fcfm Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

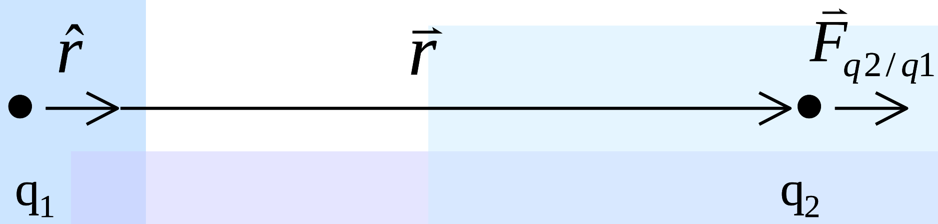
FI 2002 ELECTROMAGNETISMO
Clase 2

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

Temas

- Campo Eléctrico
- Distribuciones continuas de carga
- Ley de Gauss

Campo Eléctrico



Fuerza que siente q_2 debido a q_1

$$\vec{F}_{q2/q1} = q_2 \cdot \frac{q_1 \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2} = q_2 \cdot \frac{q_1 (\vec{r} / |\vec{r}|)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2} = q_2 \cdot \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

Campo Eléctrico de q_1 como

$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}q_2 / q_1 = q_2 \vec{E}$$

Campo Eléctrico

Podemos saber si hay un campo eléctrico poniendo una carga de prueba.

- **Si la carga no se mueve no hay Campo**

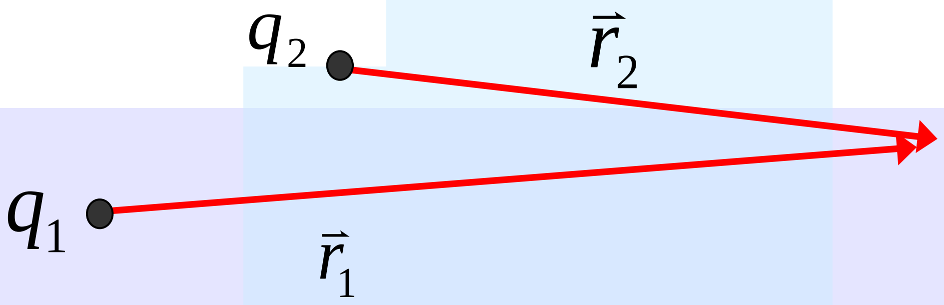
$$\vec{E} = 0$$

- **Si la carga se mueve, entonces hay un campo y lo podemos medir como:**

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

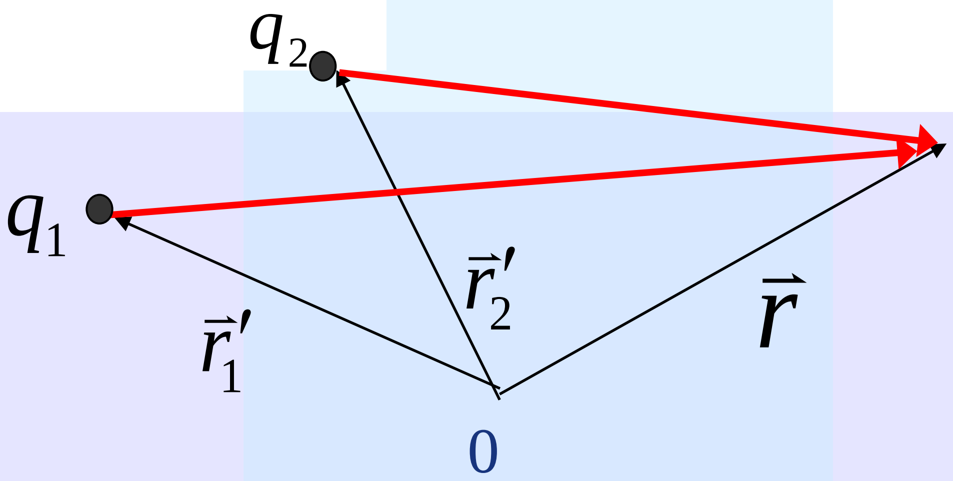
$\vec{F}$

Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}_1}{4\pi\,\varepsilon_0 \left\|\vec{r}_1\right\|^3} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{4\pi\,\varepsilon_0 \left\|\vec{r}_2\right\|^3}$$

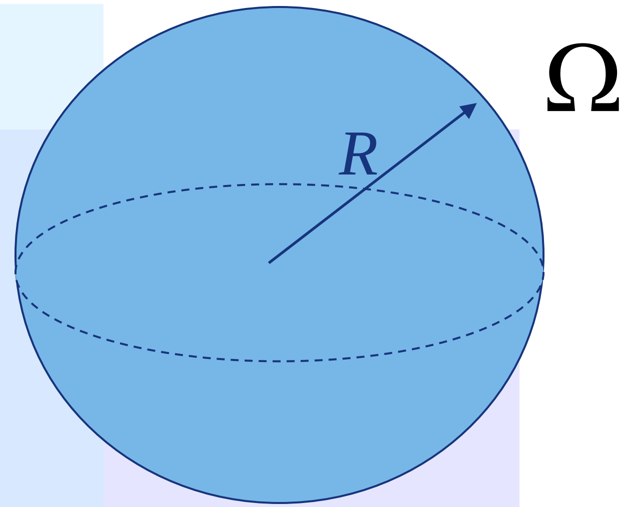
Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas



$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k')}{4\pi \varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_k' \|^3}$$

Distribuciones Continuas de Carga

Carga Total distribuida en forma uniforme en la esfera de radio R es Q



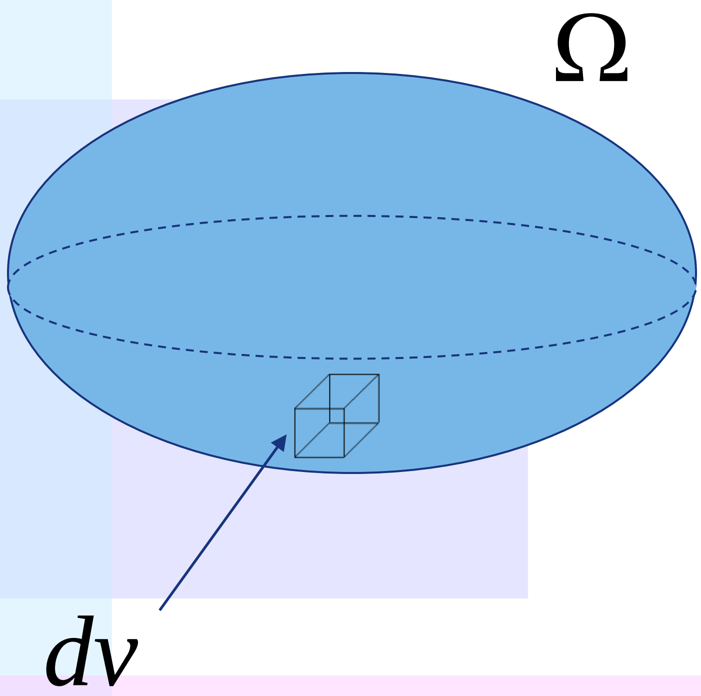
Podemos definir una densidad de carga por unidad de volumen ρ

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} [C/m^3]$$

Distribuciones Continuas de Carga

En general se define la densidad de carga por unidad de volumen *ρ(r)*

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad [C/m^3]$$



Luego si conocemos la densidad de carga *ρ*, la carga contenida en un elemento infinitesimal de volumen es

