Pauta P1 Control 2 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Si consideramos un diferencial de masa dM del anillo, el diferencial de fuerza que que siente la partícula es

$$d\vec{F} = -\frac{Gm(dM)}{(R^2+z^2)}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta desde dM hasta m. Este vector, si consideramos coordenadas cilíndricas, tiene la forma

$$\hat{r} = -\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\rho} + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k}$$

por lo tanto

$$\vec{F} = -\int_M \frac{Gm}{(R^2+z^2)} dM\hat{r}$$

notemos que la componente radial del diferencial de fuerza $d\vec{F}$ tiene su antagonista por la acción de una fuerza causada por un dM que se encuentra diametralmente opuesto al que consideramos. Luego, la fuerza neta <u>radial</u> se anula, por lo que solo nos queda considerar la componente vertical.

$$\vec{F} = -\int_M \frac{Gmz\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} dM = -\frac{GmMz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{F}(z) = -\frac{GMmz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

b) Por segunda ley de Newton

$$\ddot{z} = -\frac{GMz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

usando regla de la cadena y separación de variables

$$\int_0^{\dot{z}(z=0)} \dot{z}d\dot{z} = -GM\int_R^0 \frac{zdz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

pero

$$\int \frac{zdz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

por lo tanto

$$\frac{\dot{z}^2(z=0)}{2} = GM[\frac{1}{R} - \frac{1}{R\sqrt{2}}] \Rightarrow \dot{z}(z=0) = \pm\sqrt{\frac{2GM}{R}[1-\frac{1}{\sqrt{2}}]}$$

Finalmente

$$\boxed{\vec{v}(z=0) = -\sqrt{\frac{2GM}{R}[1-\frac{1}{\sqrt{2}}]}\hat{k}}$$

c) De la ecuación de movimiento se tiene que

$$m\ddot{z} = F(z)$$

donde $F(z)$ es no lineal. Si linealizamos en torno a $z = 0$ se tiene que

$$F(z) \approx F(0) + F'(z=0)z \Rightarrow F(z) \approx F'(z=0)z$$

si reemplazamos este resultado en la ecuación de movimiento

$$\ddot{z} - \frac{F'(0)}{m}z = 0$$

donde se aprecia la ecuación del oscilador si $F'(0) < 0$. de aqui se desprende que

$$\omega^2 = -\frac{F'(0)}{m} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{-F'(0)}{m}}}$$

busquemos $F'(0)$.

$$F(z) = -\frac{GMmz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow F'(z) = -GMm\frac{d}{dz}(\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}})$$

$$\frac{d}{dz}(\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}) = \frac{(R^2+z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(R^2+z^2)^{1/2}(2z)z}{(R^2+z^2)^3}$$

$$F'(0) = -GMm(\frac{R^3}{R^6}) = -\frac{GMm}{R^3}$$

reemplazando en la fórmula del periodo se tiene que

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$$