



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 7

Medios Materiales II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

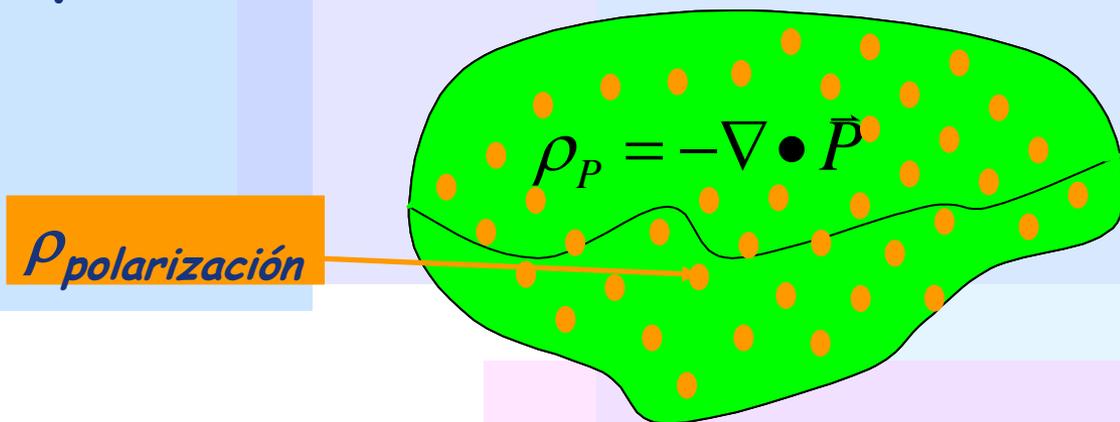
- Generalización de la 1^a ecuación de Maxwell
- Constante dieléctrica
- Clasificación de materiales dieléctricos
- Ruptura dieléctrica
- Condiciones de borde para el campo eléctrico
- Ejemplo
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría



Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$

ρ_{total} corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico



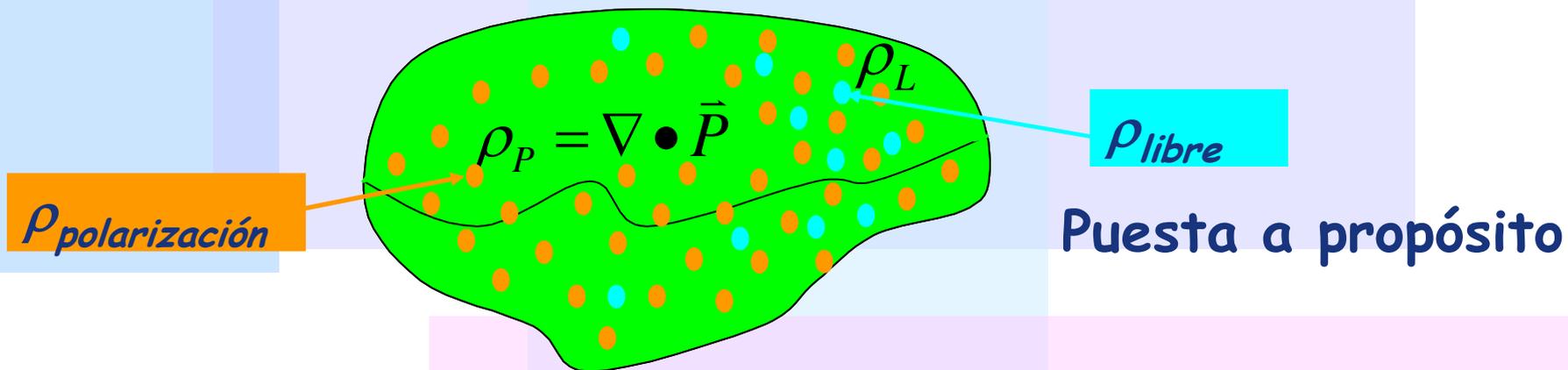
En el caso más general ρ_{total} estará compuesta de carga libre y carga de polarización



Generalización de la 1ª Ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}$

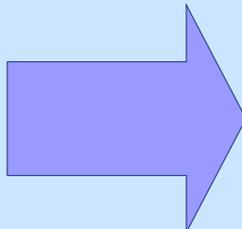
$$\rho_{total} = \rho_{Polarización} + \rho_{libre} \Rightarrow \rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}$$





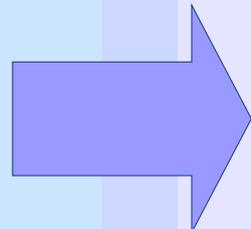
Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_P \quad \text{pero} \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$


$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

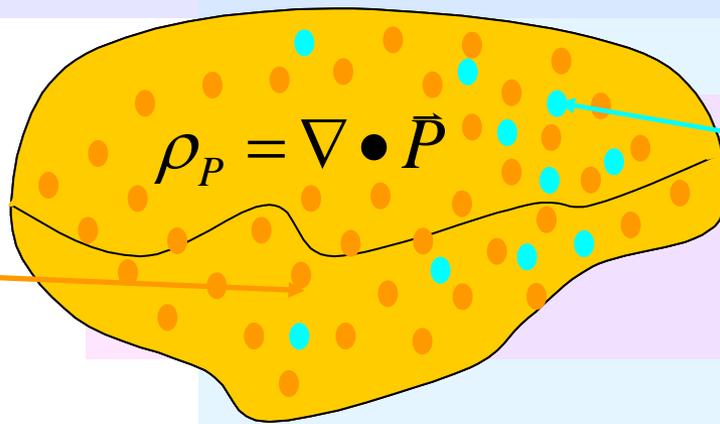
$$\rho_L = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (2.19)$$

definiendo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
Vector de desplazamiento


$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

1ª ecuación de Maxwell

$\rho_{polarización}$



ρ_{libre}

Puesta a propósito



Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$

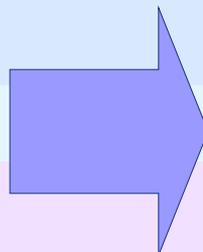
1ª ecuación de Maxwell

donde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Vector de desplazamiento