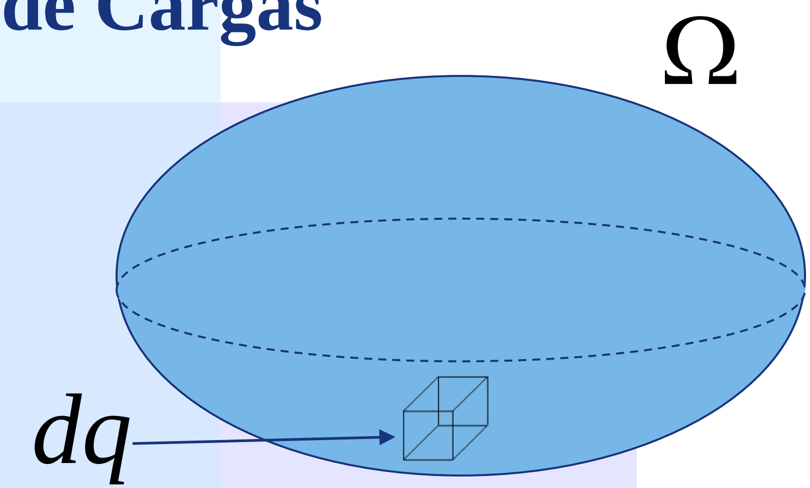
$$dq = \rho(\vec{r})dv \quad [C]$$

Notar que *ρ(r) es un campo escalar*

Distribuciones Continuas de Carga

Campo Eléctrico de un Sistema de Cargas

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k(\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_k \|^3}$$



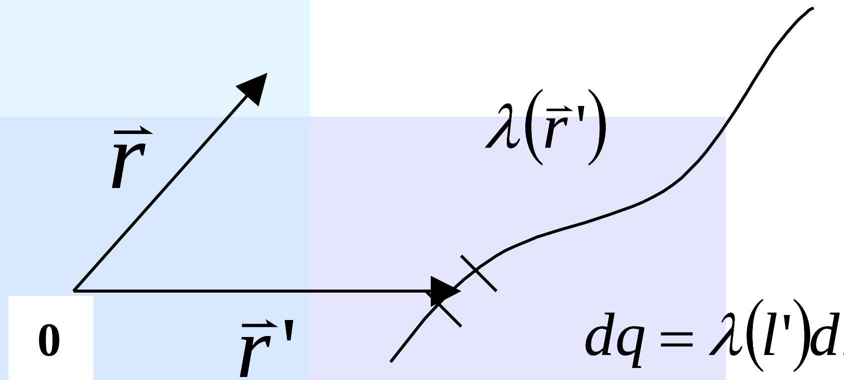
Para distribuciones contínuas de carga $\Sigma \rightarrow \int \; y \; q \rightarrow dq$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} dq \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} \rho(\vec{r}\,') dv$$

Distribuciones Continuas de Carga

Para distribuciones lineales de carga usamos densidades lineales

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} [C/m]$$



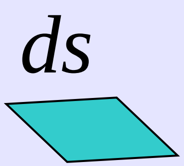
$$dq = \lambda(l')dl'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} dq' \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} \lambda(\vec{r}\,') dl'$$

Distribuciones Continuas de Carga

Para distribuciones superficiales de carga usamos

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} [C/m^2]$$

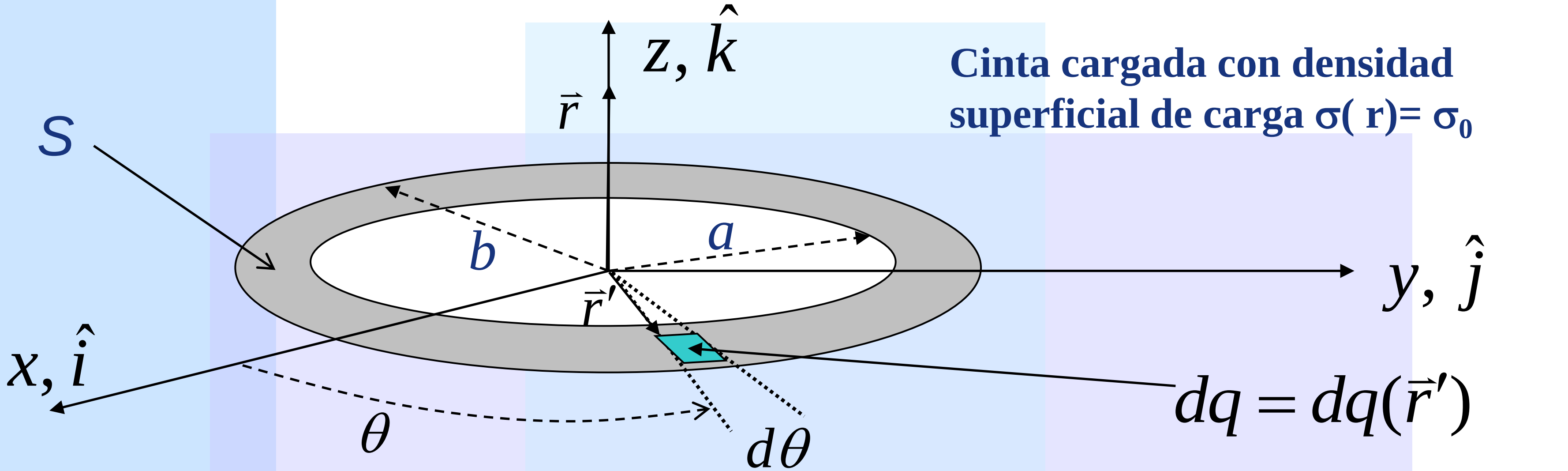


$$dq = \sigma ds$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} dq' \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3} \sigma(\vec{r}\,') ds'$$

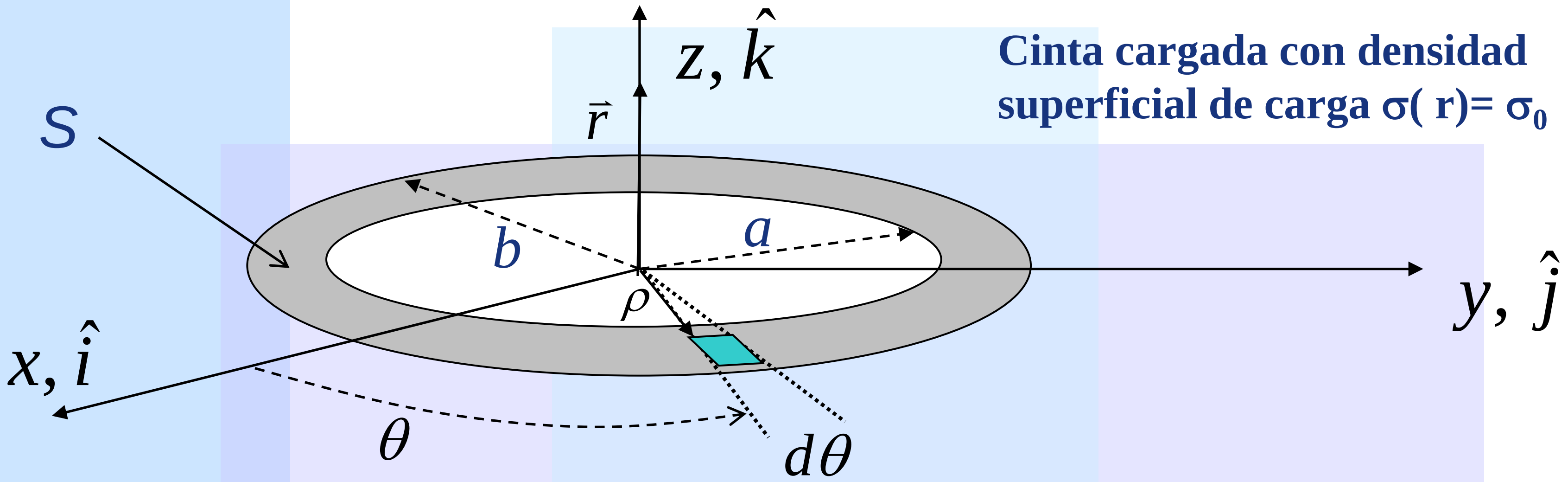
Ejemplo: Campo de cinta cargada en eje Z

