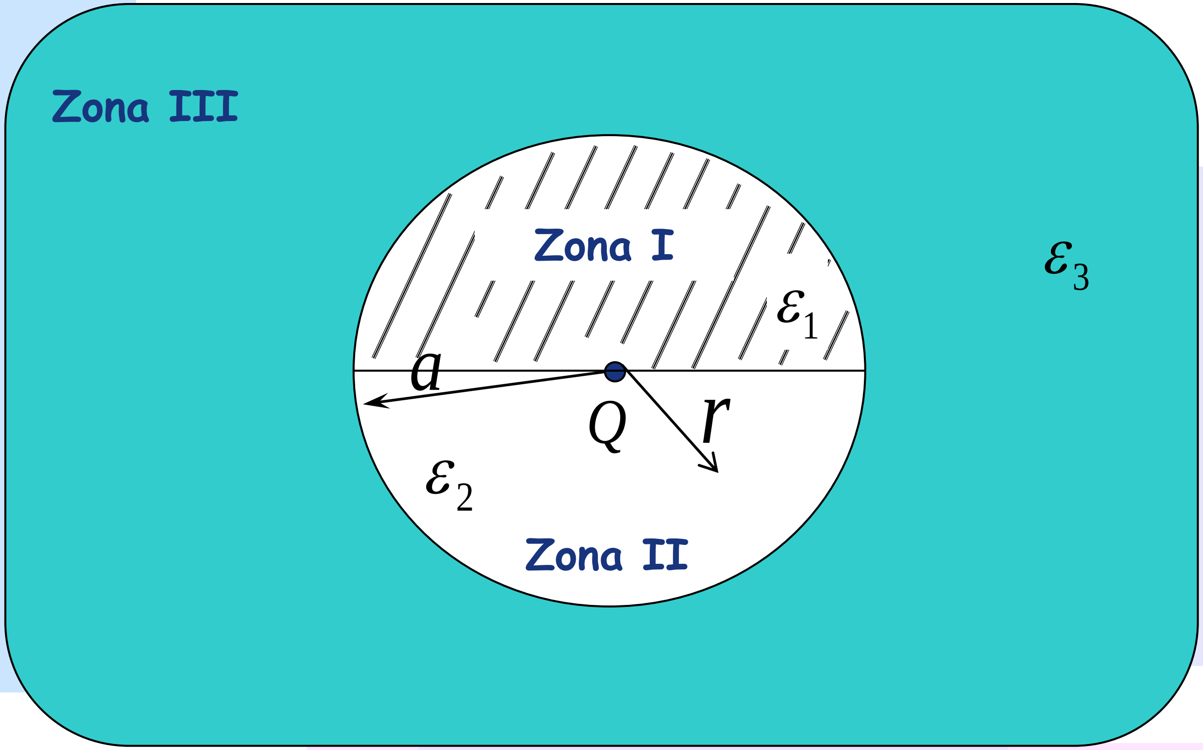
Consideraciones sobre Simetría



Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 &= Q \\ \varepsilon_1 D_2 &= \varepsilon_1 D_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

