FI 2002 ELECTROMAGNETISMO Clase 3

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

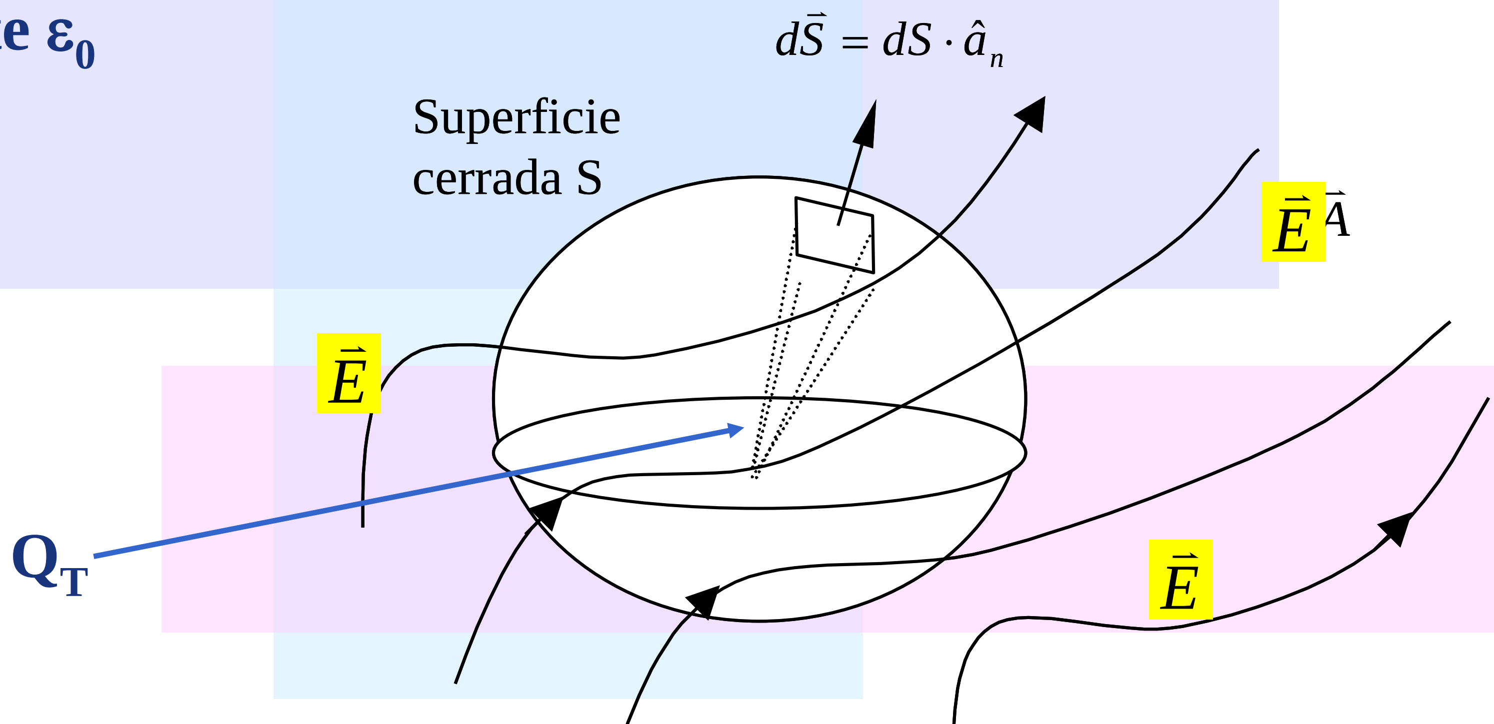
INDICE

- Ley de Gauss
- 1a Ecuación de Maxwell
- Trabajo de campo eléctrico,
- Definición del potencial,
- Relación entre campo eléctrico y potencial

Ley de Gauss

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ε_0



1ª Ecuación de Maxwell

Dado que $$Q_T = \iiint_V \rho dv$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Luego, por el teorema de la divergencia

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dv \Rightarrow \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Entonces: $$\boxed{\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Las fuentes de campo son las cargas eléctricas

1ª Ecuación de Maxwell

Se define Vector Desplazamiento

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{D} = \rho}$$

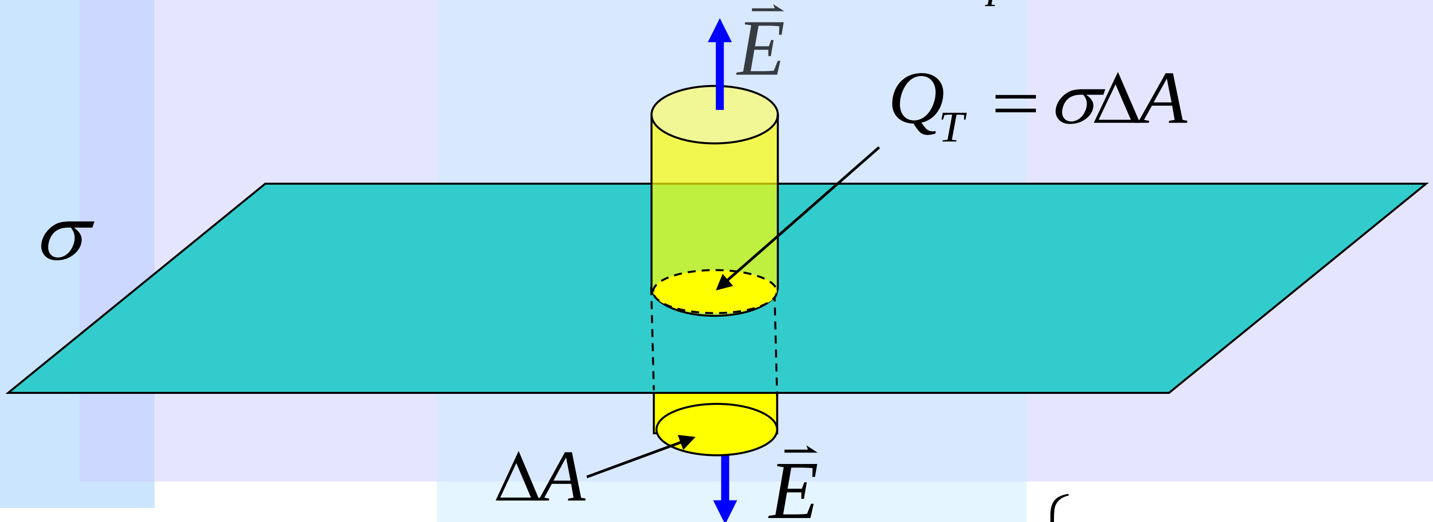
Esta ecuación es la 1ª Ecuación de Maxwell.

Comentarios sobre la Ley de Gauss

i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,
ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,
iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).