Fuentes de D son sólo las cargas libres

Integrando en un volumen Ω

$$\iiint_{\Omega} \rho_L dv = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv$$



$$Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Q_L

$\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \cdot d\vec{s}$

Ley de Gauss en la materia



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Dieléctrico

Plano de carga σ_0



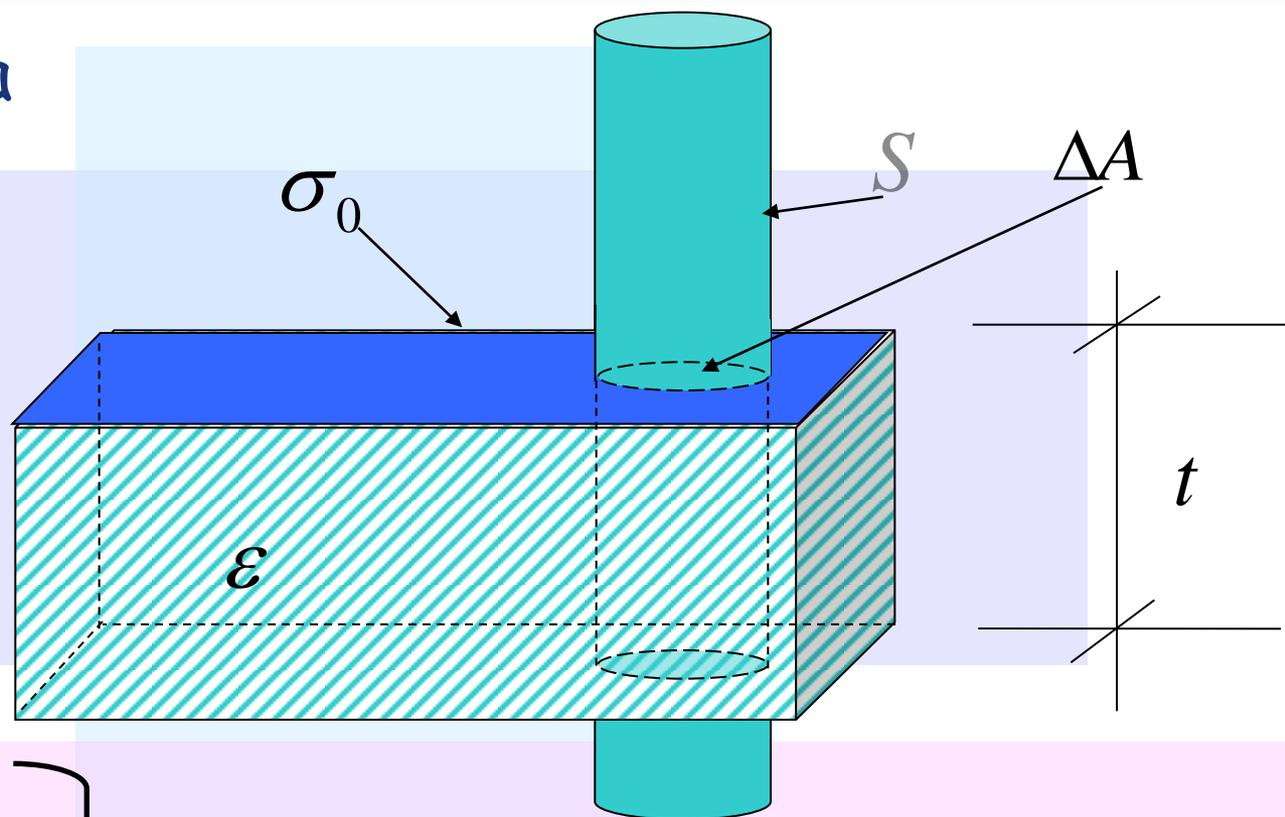
Calcular campos si la relación entre campos eléctricos y de desplazamiento es lineal, es decir, se cumple $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$



Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Plano de carga
(infinito)

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_T$$



$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$

$$D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres



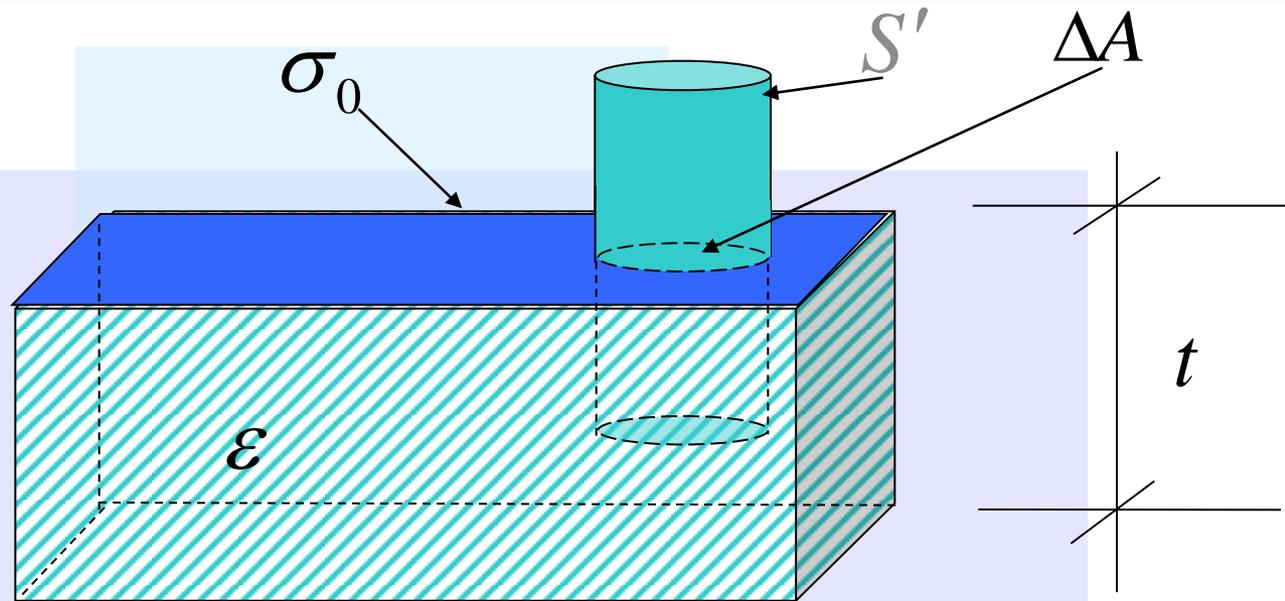
Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

$$\oiint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_T$$

$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oiint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$



$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2} \hat{k} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres