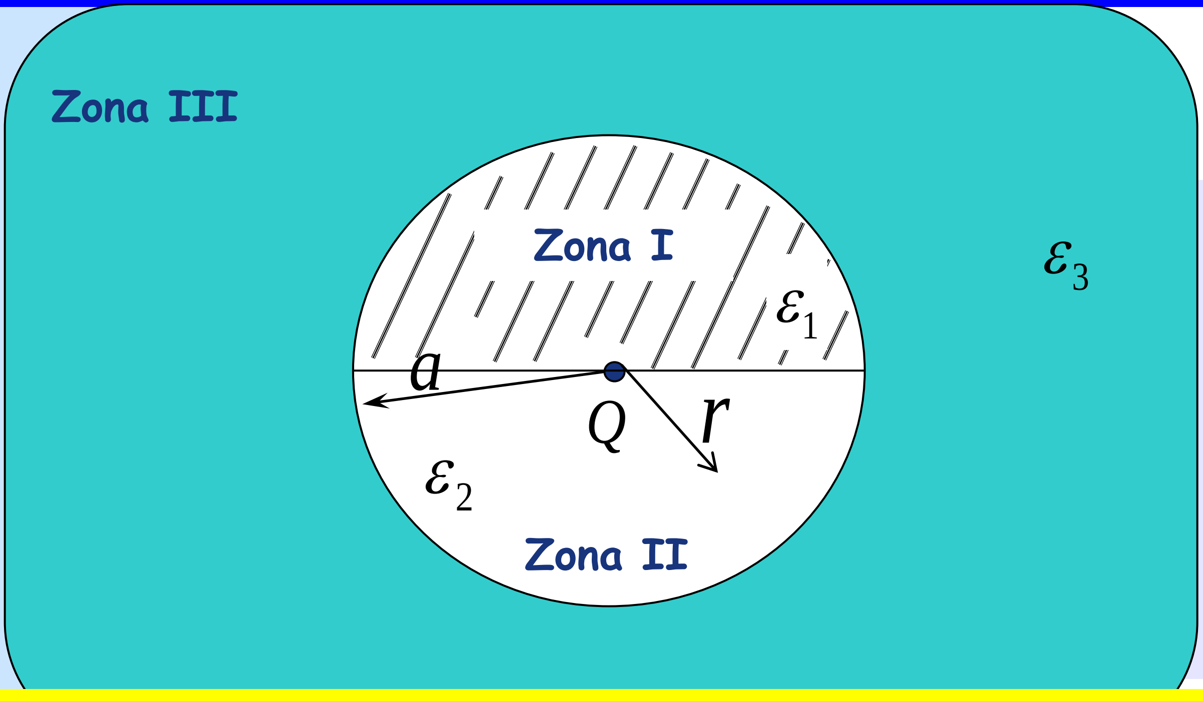
Consideraciones sobre Simetría


Zona III
Zona I
ε_1
ε_3
a
Q
r
ε_2
Zona II

En resumen: $\vec{D}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_2 = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \quad \vec{D}_3 = \dfrac{Q}{4\pi\, r^2}\hat{r}$

Notar que si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3 = \dfrac{Q}{4\pi\, r^2}\hat{r}$