Comentarios sobre la Ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \Rightarrow \qquad \iint_{Manto} \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0, \qquad \iint_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{s} = 2\Delta A \left\| \vec{E} \right\|$$



$$2\Delta A \left\| \vec{E} \right\| = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left\| \vec{E} \right\| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \therefore \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < 0 \end{cases}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Caso dos planos: Cargas positivas y $\sigma_1 > \sigma_2$

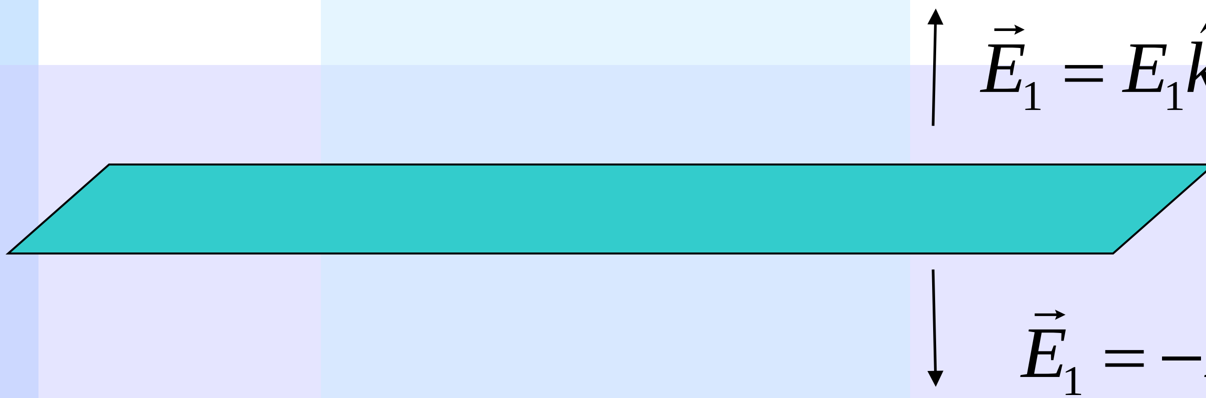
Hagámoslo primero por superposición

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Caso σ_1

$$\vec{E}_1 = E_1\hat{k} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

σ_1



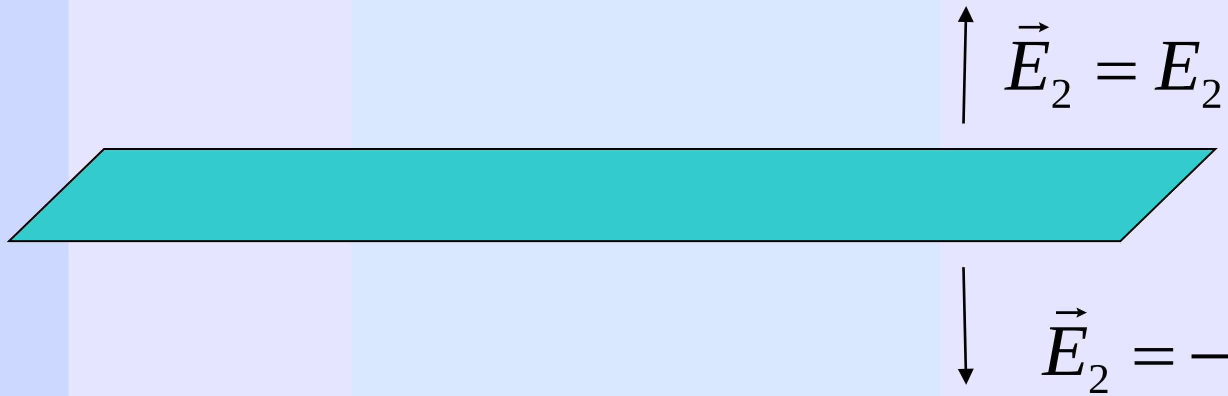
$$\vec{E}_1 = -E_1\hat{k}$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Caso σ_2

σ_2



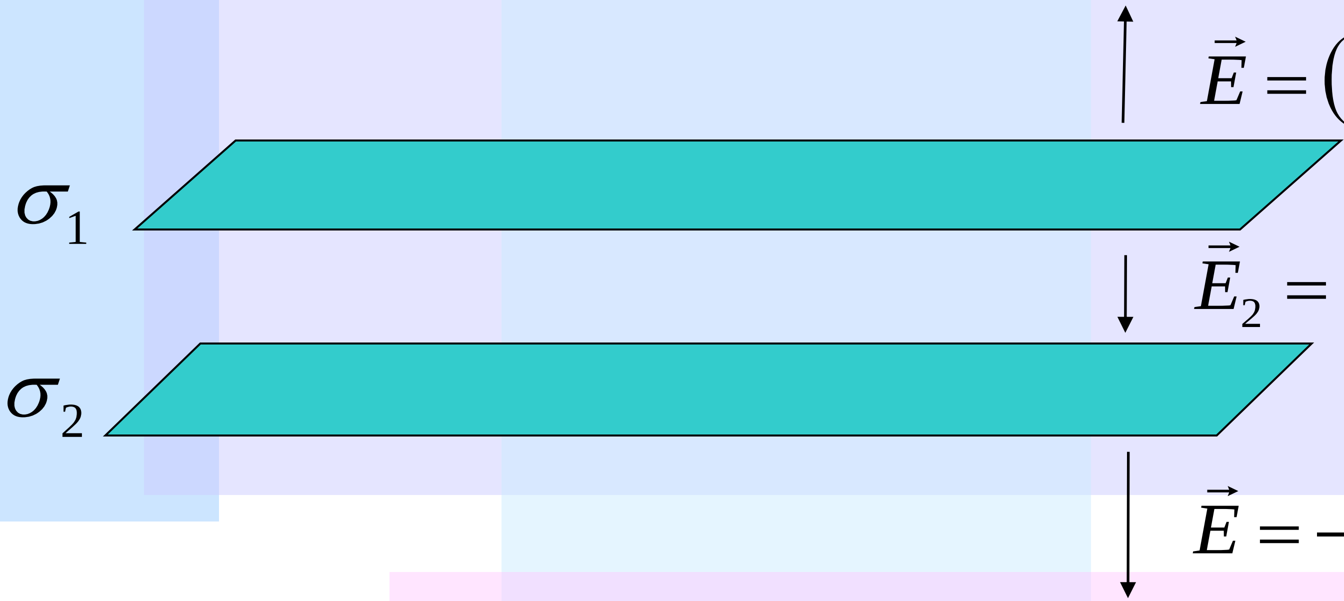
$$\vec{E}_2 = E_2\hat{k} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -E_2\hat{k}$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Aplicando superposición



$$\vec{E} = \left(E_1 + E_2\right)\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\left(E_1 - E_2\right)\hat{k}$$

$$\vec{E} = -\left(E_1 + E_2\right)\hat{k}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Cargas positivas y $\sigma_1 > \sigma_2$

