Pauta Ejercicio #9

a) dado que $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^{3}$ son los ejes principales con origen en el C.M. $\Rightarrow$ los torques por gravedad son cero en el sólido (pues $|\vec{r}_{cm}|=0$). Las Ecuaciones de Euler quedan:

$$(1)\quad I_1\dot{\omega}_1+(I_3-I_2)\omega_3\omega_2=0$$

$$(2)\quad I_2\dot{\omega}_2+(I_1-I_3)\omega_1\omega_3=0$$

$$(3)\quad I_3\dot{\omega}_3+(I_2-I_1)\omega_2\omega_1=0$$

1.- lanzamiento en $\hat{x}_1$ $\Rightarrow$ ω_1 queda intacto

$\left.\begin{array}{l}\omega_2=\varepsilon_2 \ll 1\\ \omega_3=\varepsilon_3\ll 1\end{array}\right\}$ error al lanzar

Como $\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3\approx 0$ $\Rightarrow$ de (1): $\dot{\omega}_1\approx 0$ $\Rightarrow$ $\omega_1\approx$ cte

de (2): $\dot{\varepsilon}_2+\dfrac{(I_1-I_3)}{I_2}\omega_1\varepsilon_3=0$ / $\dot{\varepsilon}_3 \overset{\text{de }(3)}{=} -\dfrac{(I_2-I_1)\omega_1\varepsilon_2}{I_3}$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_2-\frac{(I_1-I_3)(I_2-I_1)\omega_1^2}{I_2I_3}\varepsilon_2=0 \quad \Big/ A=\frac{(I_1-I_3)(I_2-I_1)}{I_2I_3}<0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_2-\underbrace{A\omega_1^2}_{>0}\varepsilon_2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_2\propto\cos(\Omega t)}$$

$\therefore$ Error pequeño se mantiene pequeño (está acotado)

(2.-) lanzamiento en $\hat{x}_3$: $\Rightarrow$ ω_3 queda intacto

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \ll 1$$
$$\omega_1 \simeq \varepsilon_1 \ll 1$$

de (3): $\dot{\omega}_3 \approx 0 \Rightarrow \omega_3 \approx cte$

derivamos (2) y usamos (1)

$$I_2 \ddot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3 \left\{ -\frac{(I_3 - I_2)\omega_3 \varepsilon_2}{I_1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_2 - \underbrace{\frac{(I_1 - I_3)}{I_2}\frac{(I_3 - I_2)}{I_1}}_{<0}\omega_3^2 \varepsilon_2 = 0$$

$\Rightarrow \varepsilon_2 \propto \cos(\Omega t) \Rightarrow$ Error pequeño se mantiene pequeño

b) en $\hat{x}_2 \Rightarrow \omega_2$ queda intacto y $\omega_1 \simeq \varepsilon_1 \ll 1$ y $\omega_3 \simeq \varepsilon_3 \ll 1$.

de (2): $\dot{\omega}_2 \approx 0 \Rightarrow \omega_2 \approx cte.$

derivamos (1) y usamos (3):

$$I_1 \ddot{\varepsilon}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2 \left\{ -\frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\omega_2 \varepsilon_1 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_1 - \underbrace{\frac{(I_3 - I_2)}{I_1}\frac{(I_2 - I_1)}{I_3}}_{>0.}\omega_2^2 \varepsilon_1 = 0$$

$\Rightarrow \varepsilon_1 \propto e^{mt}$ i.e., explota en el tiempo ($\varepsilon_1 \to \infty$)

luego, el mov en eje 2 es inestable.