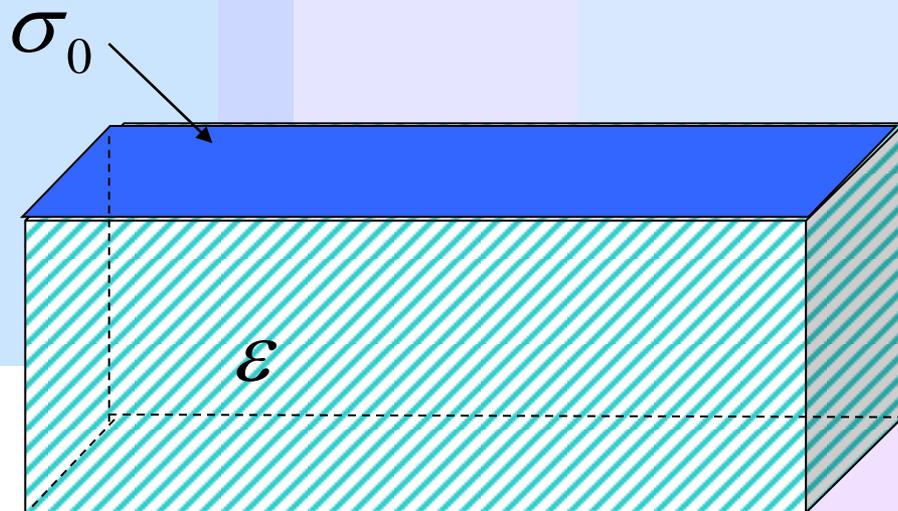
Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k}$$

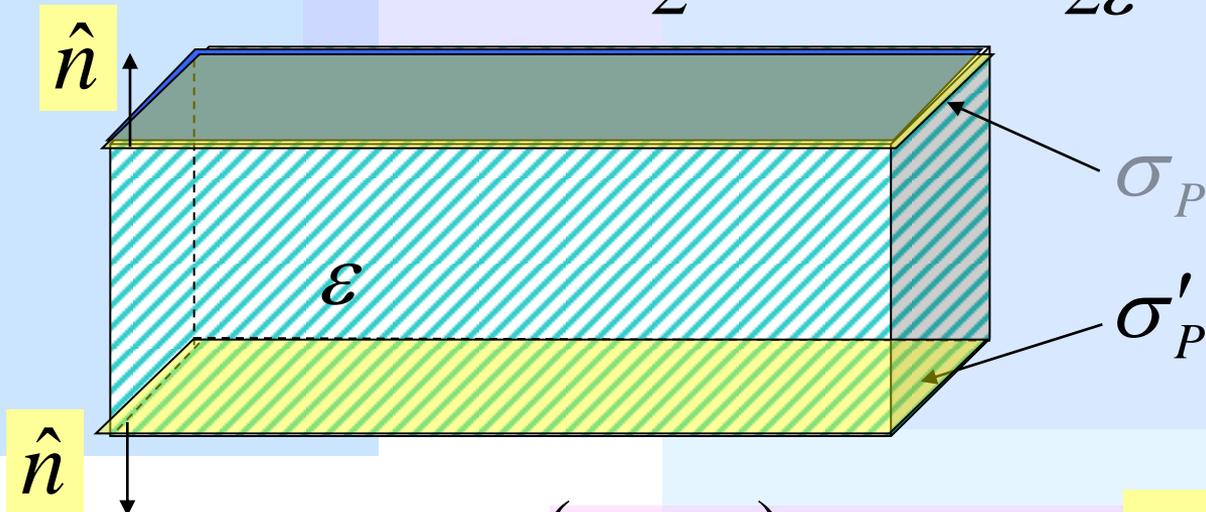




Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon} \hat{k} \Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k}$$



Hay cargas de polarización

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k} \cdot \hat{k} \Rightarrow \sigma_P = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0$$

$$\sigma'_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k} \cdot -\hat{k} \Rightarrow \sigma'_P = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0$$

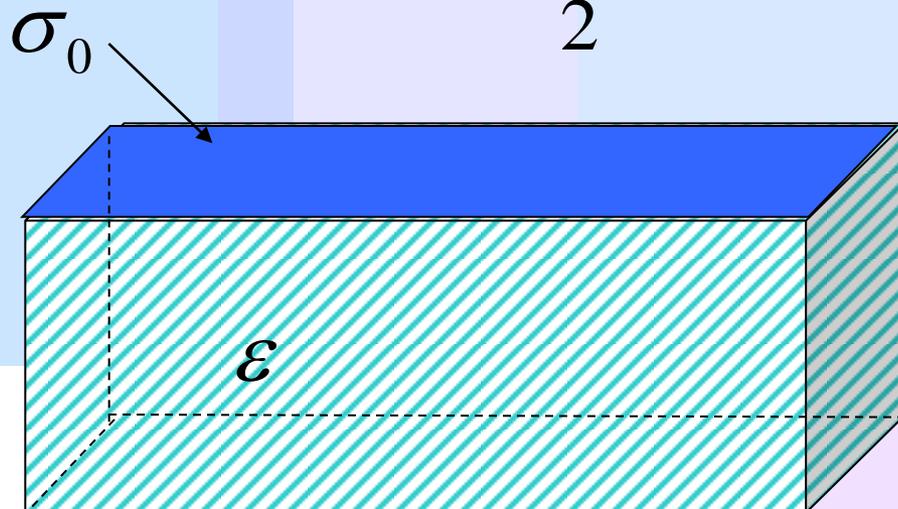


Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad \vec{P} = 0$$

Zona 1



$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon} \hat{k}$$

$$\vec{P} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon} \sigma_0 \hat{k}$$

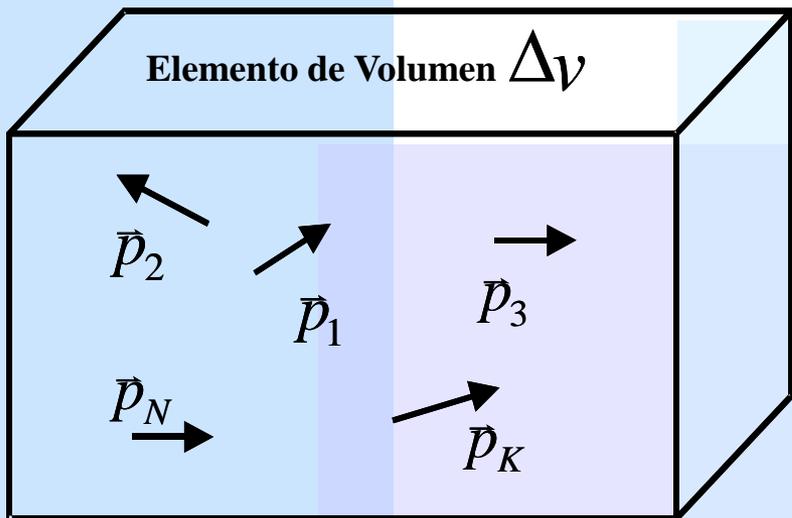
Zona 2

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k}, \quad \vec{P} = 0$$

Zona 3



Polarización de medios materiales



$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

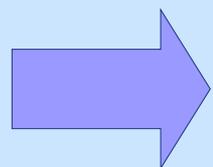
Se encuentra experimentalmente que la polarización en medios materiales varía con la intensidad del campo eléctrico aplicado $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material