Cinta cargada con densidad superficial de carga $\sigma(r) = \sigma_0$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{\left\|\vec{r} - \vec{r}'\right\|^3}$$

Ejemplo



Cinta cargada con densidad superficial de carga $\sigma(r) = \sigma_0$

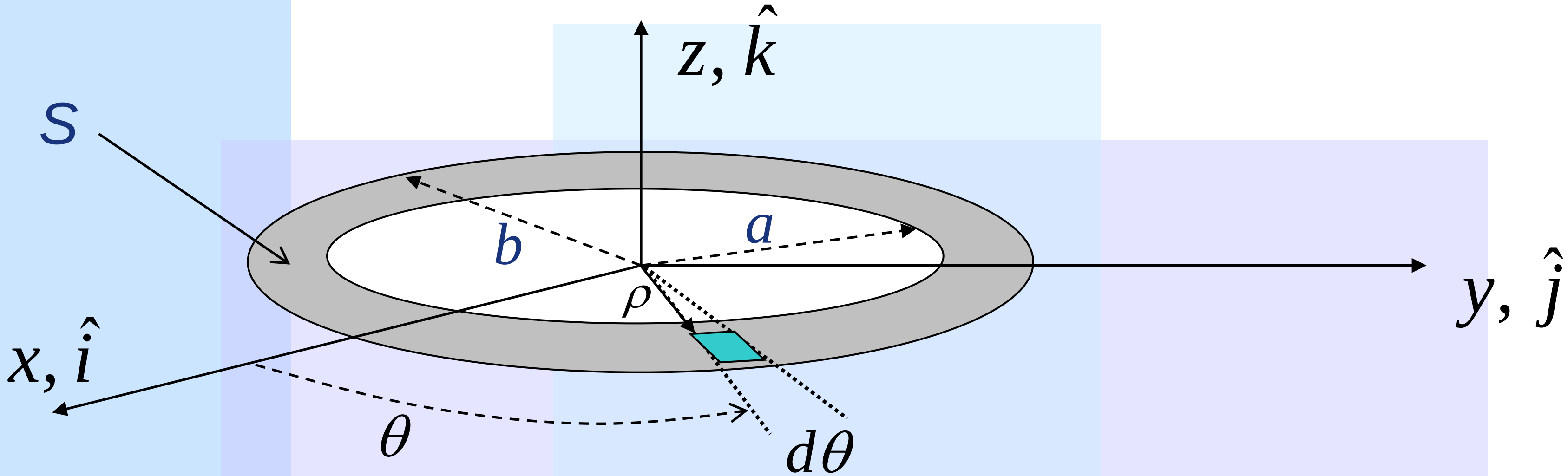
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \vec{r}\,' = \rho\cos\theta\,\hat{i} + \rho\sin\theta\,\hat{j}$$

$$dq = \sigma\, ds = \sigma_0 \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_0 \rho\, d\theta\, d\rho(-\rho\cos\theta\,\hat{i} - \rho\sin\theta\,\hat{j} + z\hat{k})}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Ejemplo



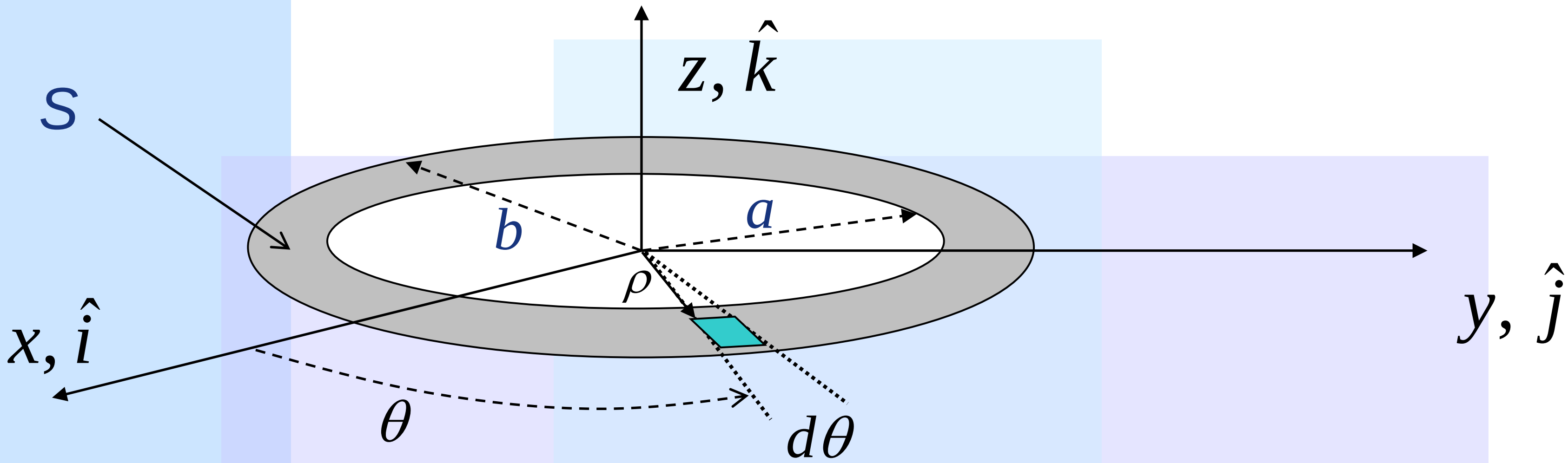
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|^3}$$

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \vec{r}\,' = \rho\cos\theta\,\hat{i} + \rho\sin\theta\,\hat{j}$$

$$dq = \sigma ds = \sigma_0 \rho d\theta d\rho$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho=a}^{\rho=b} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma_0 \rho d\theta(\cancel{-\rho\cos\theta\,\hat{i}} \cancel{-\rho\sin\theta\,\hat{j}} + z\hat{k})}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} d\rho$$