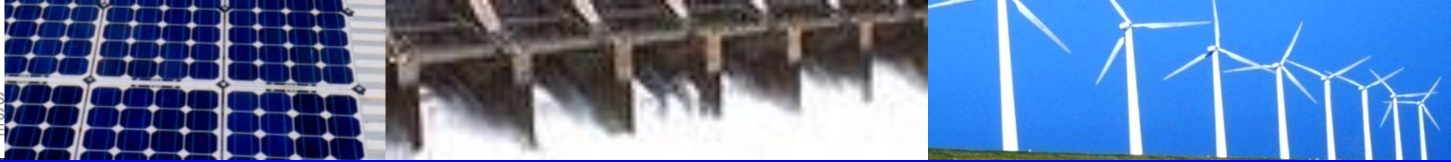
Consideraciones sobre Simetría


Zona III
Zona I
Zona II
ε_1
ε_2
ε_3
a
Q
r

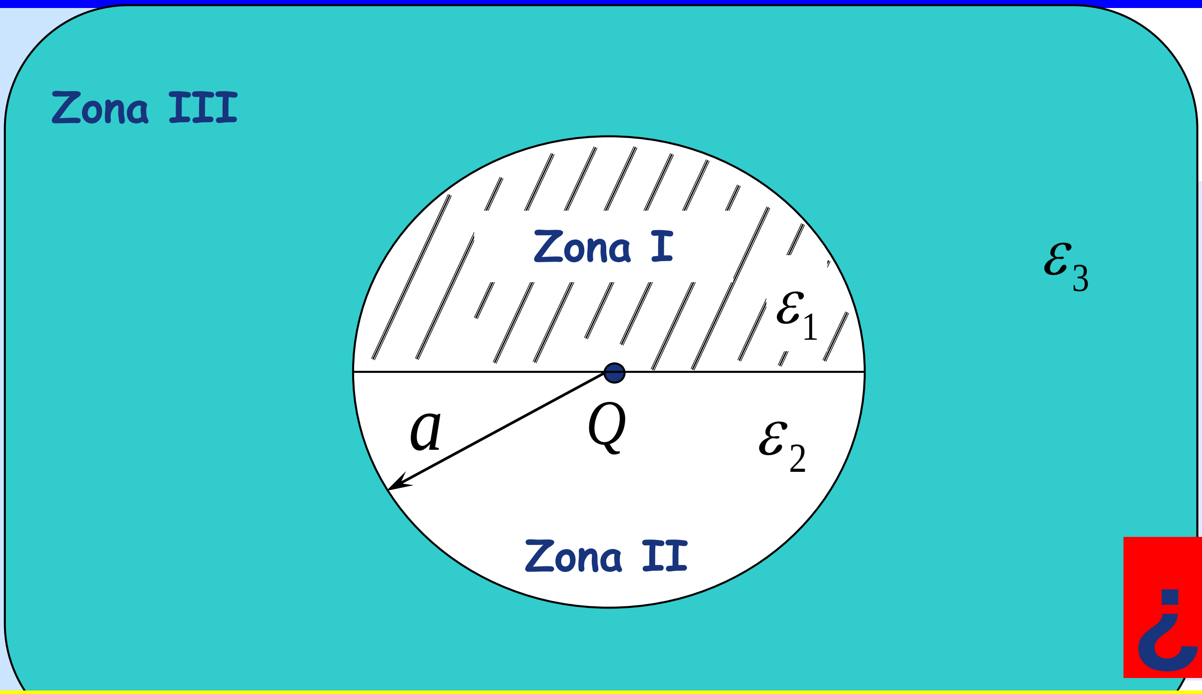
Pero si aplicamos la condición de borde para D en r=a:

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$\vec{D}_2(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$



Consideraciones sobre Simetría


Zona III
Zona I
ε_1
ε_3
a
Q
ε_2
Zona II

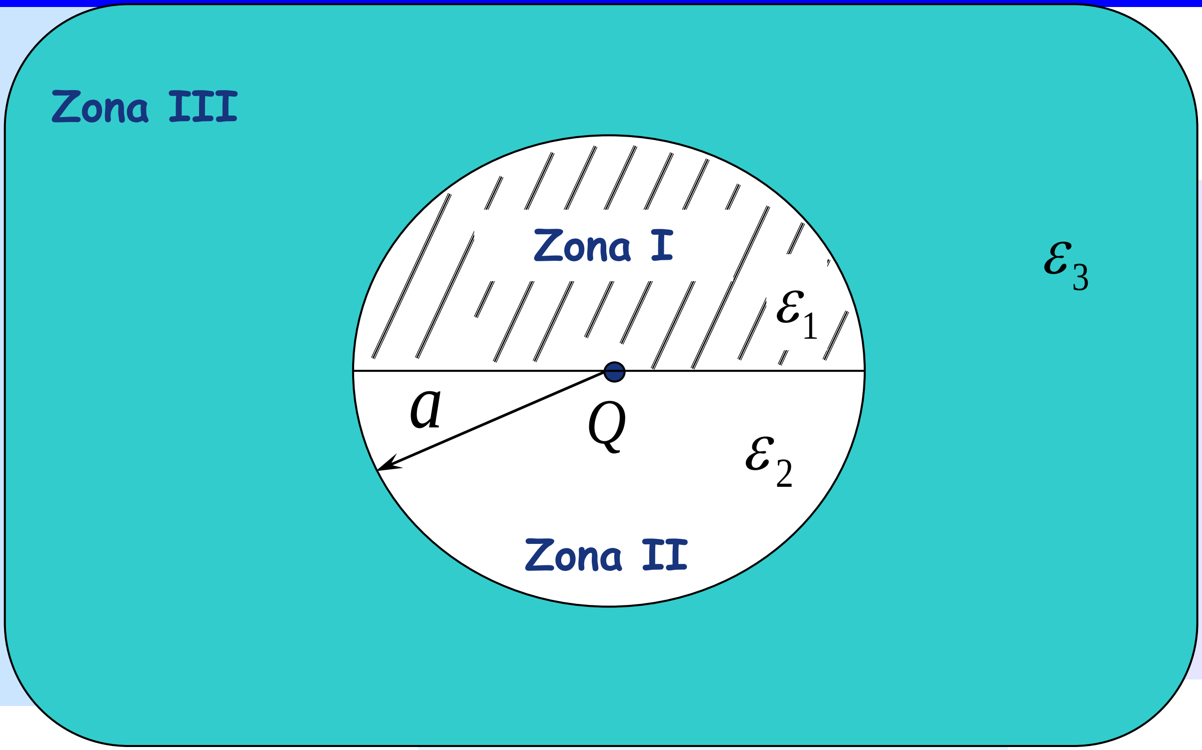
¿…?