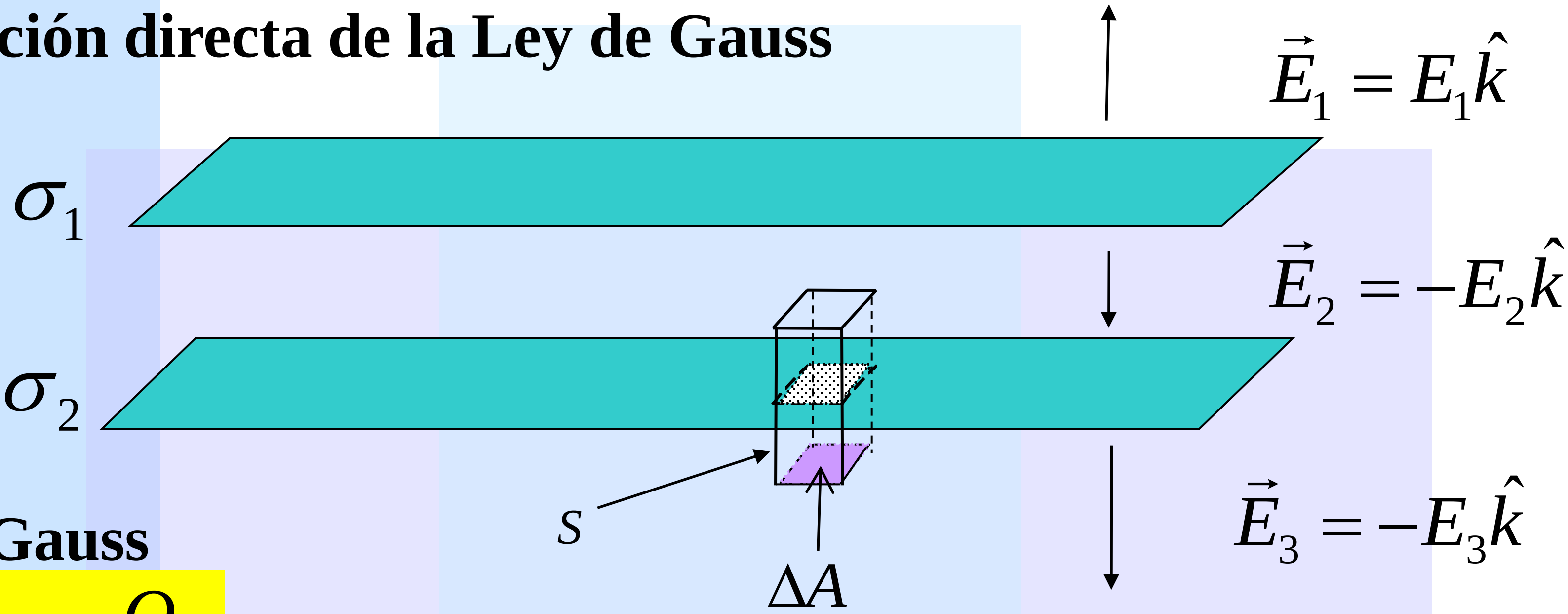
$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_3 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Aplicación directa de la Ley de Gauss



Usemos Gauss

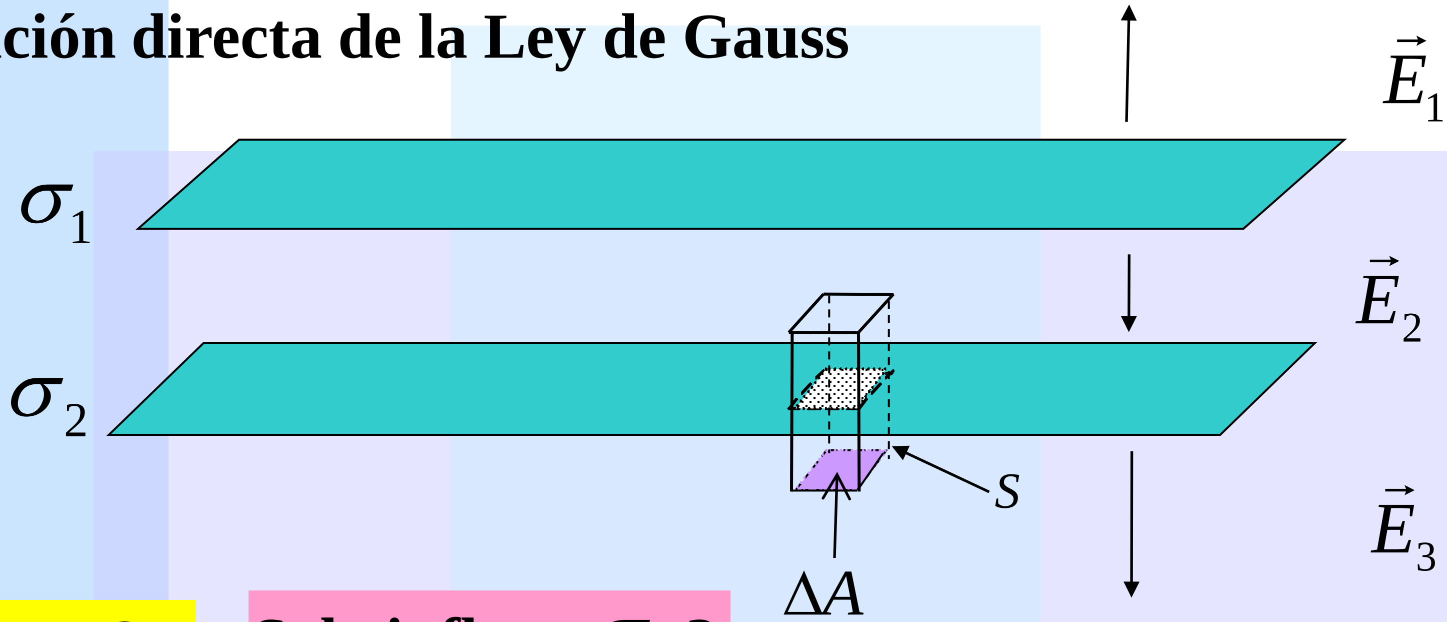
$$\oiint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_T &= \sigma_2 \Delta A \\ \oiint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} &= -E_2\Delta A + E_3\Delta A \end{aligned}\right\} -E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

OJO: Campos son diferentes!

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Aplicación directa de la Ley de Gauss



$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Solo influye σ_2 ?

$$Q_T = \sigma_2 \Delta A$$

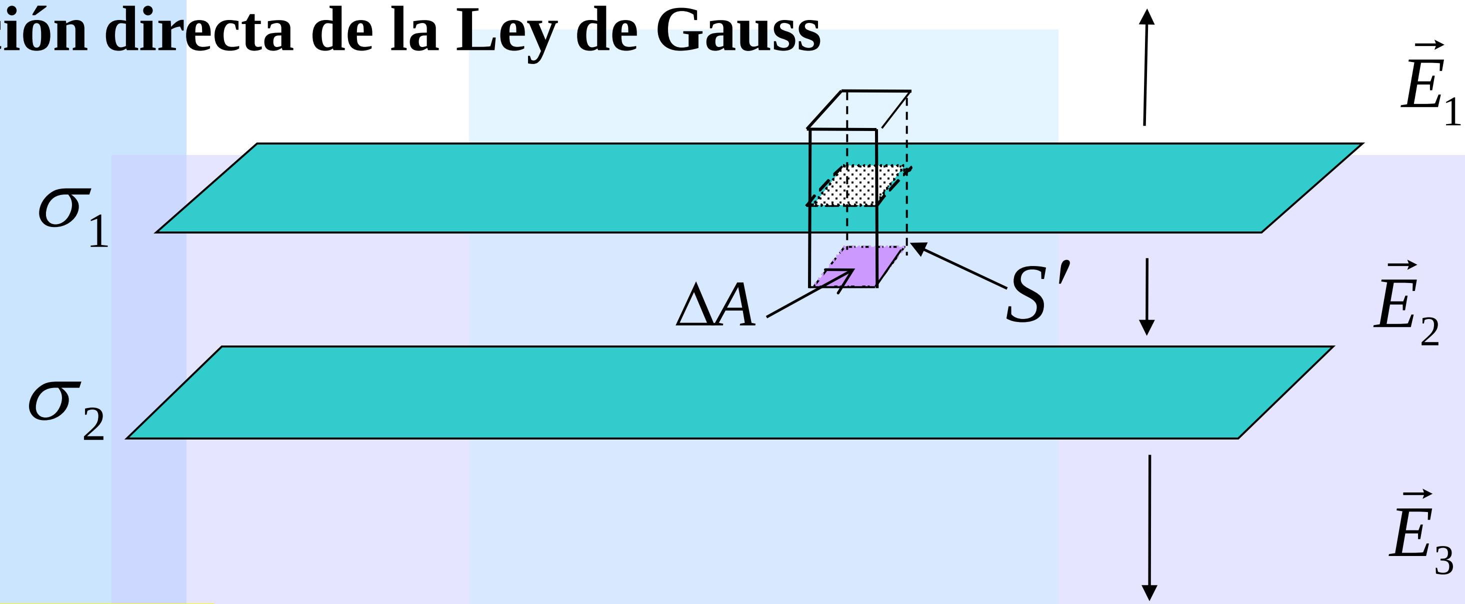
$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A$$