Ejemplo

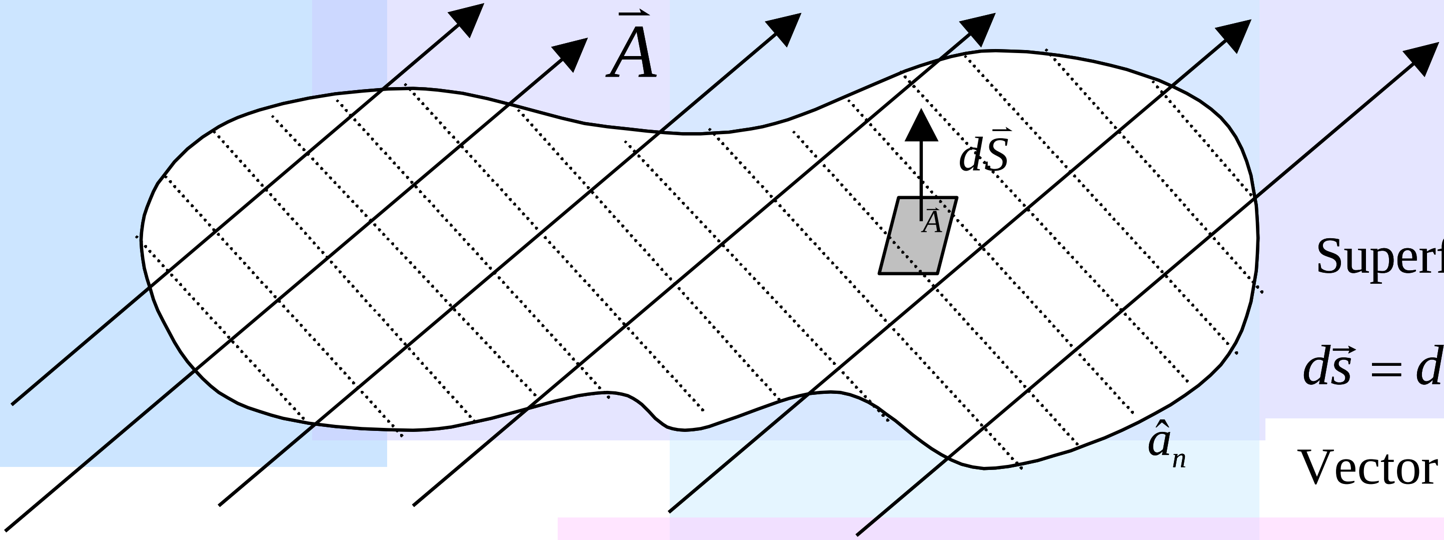


$$\vec{E}(z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_0 \rho z d\theta d\rho \hat{k}}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma_0 z 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=a}^{\rho=b}\frac{\rho\, d\rho \hat{k}}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(z)=\frac{\sigma_0 z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}\right]_{\rho=a}^{\rho=b}\hat{k}=\frac{\sigma_0 z}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left(b^2+z^2\right)^{1/2}}\right)\hat{k}$$

LEY DE GAUSS: Conceptos previos

Flujo $\vec{A}$ campo vectorial definido en todo el espacio y una superficie S



Superficie S

$d\vec{s} = ds \cdot \hat{a}_n$

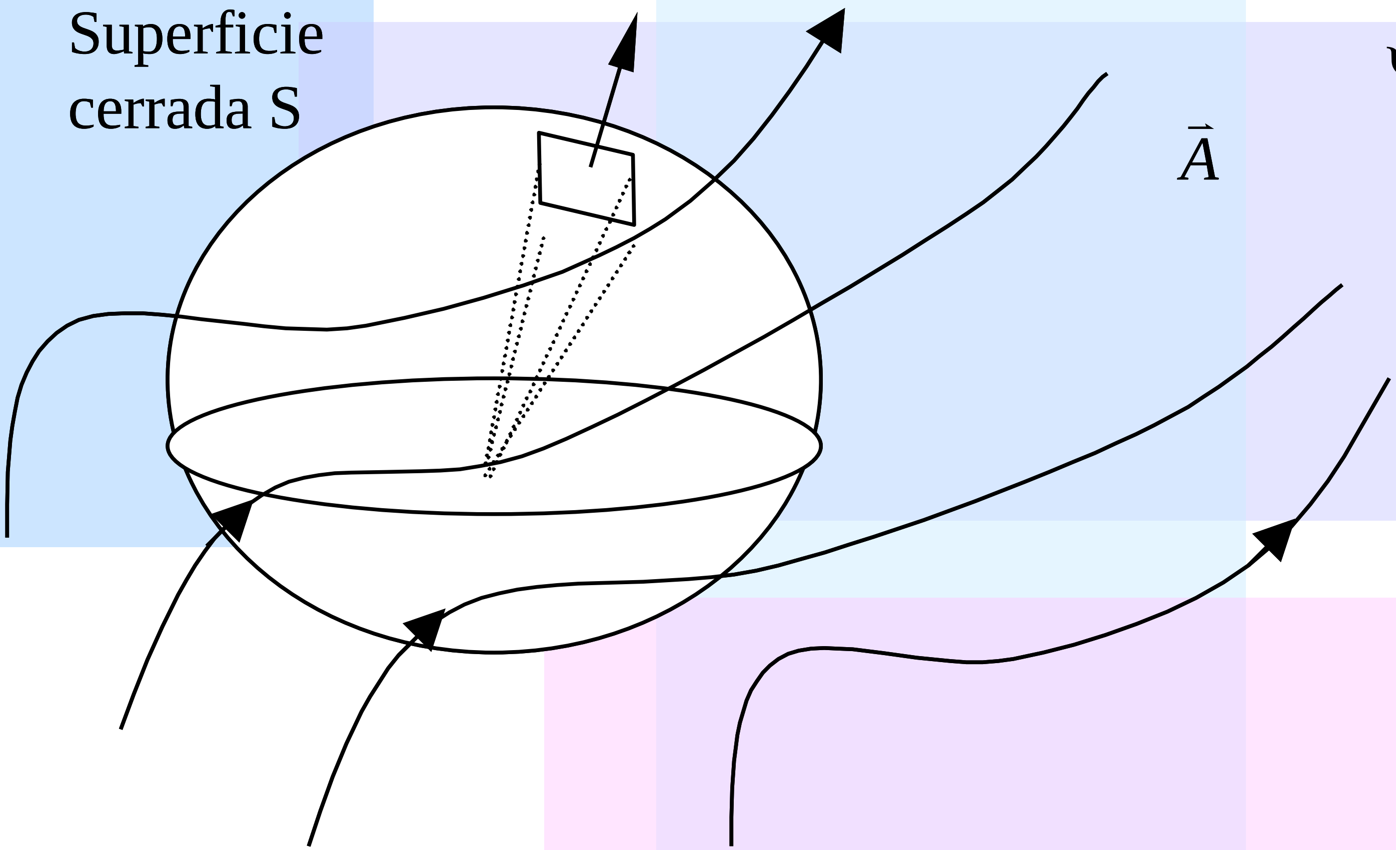
Vector unitario normal a S

$$\Psi = \iint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

flujo ψ de a través de la superficie S

LEY DE GAUSS: Conceptos previos

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{a}_n$$



$$\Psi = \oiint_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

Teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{A} \bullet d\vec{S} = \iiint_{V(s)} \nabla \bullet \vec{A} dv$$