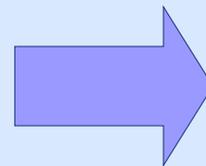


Constante dieléctrica

Teniamos que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pero $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$



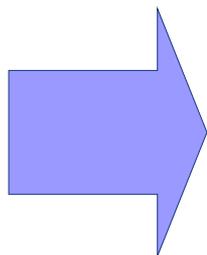
$$\vec{D} = \epsilon_0 (I + \chi_e) \vec{E}$$

Se define

$\epsilon_r = (I + \chi_e)$ Permeabilidad dieléctrica relativa

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

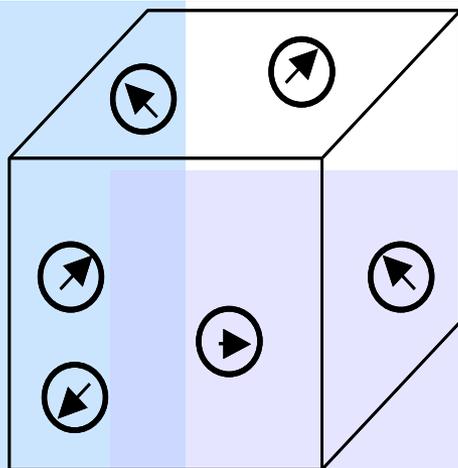
Constante dieléctrica del material



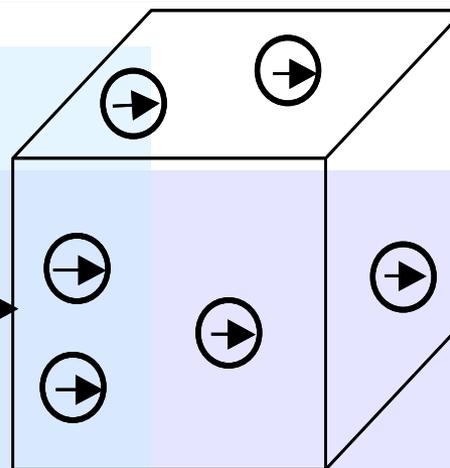
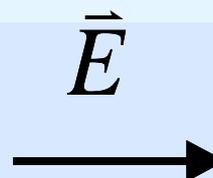
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



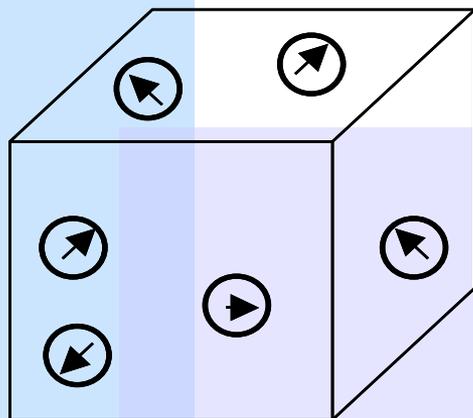
Situación con campo aplicado

i) Material lineal, isótropo y homogéneo

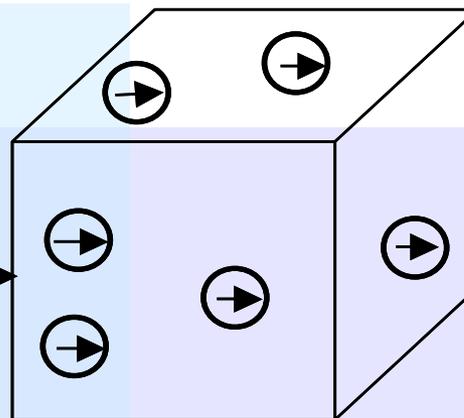
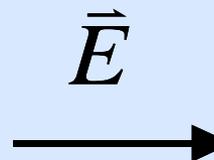
$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} son paralelos, ϵ es constante



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



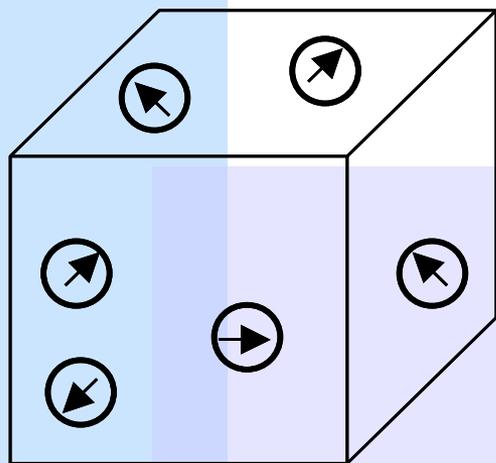
Situación con campo aplicado

ii) Material lineal, isótropo y no homogéneo

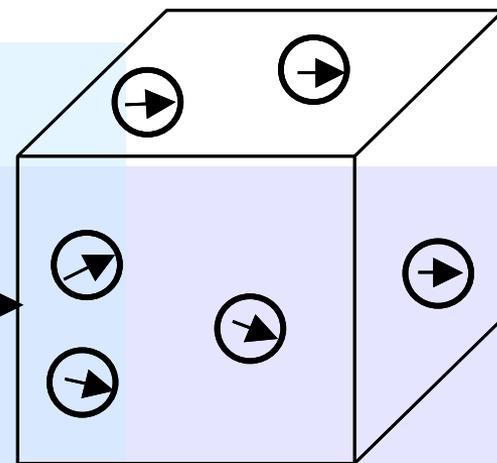
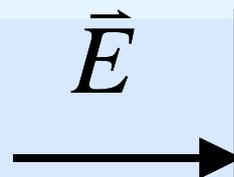
$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} son paralelos, $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$ no es constante