$$-E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

OJO: Campos son diferentes!

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Aplicación directa de la Ley de Gauss

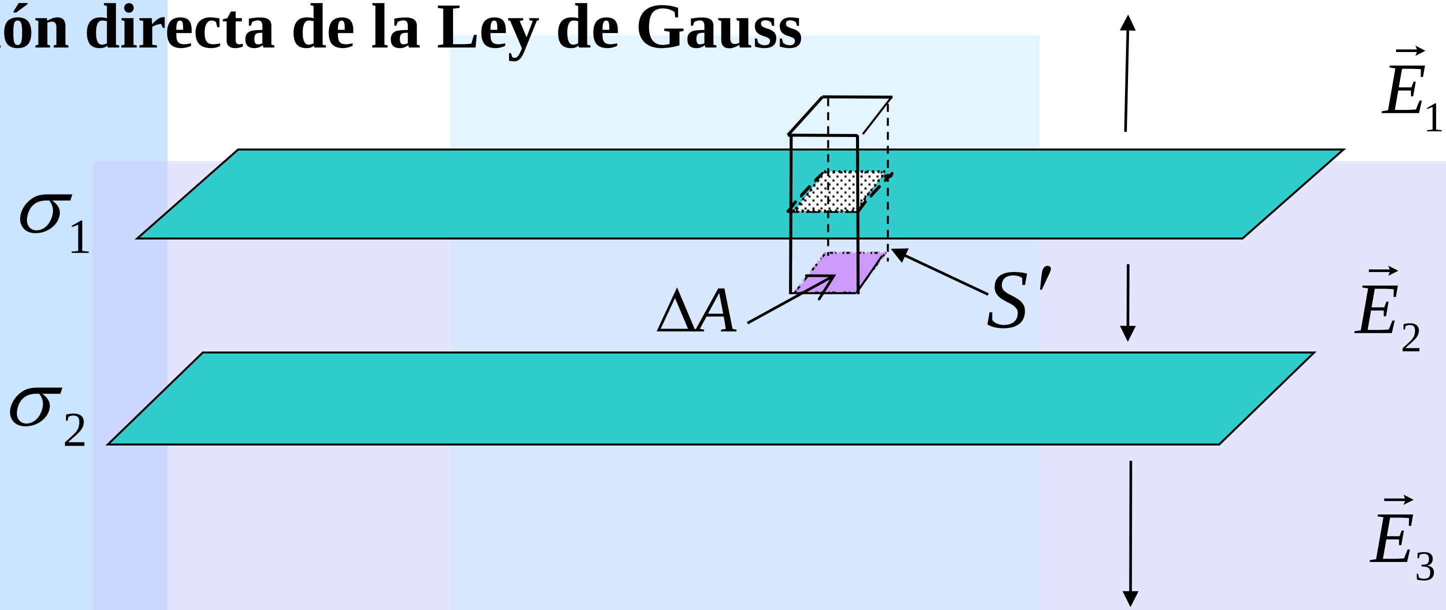


$$\oiint_{S'} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_T &= \sigma_1 \Delta A \\ \oiint_{S'} \vec{E} \bullet d\vec{s} &= E_1 \Delta A + E_2 \Delta A \end{aligned}\right\} \quad E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

Aplicación directa de la Ley de Gauss



Tenemos

$$-E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Pero $E_1 = E_3 \Rightarrow$

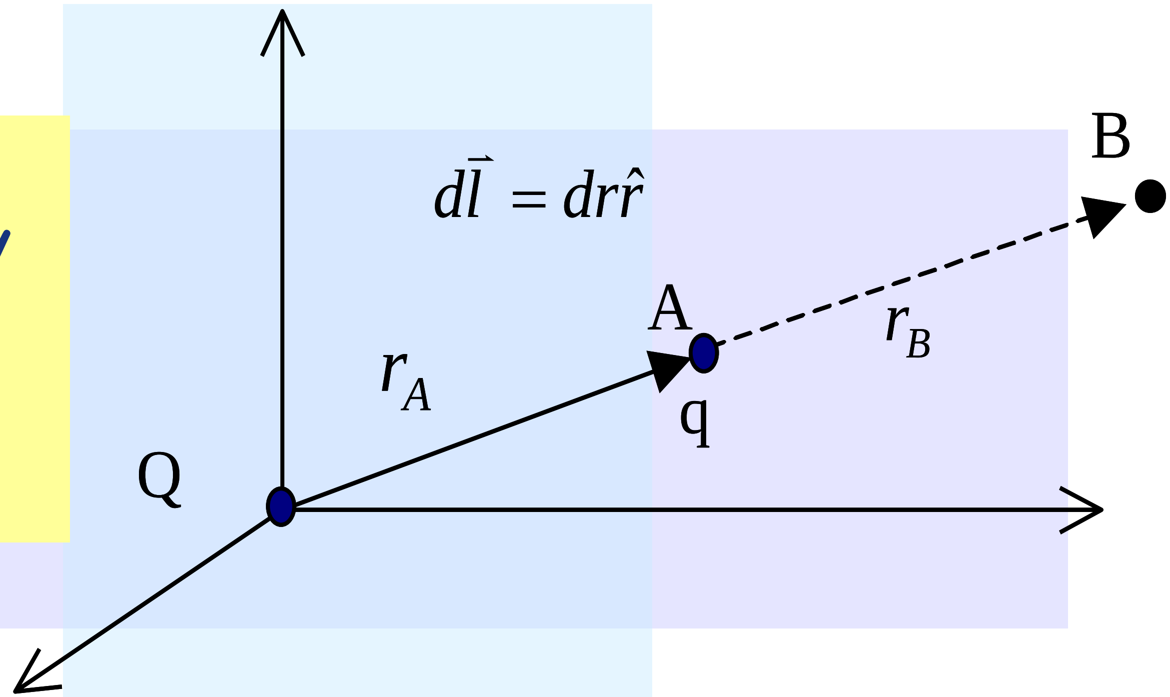
$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Definición de potencial

Motivación

Calcular campo E producido por Q y el trabajo para llevar una carga q desde A a B