Pero si aplicamos la condición de borde para D en r=a:

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$\vec{D}_2(r=a)=\vec{D}_3(r=a)\Rightarrow\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}\Rightarrow 2\varepsilon_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

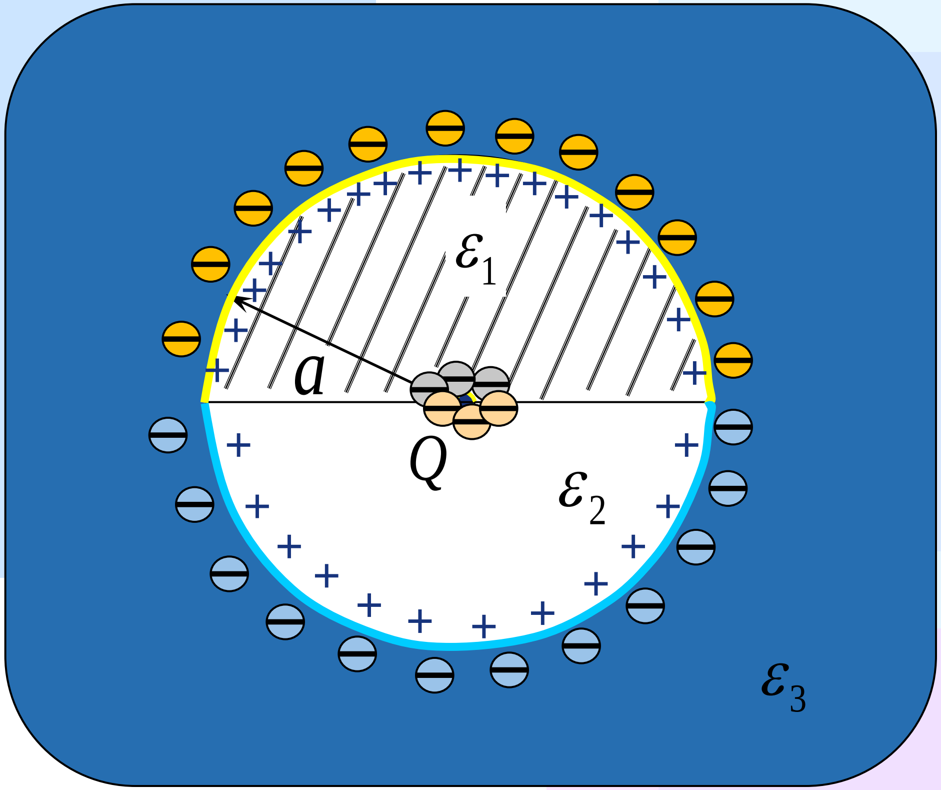
Consideraciones sobre Simetría


Zona III
Zona I
ε_1
ε_3
a
Q
ε_2
Zona II

Al aplicar simetría no debemos olvidar que estamos simplificando un problema más complejo!

Consideraciones sobre Simetría

La carga Q en el centro provocará una alineación de dipolos:

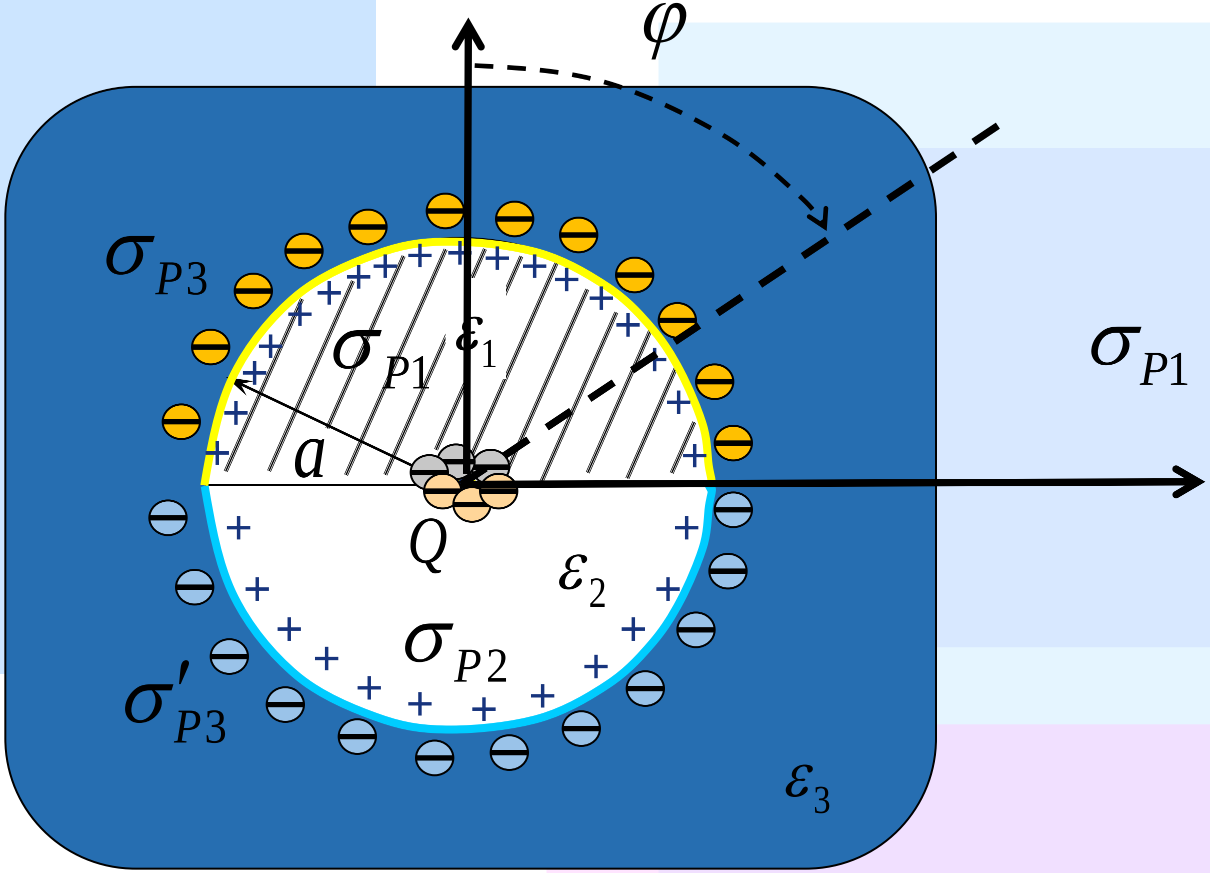


- La distribución de carga de polarización tendrá la forma indicada en la figura

- Si los medios son diferentes, entonces la carga superficial de polarización en zonas I y II es diferente