$$\nabla = \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z}$$

Ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

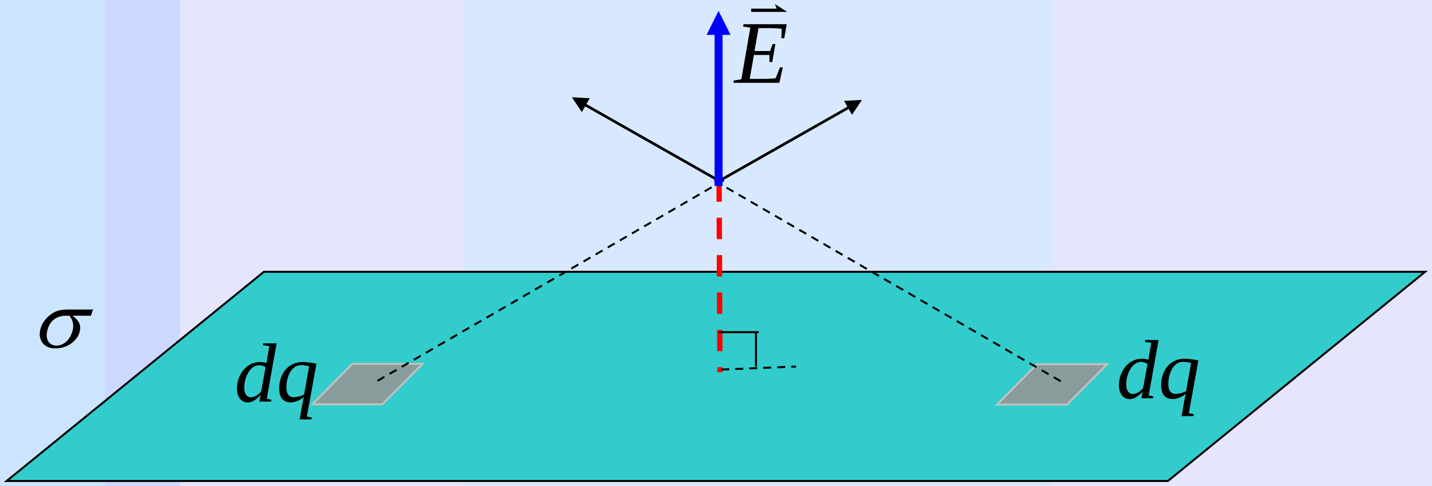
El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ε_0

Ejemplo

Calcular el campo que produce un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme

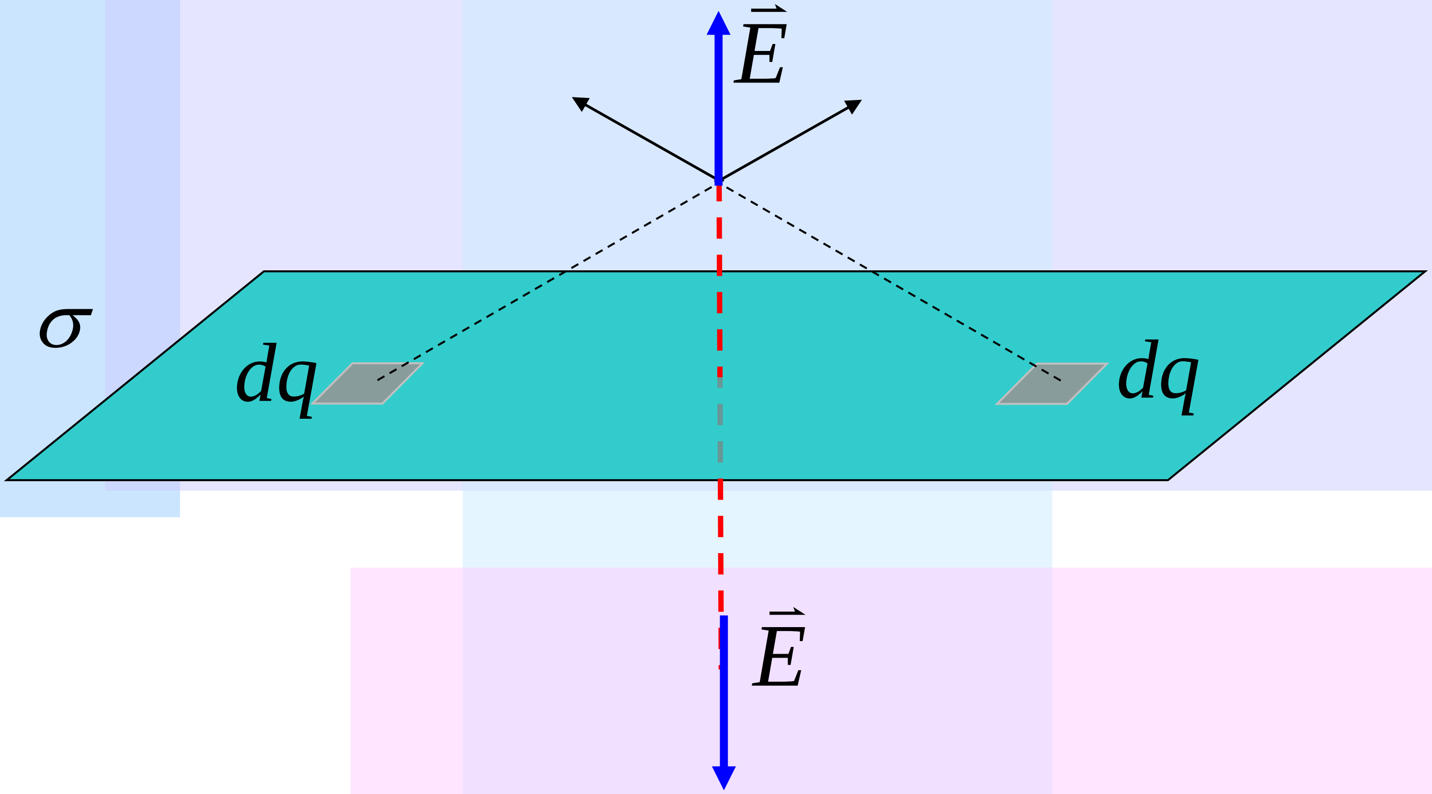
Ejemplo

El campo es perpendicular a la superficie



Ejemplo

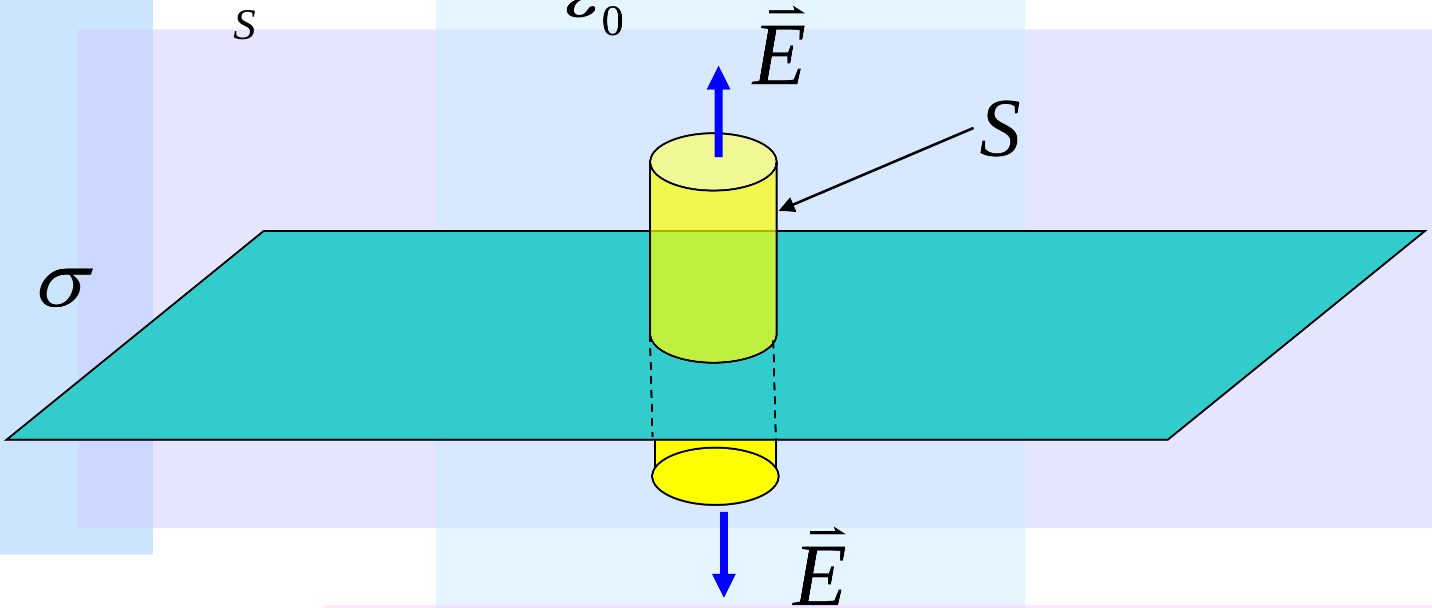
El campo es perpendicular a la superficie