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



Situación con campo aplicado

iii) Material lineal, anisótropo y no homogéneo

$$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$$

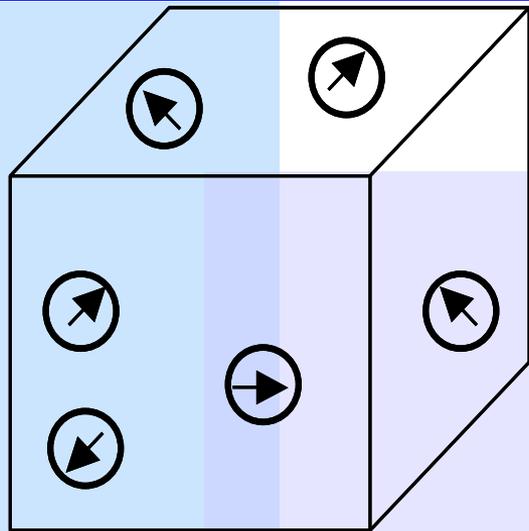
y \vec{D}, \vec{P} y \vec{E}

No son paralelos.

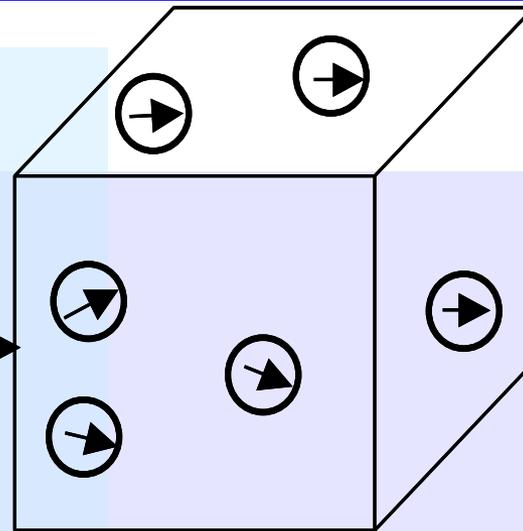
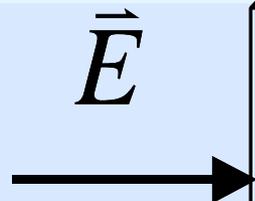
$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$



Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado



Situación con campo aplicado

iv) Material no lineal, anisótropo y no homogéneo

$\|\vec{P}\| \neq \alpha \|\vec{E}\|$ \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} No son paralelos, $\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$



Polarización de medios materiales

$$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\| \Rightarrow \text{Materiales lineales}$$

$$\vec{P} = \alpha(\vec{r})\vec{E} \Rightarrow \text{Materiales isótropos } \vec{P} // \vec{E}$$

Si α es constante \Rightarrow Material homogéneo

$$\text{En general tendremos } \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material



Constante dieléctrica

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, la expresión más general es

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$$

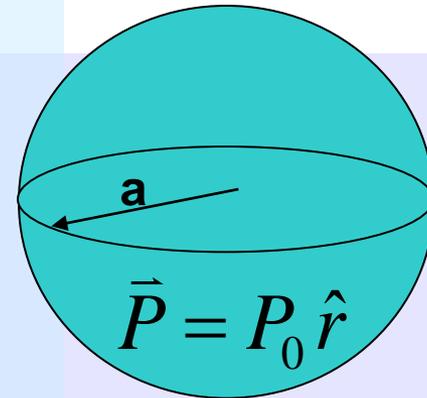


Ejemplo

Se tiene esfera dieléctrica con

$$\vec{P} = P_0 \hat{r}$$

Calcular $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ y cargas de polarización



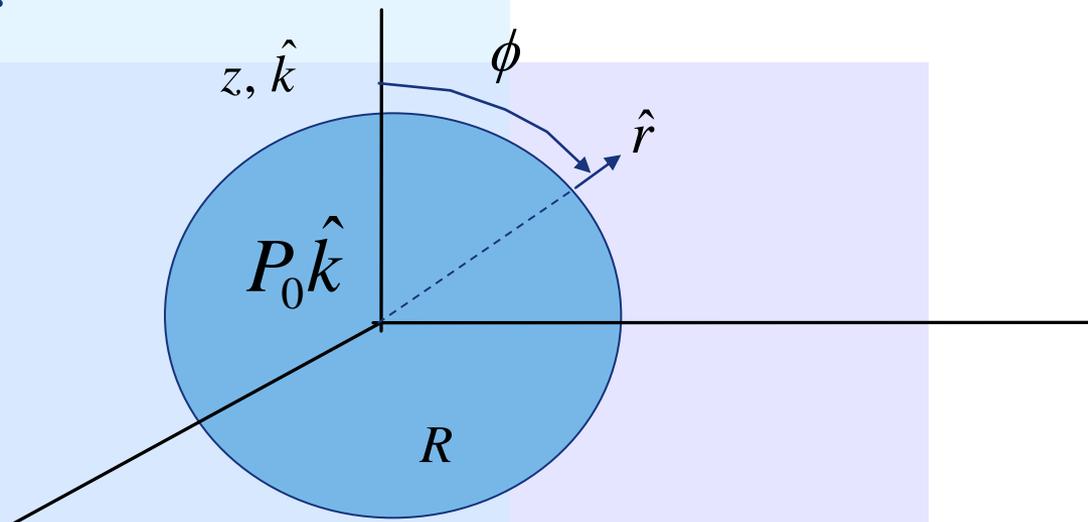


Ejemplo

Cargas de polarización.