Sol^n

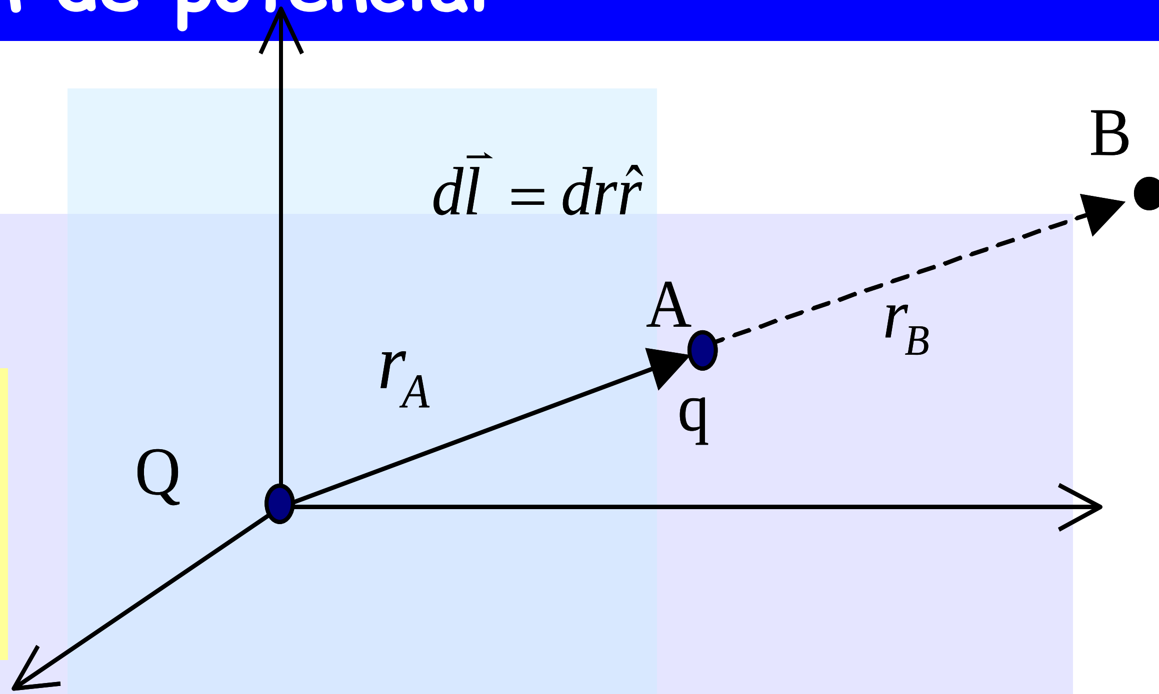
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l}$$

$$W = \int_A^B dW = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Definición de potencial

Ejemplo 10.



$$W = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

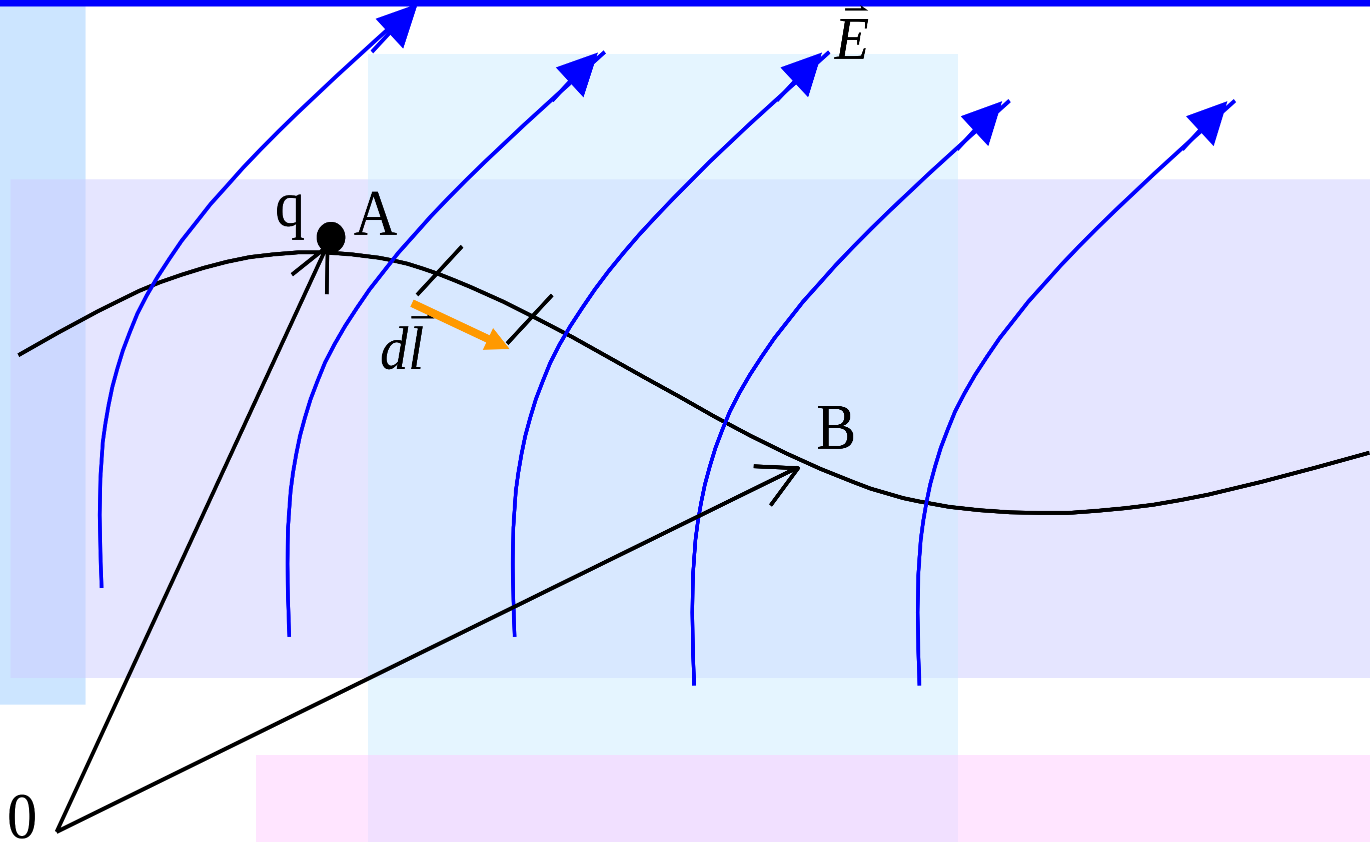
$$W = -q\int_{r_A}^{r_B} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet \hat{r} = -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$W = -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Dado que $r_A < r_B$:

- Si q y Q del mismo signo W negativo
- Otro caso W positivo

Trabajo de un Campo Eléctrico

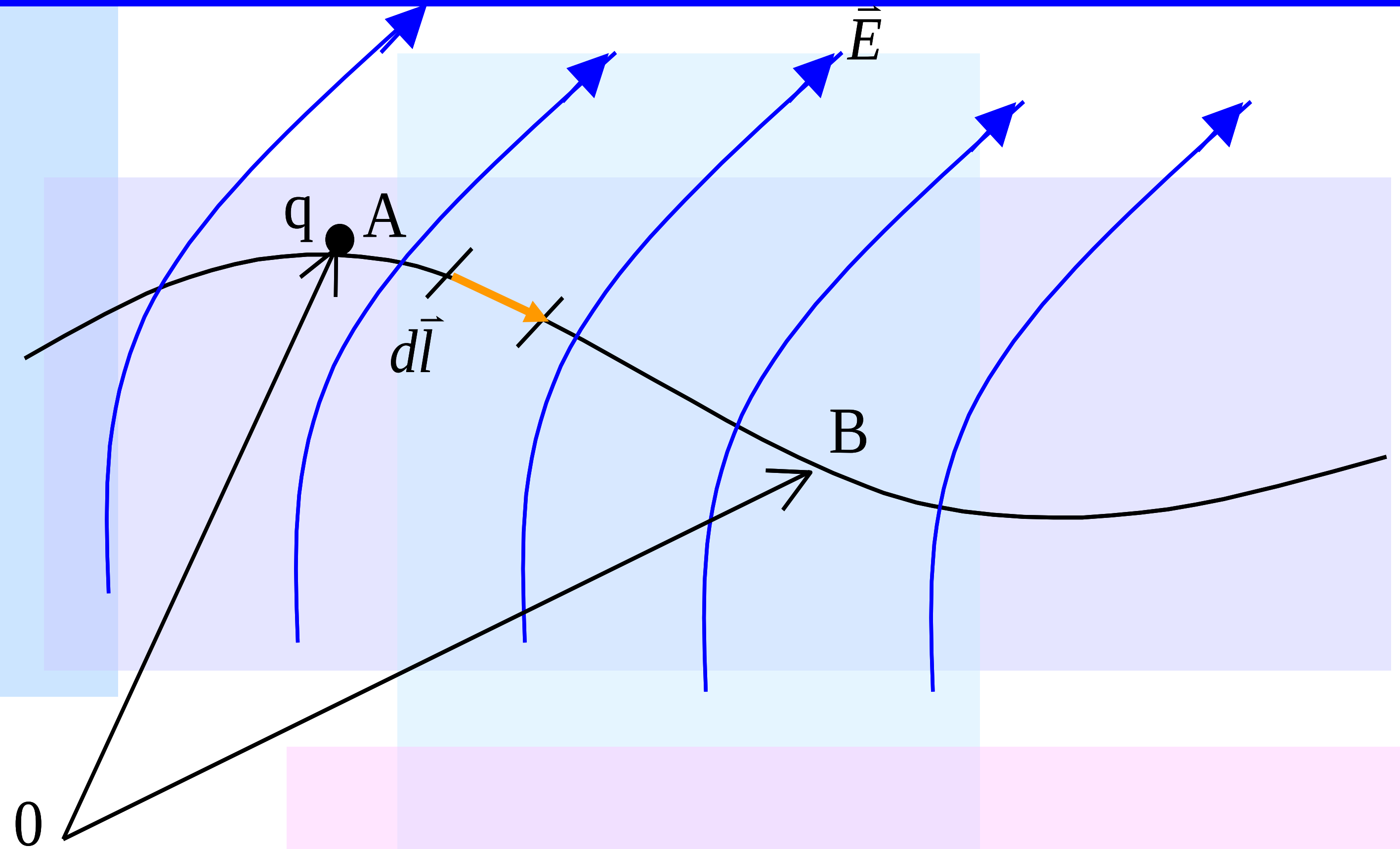


$$dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l}$$

Si $W > 0$ Trabajo lo realiza agente externo

Si $W < 0$ Trabajo lo realiza campo

Trabajo de un Campo Eléctrico

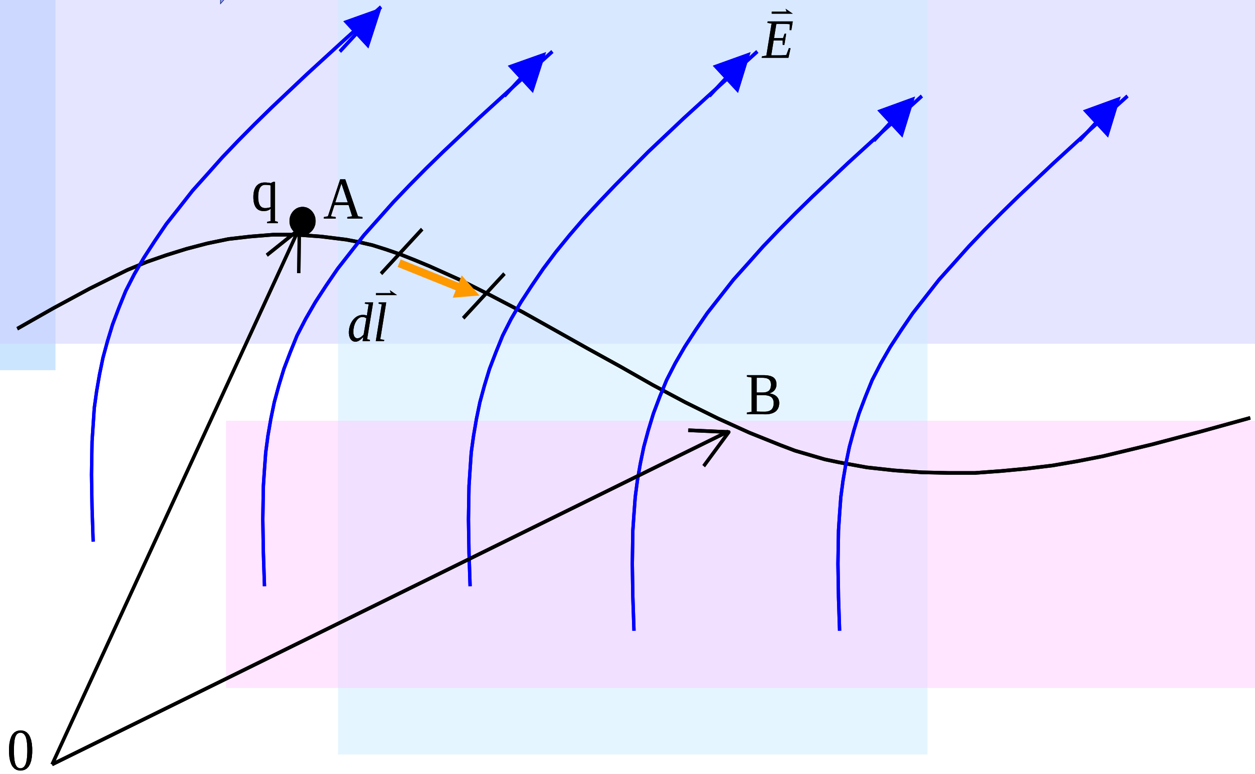


$$dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad W = \int_A^B dW = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