El campo es simétrico con respecto al plano

Ejemplo

Ley de Gauss $\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$

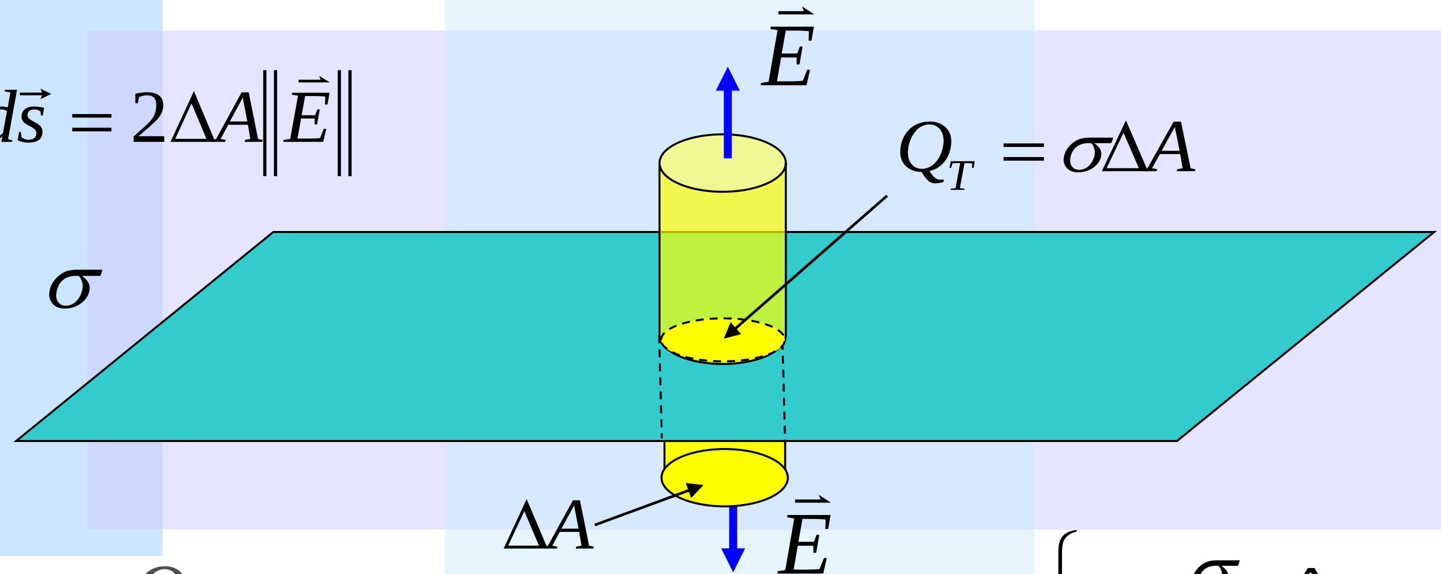


$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{Manto} \vec{E} \bullet d\vec{s} + \iint_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Ejemplo

$$\iint\limits_{Manto} \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$

$$\iint\limits_{tapas} \vec{E} \bullet d\vec{s} = 2\Delta A \left\| \vec{E} \right\|$$



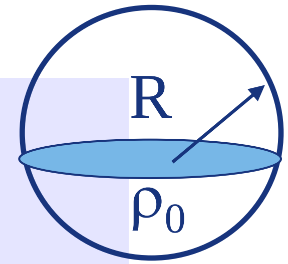
$$\oiint\limits_{S} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$2\Delta A \left\| \vec{E} \right\| = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left\| \vec{E} \right\| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < 0 \end{cases}$$

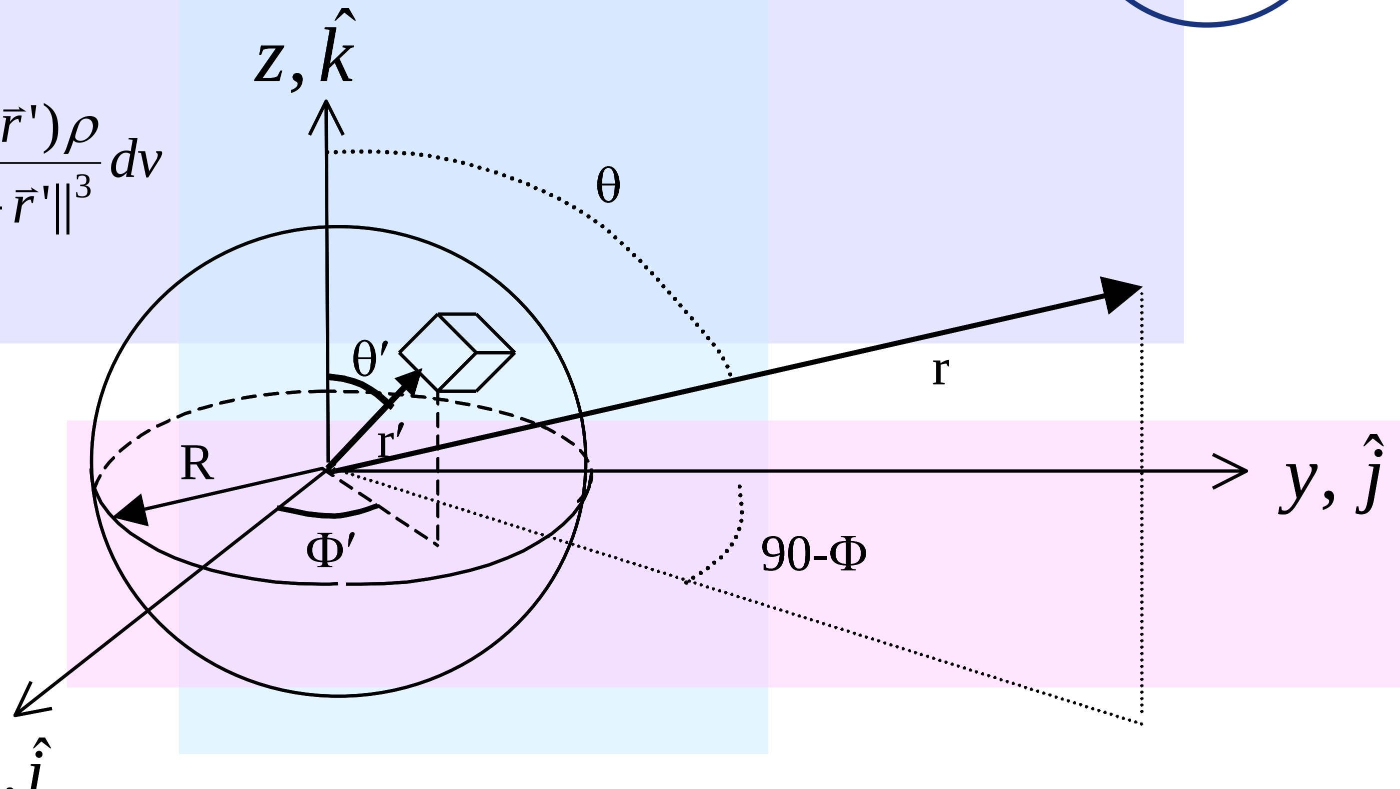
Ejemplo

Calcular el campo eléctrico en todo el espacio de una distribución homogénea de carga ρ_0 dispuesta en una esfera de radio R.