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_0 \hat{k} \cdot \hat{r}$$

$$\sigma_P = P_0 \cos \phi$$



$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 P_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta P_\theta)}{\partial \theta}$$



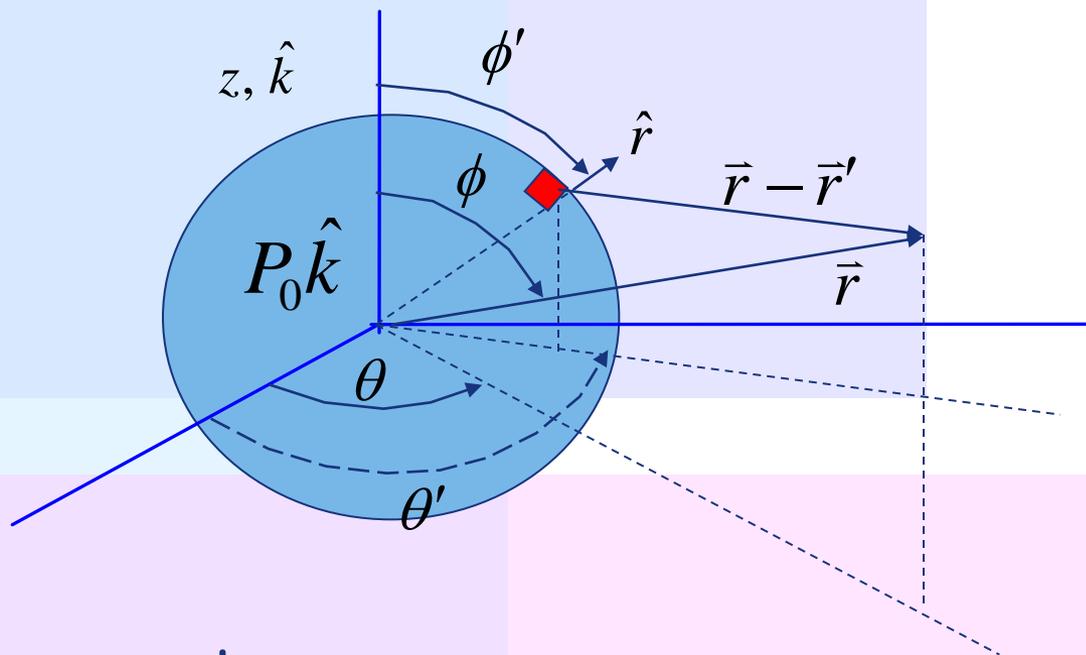
Ejemplo

Encontrar el potencial en todo el espacio,,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\sigma_P = P_0 \cos \phi'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_P R \sin \phi' d\theta' d\phi'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Luego hacemos la parte en volumen, sacamos la integral y OK.



Ejemplo: Camino alternativo

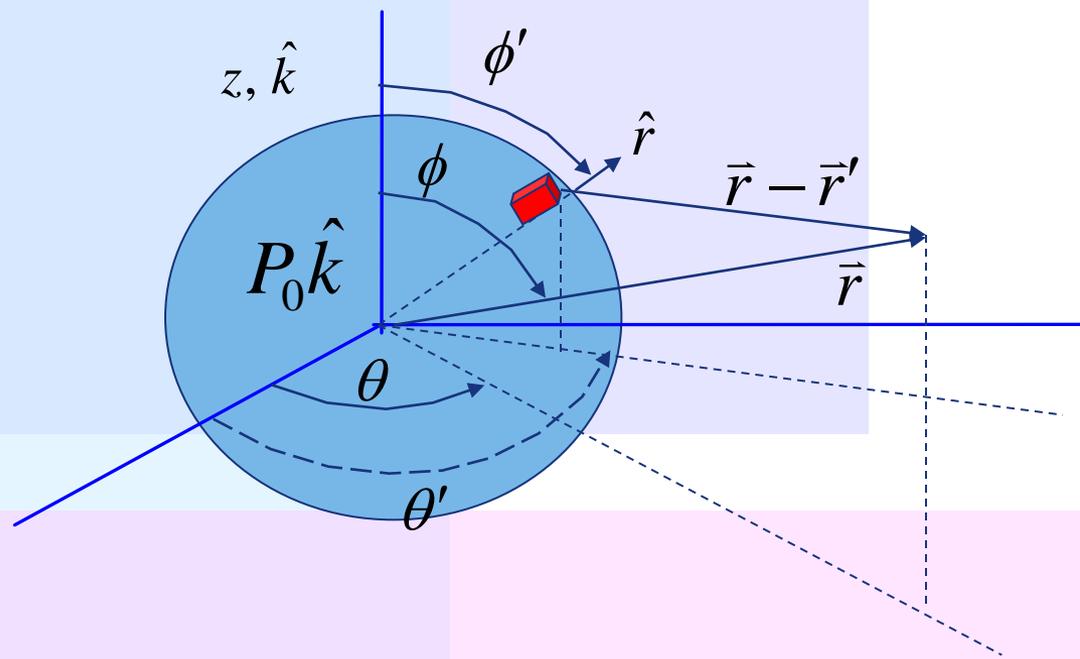
El potencial de un material con polarización \vec{P} es $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$

Como $\vec{P} = P_0 \hat{k}$ es constante podemos escribir

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \right)$$

Por otra parte, el campo de una distribución de carga en volumen es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$



Comparando estas dos expresiones, concluimos que la integral del lado derecho del potencial es exactamente el valor del campo que produce una carga uniforme de valor $\rho(\vec{r}) = 1$. Calculemos este campo:



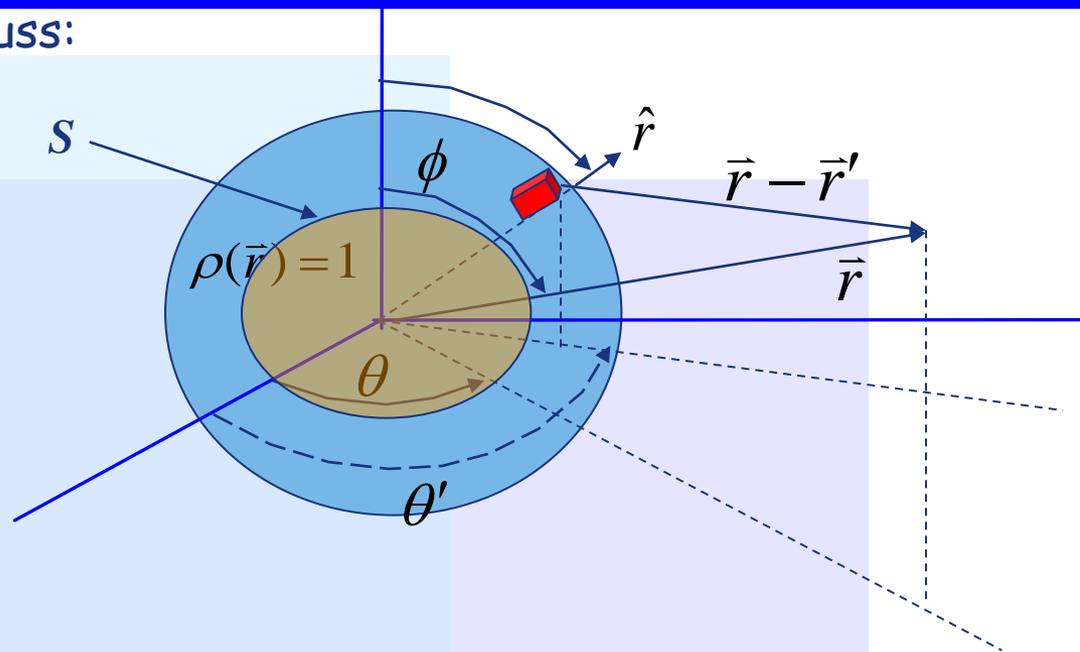
Ejemplo

Calculemos este campo usando Gauss:

$$\text{I) } r < R: \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \times 1$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{r}$$



$$\text{II) } r > R: \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \times 1$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$