LUEGO EL SISTEMA NO TIENE SIMETRIA ESFÉRICA

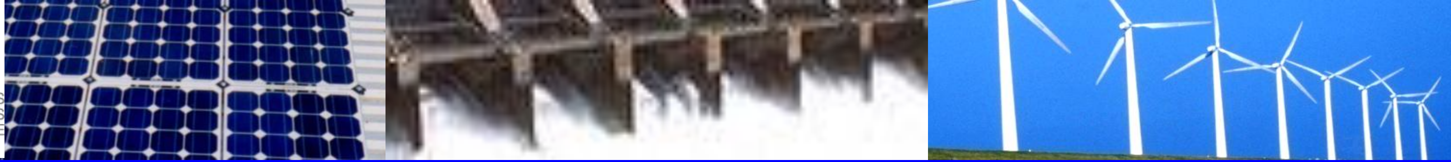
Consideraciones sobre Simetría


φ
σ_{P3}
σ_{P1}
ε_1
a
Q
ε_2
σ_{P2}
σ'_{P3}
ε_3

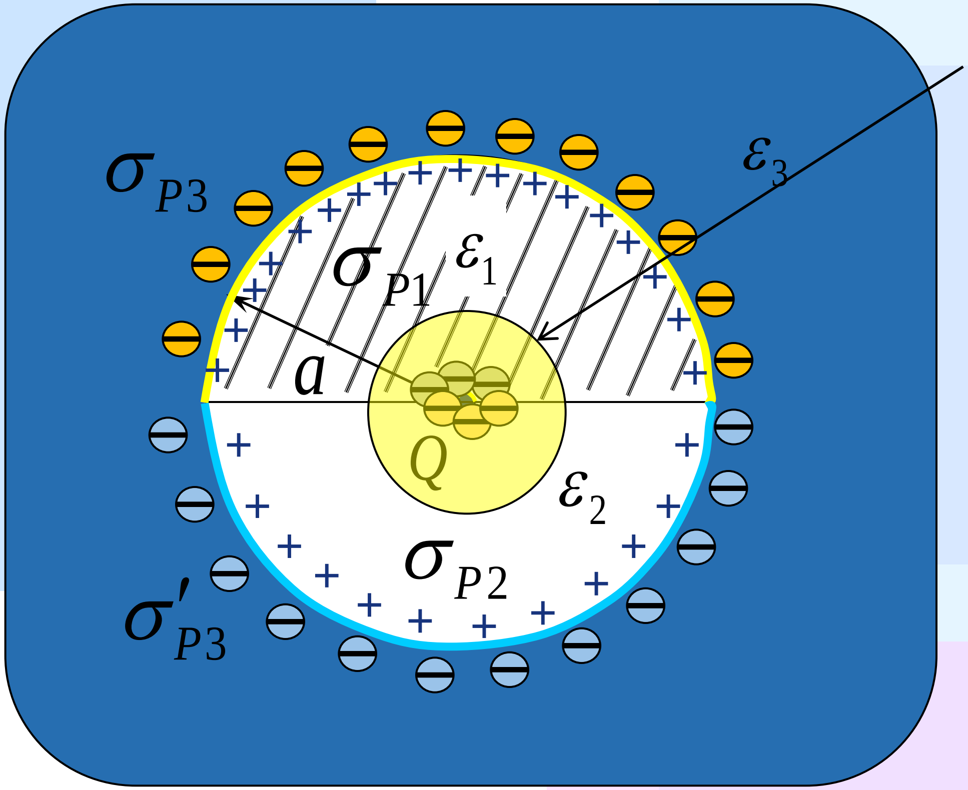
$$\sigma_{P1} \neq \sigma_{P2} \neq \sigma_{P3} \neq \sigma'_{P3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}(r,\varphi)$$

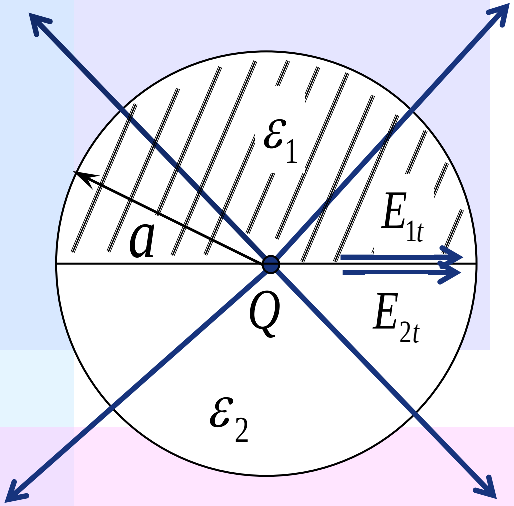
Y no se puede usar Ley de Gauss como lo hicimos !