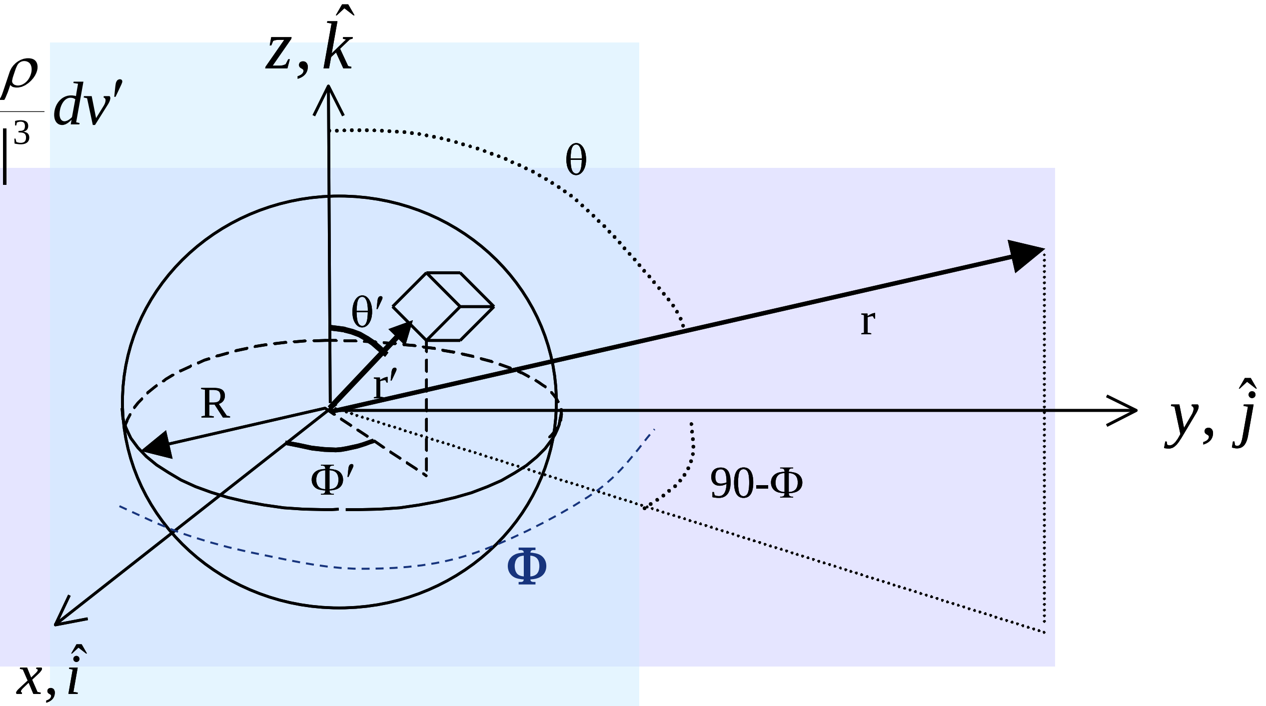
Sol^n **1. Método Integración Directa**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underset{(r)}{\int_0^R} \underset{(\phi)}{\int_0^{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} dv$$



Ejemplo

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\substack{0\\(r)}}^{R} \int_{\substack{0\\(\phi)}}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} dv'$$



$$dv' = r'd\theta'\, r'\sin\theta'\, d\phi'\, dr'$$

$$dv' = r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'\, dr'$$

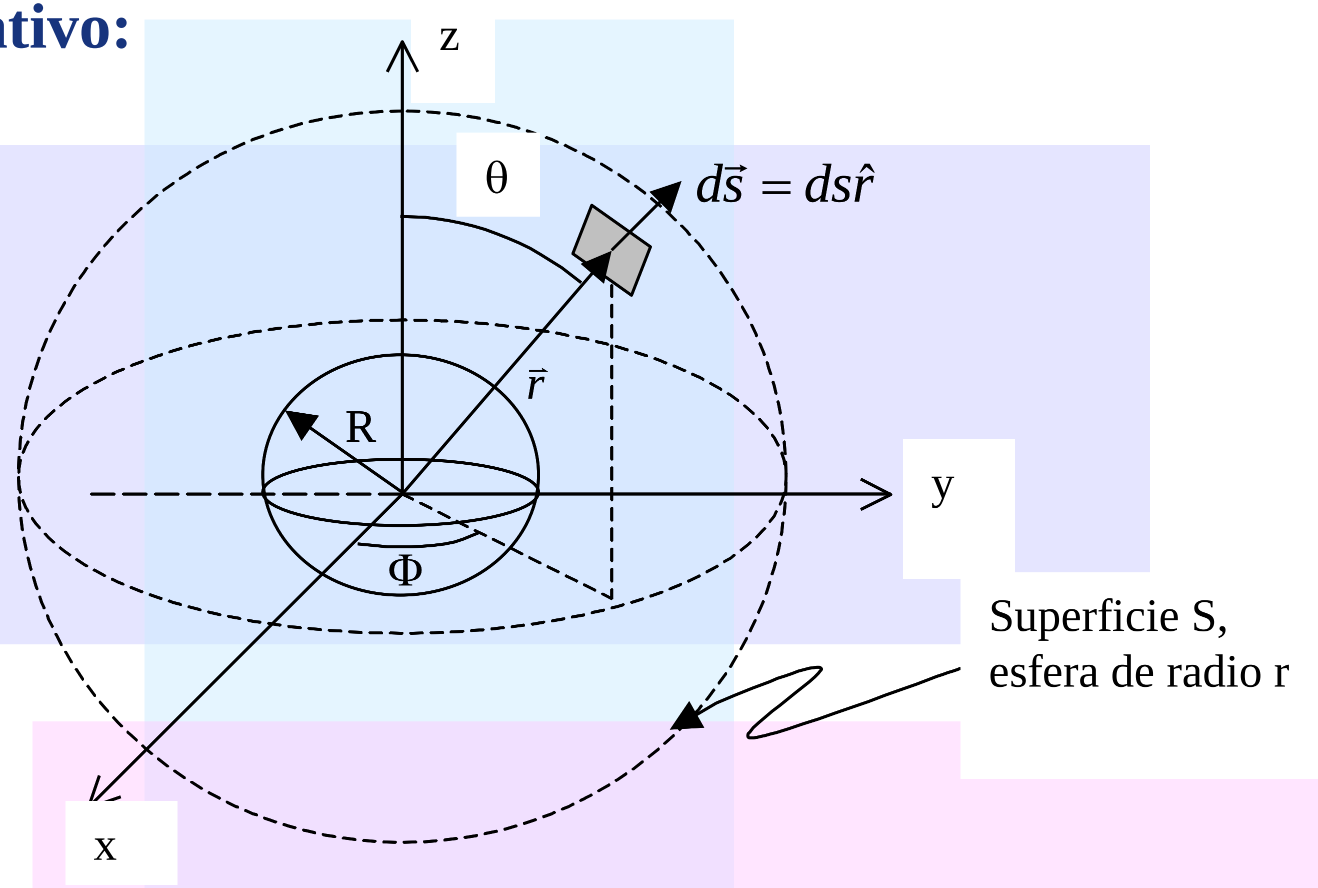
$$\vec{r}\,' = r'\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{i} + r'\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{j} + r'\cos\theta'\,\hat{k}$$