Ejemplo

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \right)$$

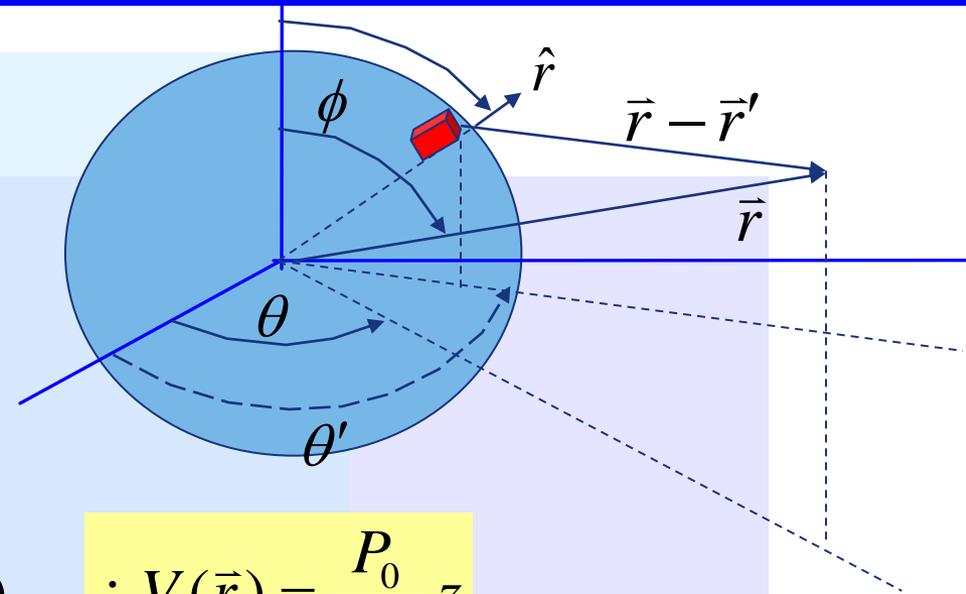
Luego el potencial vale:

I) $r < R$:

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = P_0 \hat{k} \bullet \frac{1}{3\epsilon_0} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0}{3\epsilon_0} z$$



II) $r > R$:

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{R^3}{3\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} \vec{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = P_0 \hat{k} \bullet \frac{R^3 (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z$$



Ejemplo

Campos eléctrico y de desplazamiento en todo el espacio.

I) $r < R$:

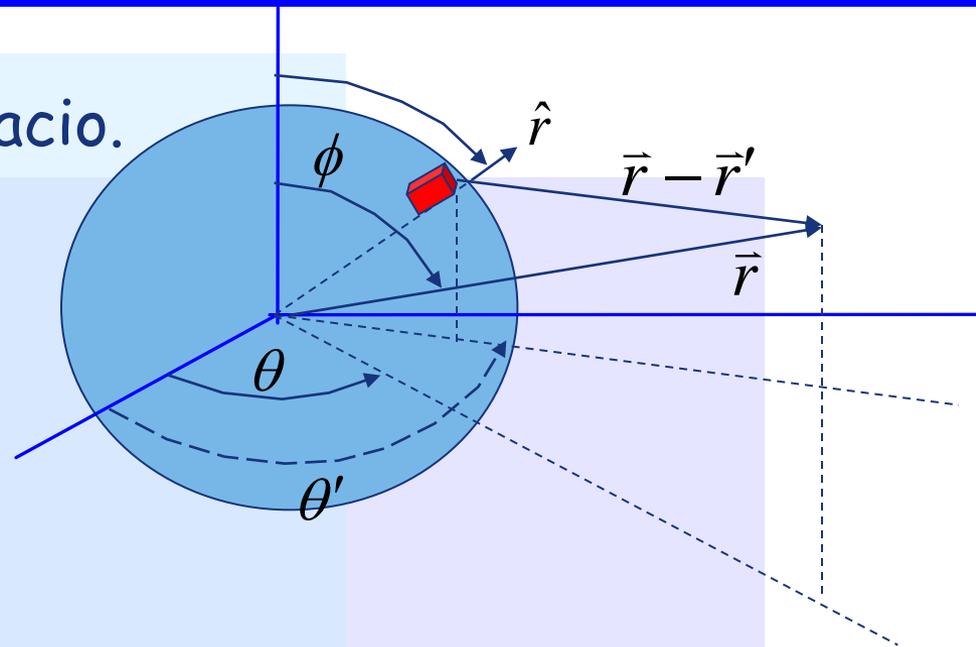
$$V(\vec{r}) = \frac{P_0}{3\epsilon_0} z$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0}{3\epsilon_0} z \right) \hat{k}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = -\epsilon_0 \frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{k} + P_0 \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{2P_0}{3\epsilon_0} \hat{k}$$

