Clase Auxiliar - Martes 8 Septiembre

FI2001 - Mecánica
Prof. Hugo Arellano
Semestre Primavera 2009
Auxs: Víctor Medina & Kim Hauser

P1

Se tiene una barra sin masa que puede rotar libremente en torno a su punto medio, fijo en O. En los extremos de la barra hay dos masas m, las cuales a su vez están unidas a resortes idénticos de constante elástica k y largo natural l_o. Considere que $D = 4l_o$ y $L = 2l_o$. El movimiento ocurre en **ausencia** de gravedad.

(a) Determine los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad.

(b) Si el sistema es soltado desde una configuración cercana al único equilibrio estable, calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

(c) Considere, por último, que el sistema es sumergido en un medio viscoso de manera tal que la masa inferior experimenta una fuerza del tipo $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$, con $\gamma < \sqrt{mk}$, mientras que la superior se sigue moviendo libremente. Determine el movimiento (para pequeñas perturbaciones) que sigue el sistema en tal caso.

Indicación: Escriba la energía en aproximación de pequeñas oscilaciones y obtenga la ecuación de movimiento:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}^{nc} \cdot \vec{v}$$

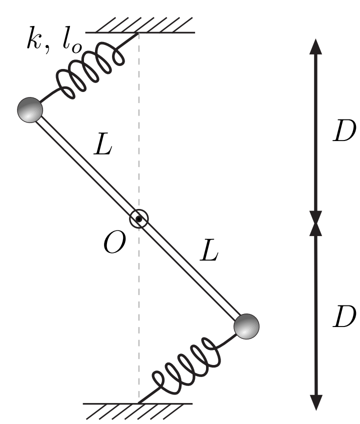

Fig. P1

P2

Un carro de largo $2l_c$ y masa M puede deslizar sin roce por un riel de largo L. El carro tiene fijo, a cada lado, uno de los extremos de un resorte ideal (masa nula), de constante elástica k y largo natural l_o. El extremo libre de cada resorte se fija a dos paredes ubicadas en los extremos del riel. Se tiene, así, un sistema resorte-carro-resorte.
Sobre el carro se monta un motor, capaz de hacer girar con velocidad angular Ω un brazo de masa despreciable y largo R en cuyo extremo hay una masa m (ver figura). En la práctica, Ω puede ser controlada conectando el motor a una fuente de voltaje variable, pero para sus cálculos considere que Ω es constante. Puede suponer que inicialmente el brazo-masa se encuentra horizontal y hacia la derecha.

(a) Encuentre la posición del centro de masa del sistema, en función de la coordenada x del centro del carro, medida desde la pared izquierda del riel. Escriba la 2º ley de Newton para el centro de masa.

(b) Resuelva la E.D.O. resultante para $x(t)$, usando como condiciones iniciales que $\dot{x}(0) = 0$ y que el sistema parte en el punto de equilibrio $x(0) = L/2$.

(c) Tome el límite de $x(t)$ cuando Ω tiende a la frecuencia de resonancia ω_o, que usted debe identificar. Puede serle útil la Regla de L'Hôpital.

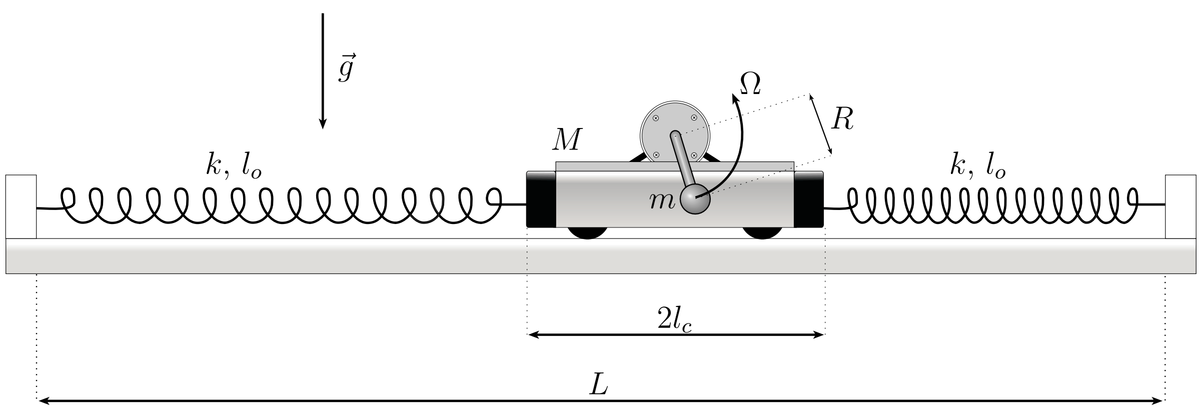

Fig. P2

Respuestas:
(Jamás suponer que están exentas de errores.)
***P1*: (a)** $\theta_1 = 0 \rightarrow$ **Estable,** $\theta_2 = \pi \rightarrow$ **Inestable; (b)** $\omega^2_{p.o.}[\theta_1] = \frac{k}{m}$**;**
(c) $\theta(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}[A\cos(\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\gamma}{2m})^2}t + \delta)] \therefore$ **sub-amortiguamiento;**
***P2*: (a)** $X_{CM} = x + \frac{m}{M+m}R\cos(\Omega t)$**,** $Y_{CM} = \frac{m}{M+m}R\,\mathrm{sen}(\Omega t)$**,**
$\ddot{x} + \frac{2k}{M+m}x = \frac{kL}{M+m} + \frac{m}{M+m}R\Omega^2\cos(\Omega t)$**;**
(b) $x(t) = \frac{m}{M+m}\frac{R\Omega^2}{(\Omega_o^2 - \Omega^2)}(\cos(\Omega t) - \cos(\Omega_o t)) + \frac{L}{2}$**,** $\Omega_o \equiv \sqrt{\frac{2k}{M+m}}$**; (c)** $x[\Omega = \Omega_o] = \frac{mR\Omega_o}{2(M+m)}t\,\mathrm{sen}(\Omega_o t) + \frac{L}{2}$**;**