Consideraciones sobre Simetría

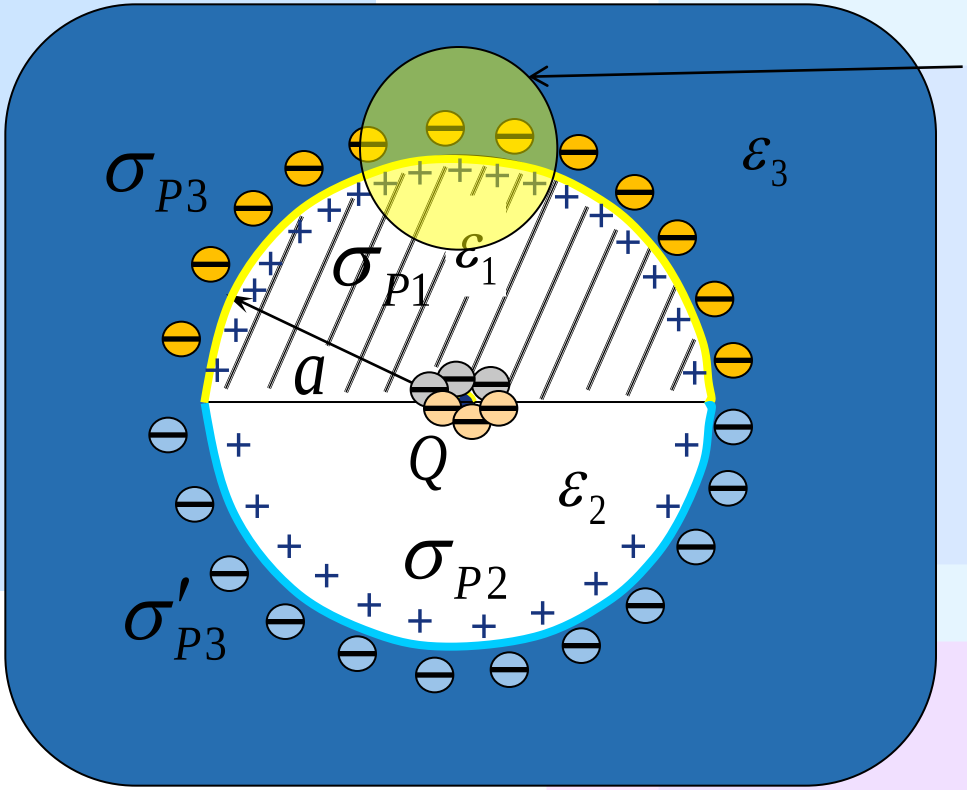

σ_{P3}
ε_3
σ_{P1}
ε_1
a
Q
ε_2
σ_{P2}
σ'_{P3}

En la práctica, la aproximación a usar dependerá de zona de interés

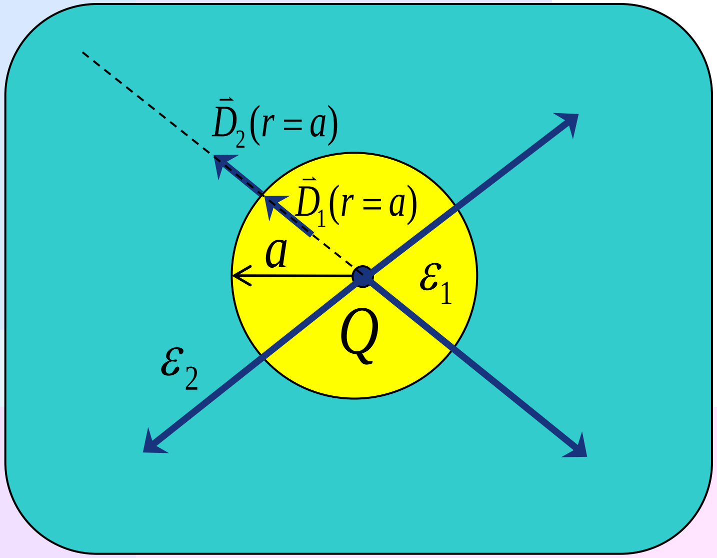

ε_1
a
E_{1t}
Q
E_{2t}
ε_2

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_1(r) = E_2(r) \\ \dfrac{D_1(r)}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_2(r)}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

Consideraciones sobre Simetría


σ_{P3}
ε_3
σ_{P1}
ε_1
a
Q
ε_2
σ_{P2}
σ'_{P3}

En la práctica, la aproximación a usar dependerá de zona de interés


$\vec{D}_2(r=a)$
$\vec{D}_1(r=a)$
a
ε_1
Q
ε_2

$$\vec{D}_1(r=a)=\vec{D}_2(r=a)$$