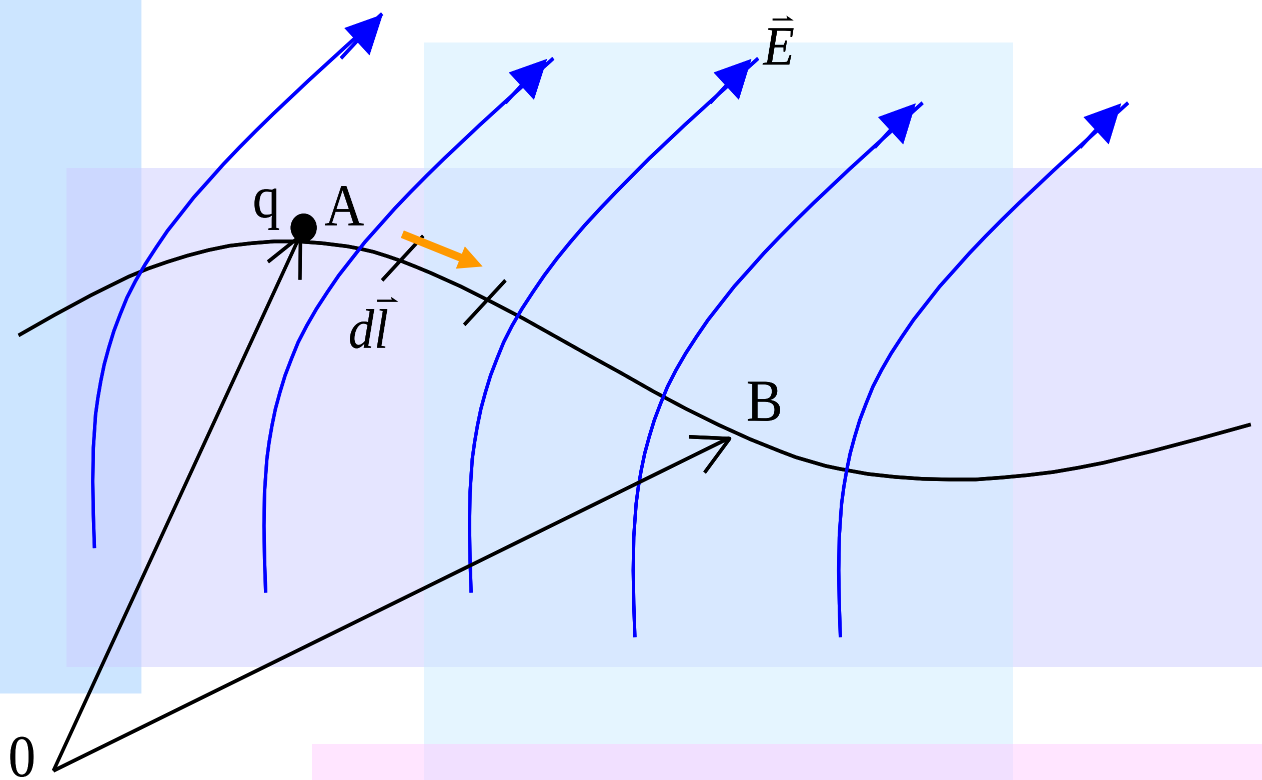
Definición de potencial

Si W>0 → Trabajo lo realiza agente externo

Si W< 0 → Trabajo lo realiza campo eléctrico



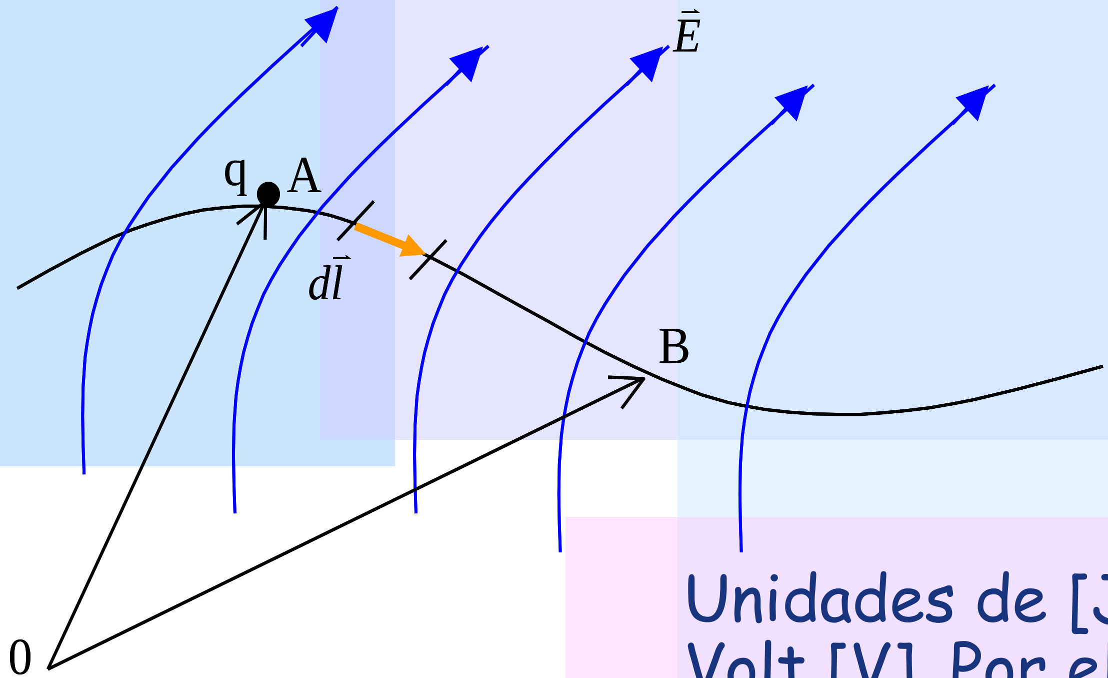
Definición de potencial



Se define la diferencia de potencial entre los puntos B y A, denominada V_{BA}, como el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga para ir desde A a B.

Definición de potencial

Se define la diferencia de potencial entre los puntos B y A, denominada V_{BA}, como el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga.



$$V_{BA} = \frac{W}{q} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

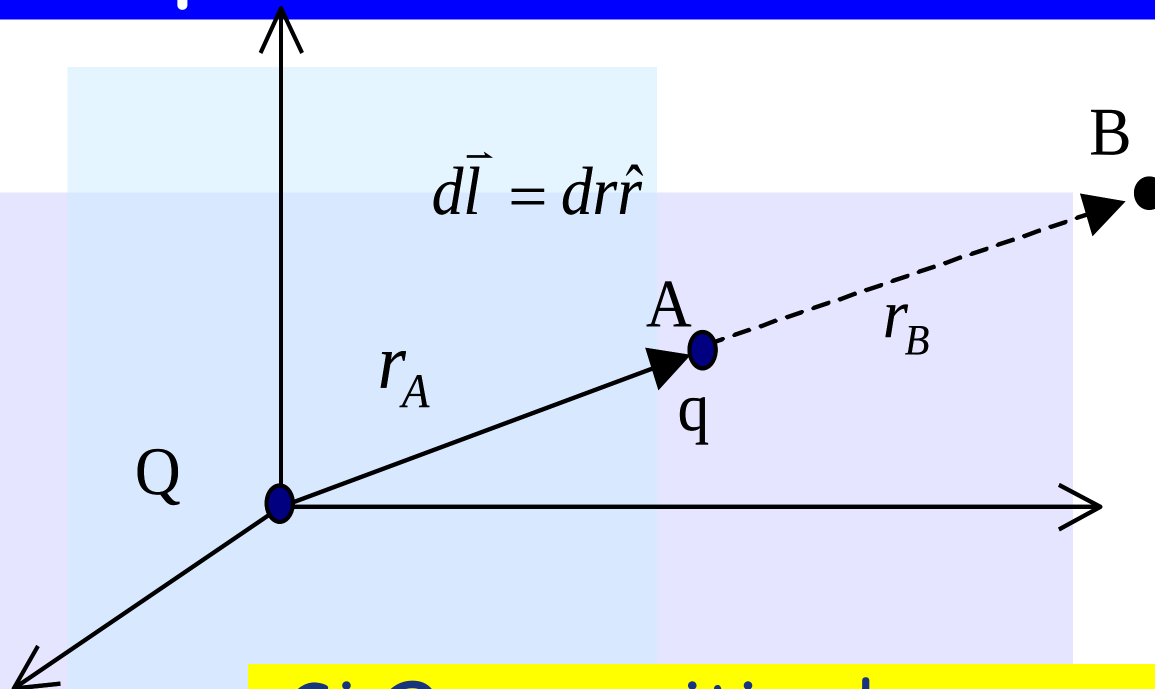
Unidades de [J/C], lo cual se denomina Volt [V]. Por ello es común expresar el campo eléctrico en [V/m]

