Pauta P3 Control 3 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Sean $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ los ejes principales del sólido, tal que $\hat{e}_3$ es $\perp$ al plano del disco y los otros vectores pasan por los diámetros del disco. Notemos que por la simetria del disco se tiene que $I_1 = I_2$. Calculemos.

Calculamos I_3

$$I_3 = \int \rho^2 dm = \int \rho^2 \sigma dS$$

pero $dS = \rho d\rho d\theta$, entonces

$$I_3 = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 d\rho d\theta = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4}$$

pero $\sigma = M/\pi R^2$, or lo que se tiene que

$$I_3 = \frac{1}{2} M R^2$$

Ahora, usamos el teorema de los ejes perpendiculares y la simetria del disco

$$I_1 + I_2 = 2I_1 = I_3 = \frac{1}{2} M R^2$$

Luego

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} M R^2$$

luego, el tensor de inercia se escribe en los ejes principales como

$$\mathbf{I} = MR^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) notemos que

$$\vec{\Omega} = \omega \hat{z} = \omega \sin\theta \hat{e}_1 + \omega \cos\theta \hat{e}_3 \Rightarrow \omega_3 = \omega \cos\theta,\ \omega_1 = \omega \sin\theta$$

como $\vec{\Omega} = cte \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0$, por lo que las ecs. de Euler quedan como

$$(I_1 - I_3)\omega_3 \omega_1 = N_2$$

$$N_1 = N_3 = 0$$

Reemplazando, se tiene que

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4} M R^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta \hat{e}_2$$

c) por geometria tenemos que

$$\hat{e}_2 = \cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}$$

se tiene entonces que

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta \cos(\omega t)\hat{x} + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta \sin(\omega t)\hat{y}$$