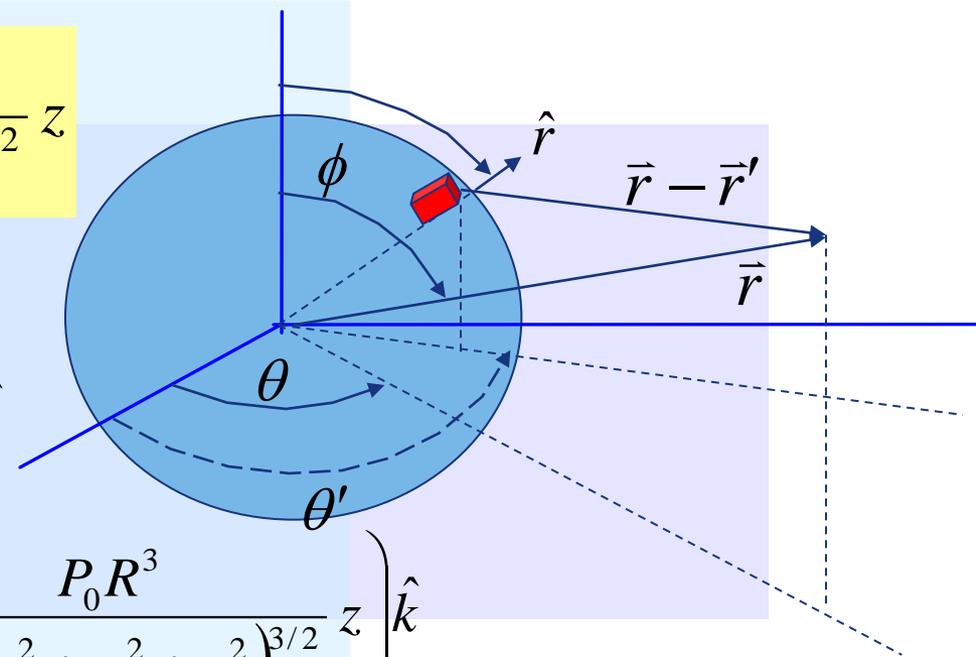




Ejemplo

II) $r > R$:

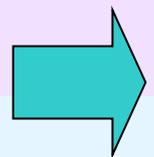
$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z$$



$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z \right) \hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z \right) \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} z \right) \hat{k}$$

Se obtiene finalmente

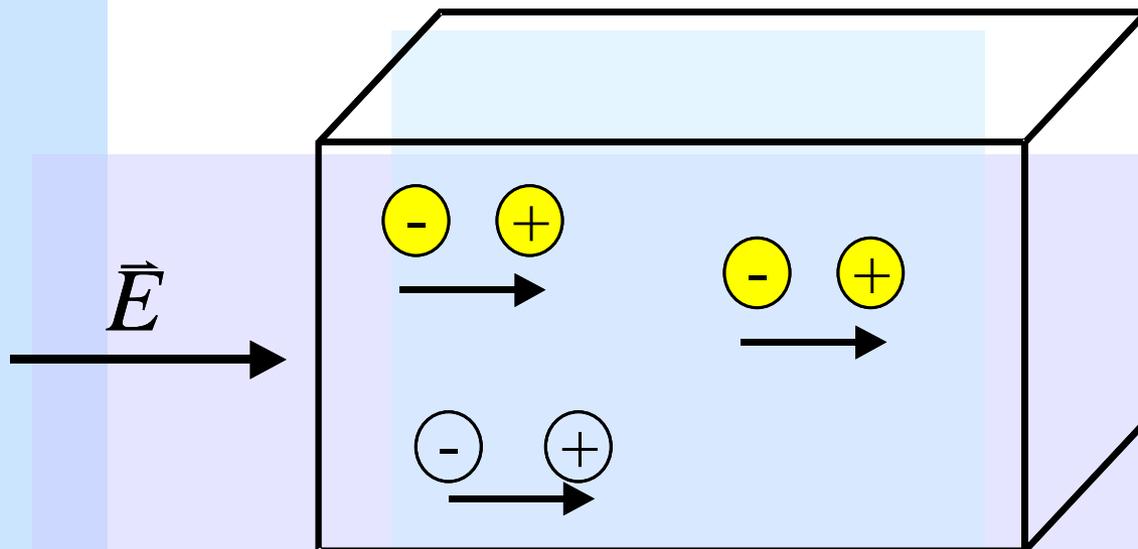
$$\vec{E} = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 r^5} (3z\vec{r} - r^2\hat{k})$$



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{P_0 R^3}{3r^5} (3z\vec{r} - r^2\hat{k})$$

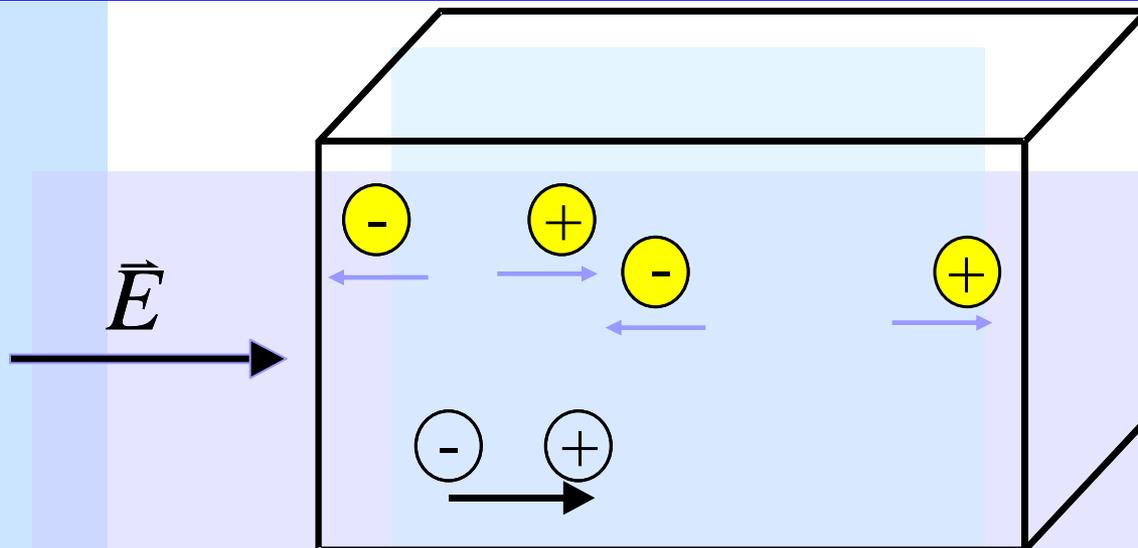


Ruptura dieléctrica





Ruptura dieléctrica



El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina "fuerza dieléctrica"



Constante dieléctrica y fuerza dieléctrica

Material	Constante Dieléctrica ϵ_r (adimensional)	Fuerza E (V/m)
Titanato de Bario	1200	7.5×10^6
Agua (mar)	80	
Agua destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5 - 10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Bakelita	5	20×10^6
Cuarzo (fusionado)	5	30×10^6
Goma (dura)	3.1	25×10^6
Madera	2.5 - 8.0	
Polyestireno	2.55	
Polypropyleno	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Petroleo	2.1	12×10^6
Aire (a 1 atmósfera)	1	3×10^6

(*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.