Definición de potencial

Ejemplo 10.

$$W = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$W = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$



$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

- Si Q es positiva la diferencia de potencial entre B y A es negativa
- Campo va desde mayor potencial a menor potencial

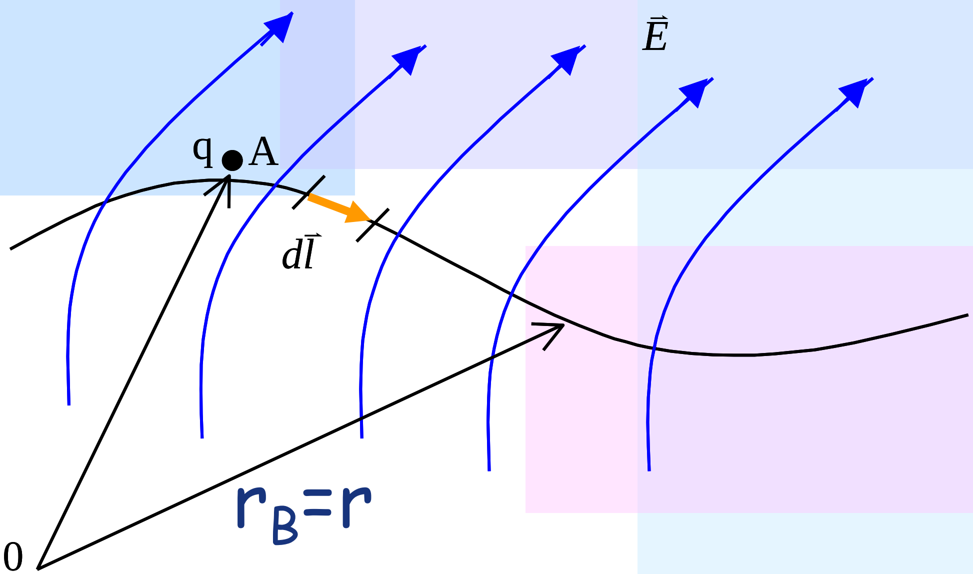
Definición de Potencial

Notar que la expresión para la diferencia de potencial V_{BA} **no** depende de q

$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Si hacemos $r_B = r$ variable, podemos definir una función potencial en todo el espacio.

$$V(\vec{r}) - V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right]$$



Trabajo por unidad de carga para ir desde r_A a r

Definición de potencial

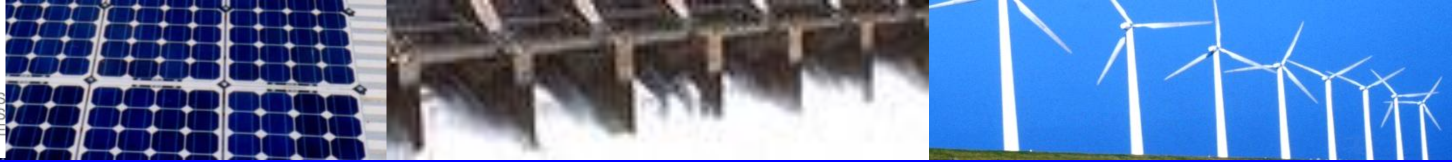
Haciendo tender $r_A \to \infty$ y definiendo V(∞)=0, se tiene

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right] \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|}$$

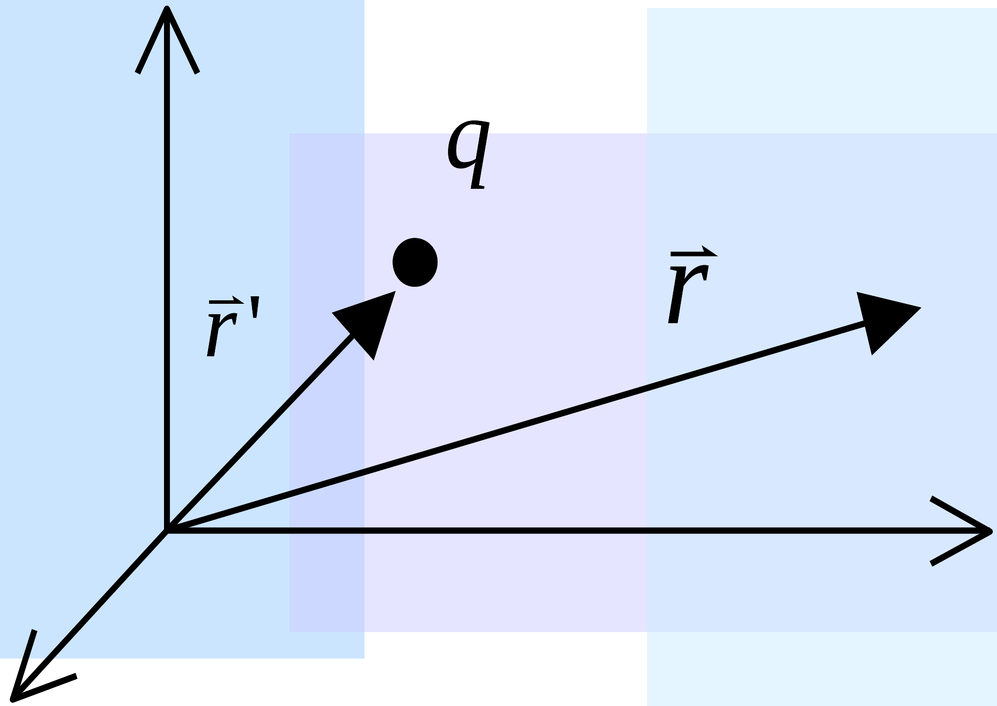
Trabajo por unidad de carga para venir desde el infinito a *r*

Función potencial eléctrico es un campo escalar

Función potencial eléctrico requiere de una referencia para su definición V(*r*= r_A) = 0



Definición de potencial



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

En un sistema de referencia cualquiera

V es una función lineal con la carga, luego cumple con superposición

Definición de potencial

Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_1 \|} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_2 \|} + \ldots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_n \|}$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_k \|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|}$$



Relaciones entre campo eléctrico y potencial

$$V_{BA} = -\int_{A}^{B} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Tomando A como referencia y haciendo B variable

$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

Luego

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$