Pauta P1 Control 3 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Calculemos $L = T - V$

Energía cinética

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2$$

Energía potencial (los dos resortes)

$$V = \frac{1}{2}(2k)(x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_2)^2$$

si escribimos

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^t \mathbb{M}\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{x}^t \mathbb{V}\vec{x}$$

con

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

entonces tendremos que

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbb{V} = Hessiano(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

este último, evaluado en el punto de equilibro. Veamos cada término

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2k(x_1 - l_1) - k(x_2 - x_1 - l_2)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 3k$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = -k$$

también

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1 - l_2) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = k$$

Entonces

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Por lo que se tiene

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^t \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{x}^t \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \vec{x}$$

b) Para las frecuencias propias resolvemos

$$\det(-\omega^2\mathbb{M} + \mathbb{V}) = \det \begin{pmatrix} -2m\omega^2 + 3k & -k \\ -k & -m\omega^2 + k \end{pmatrix} = 0$$

$$(-2m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0$$

$$2m^2\omega^4 - 5mk\omega^2 + 2k = 0$$

y las soluciones son

$$\omega^2 = \frac{5mk \pm \sqrt{25m^2k^2 - 16m^2k^2}}{4m^2}$$

$$\omega_1^2 = 2\frac{k}{m},\ \omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}$$

c) Para ω_1^2 tenemos

$$\begin{pmatrix} -2m(2\frac{k}{m}) + 3k & -k \\ -k & -m(2\frac{k}{m}) + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la primera ecuación nos dice que

$$-ka_1 - ka_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$$

por lo que el vector propio asociado es

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para la frecuencia ω_1^2, se tiene que el movimiento es en contrafase (se mueven en sentido contrario).

Ahora con ω_2^2 tenemos

$$\begin{pmatrix} -2m(\frac{1}{2}\frac{k}{m}) + 3k & -k \\ -k & -m(\frac{1}{2}\frac{k}{m}) + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la primera ecuacion no dice que

$$2ka_1 - ka_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2a_1$$

por lo que el vector propio asociado es

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para la frecuencia ω_2^2, se tiene que el movimiento es en fase (se mueven en el mismo sentido).