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

Ejemplo

2. Método alternativo:

Ley de Gauss



Para r > R

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Calculemos la carga total encerrada en S

$$Q = \iiint \rho_0 dv$$

$$Q = \int_{(r)}^{R} \int_{(\phi)}^{2\pi} \int_{(\theta)}^{\pi} \rho_0 r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$Q = \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} \rho_0 r^2 \underbrace{(-\cos\theta)}_{1-(-1)=2}\Big|_0^{\pi} d\phi dr$$

$$Q = \int_{0}^{R} \rho_0 r^2 2 \cdot 2\pi dr$$

$$Q = \rho_0 \frac{R^3}{3} 4\pi$$

Ejemplo

Por simetría $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{r}$

$$d\vec{S} = r d\theta \cdot r \sin\theta d\phi \hat{r} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(\vec{r})\hat{r} \bullet r^2 \sin\theta d\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\cdots = \int_0^{\pi} 2\pi E(\vec{r}) r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi E(\vec{r}) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$

$$\cdots = E(\vec{r}) 2\pi\, r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi\, r^2 E(\vec{r})$$

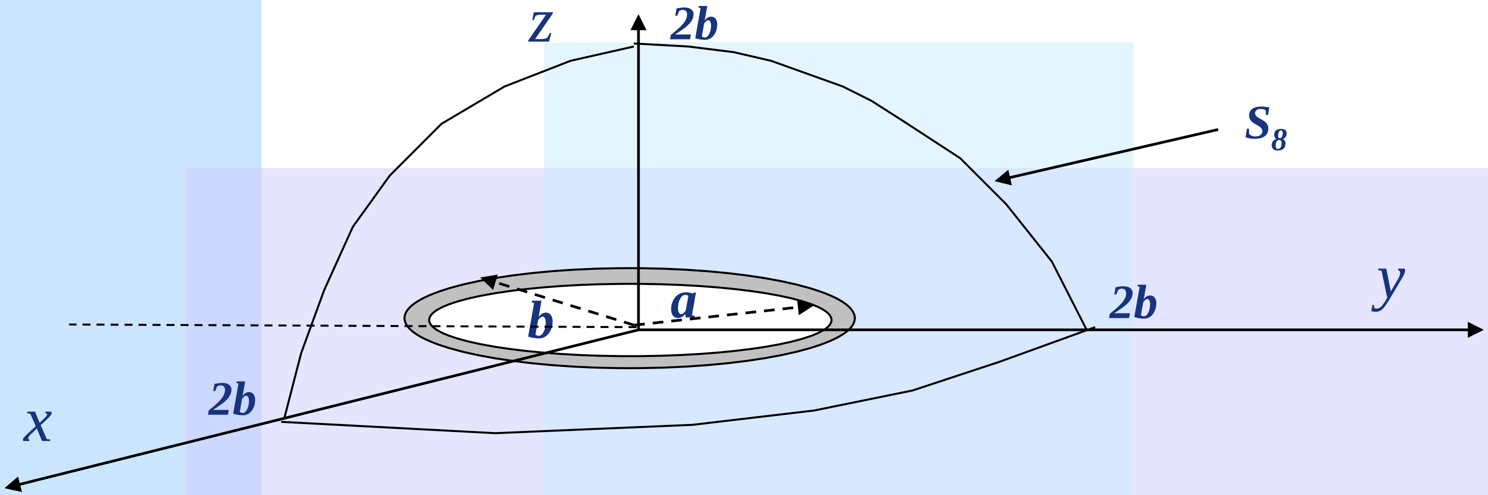
$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\therefore E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2}\rho\, \hat{r}$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss

i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,
ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,
iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).

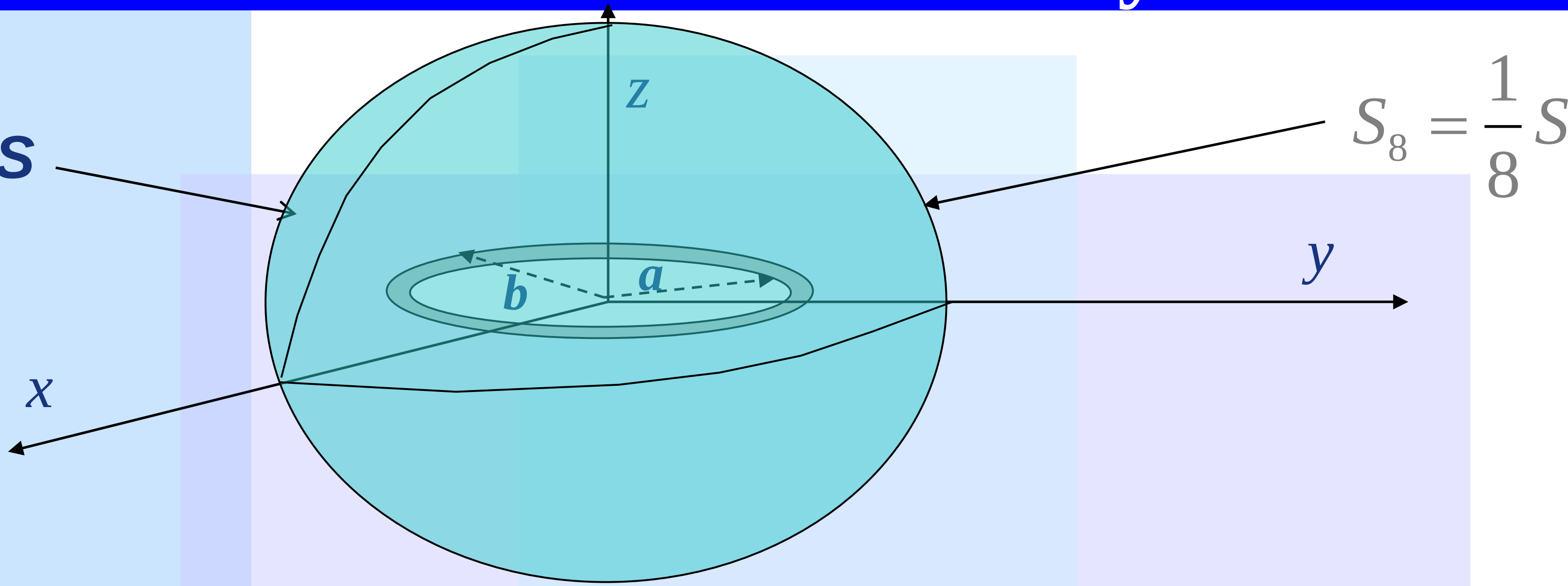
Comentarios sobre la Ley de Gauss



Calcular el flujo de campo eléctrico en la superficie S_8 definida por el segmento de casquete esférico ubicado en el cuadrante (x>0 y>0, z>0) y que intersecta en x=y=z=2b.

$$\iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s} = ?$$

Comentarios sobre la Ley de Gauss



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = 8 \iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

$$Q = \iint_{\Lambda} \sigma ds = \pi (b^2 - a^2) \sigma_0$$

$$\iint_{s_8} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\pi (b^2 - a^2) \sigma_0}{8 \varepsilon_0}$$

1ª Ecuación de Maxwell

Dado que $Q_T = \iiint_V \rho dv$ podemos escribir $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$

Por el teorema de la divergencia se cumple $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dv$

Luego la Ley de Gauss se puede escribir como

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Como esto se cumple $\forall V$ entonces:

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

1ª Ecuación de Maxwell

Definimos Vector Desplazamiento $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

Esta ecuación es la 1ª Ecuación de Maxwell.