Pauta Ejercicio #3 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Haciendo el D.C.L. correspondiente, se tiene que

$$\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = (-N + mg\sin\alpha)\hat{\theta} - mg\cos\alpha\hat{r}$$

Para la aceleración se tiene que $\theta = \alpha = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, por lo que la aceleración queda escrita como:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)\hat{r} - r\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\hat{\theta} + \frac{\sin\alpha}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\hat{\phi}$$

usando la segunda ley de Newton, se tiene que las ecuaciones de movimiento son:

$$\hat{r})\ -mg\cos\alpha = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)$$

$$\hat{\theta})\ -N + mg\sin\alpha = -mr\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\hat{\phi})\ 0 = m\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha)$$

para la ecuación en $\hat{\phi}$, se tiene que

$$0 = m\frac{\sin\alpha}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) \Rightarrow r^2\dot{\phi} = cte = r_0^2\dot{\phi}_0$$

de la condicion inicial de velocidad

$$\vec{v}_0 = v_0\hat{\phi} = \dot{r}_0\hat{r} + r_0\sin\alpha\dot{\phi}_0\hat{\phi} \Rightarrow \dot{r}_0 = 0 \wedge r_0\sin\alpha\dot{\phi}_0 = v_0$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_0 = \frac{v_0}{r_0\sin\alpha}$$

por lo que se tiene que, combinando esta última ecuación con la segunda ley de Newton en $\hat{\phi}$:

$$\dot{\phi}(r) = (\frac{v_0 r_0}{\sin\alpha})\frac{1}{r^2}$$

b) Sustituyendo $\dot{\phi}$ en la segunda ecuación de Newton para la coordenada r, se obtiene que:

$$-g\cos\alpha = \ddot{r} - r\sin^2\alpha(\frac{v_0 r_0}{\sin\alpha})^2\frac{1}{r^4} = \ddot{r} - (v_0 r_0)^2\frac{1}{r^3}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = (v_0 r_0)^2\frac{1}{r^3} - g\cos\alpha$$

usando la regla de la cadena, podemos escribir $\ddot{r} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$, y aplicando el método de separación de variables e integrando, se tiene:

$$\int_{\dot{r}_0=0}^{\dot{r}} \dot{r}d\dot{r} = \int_{r_0}^{r} [(v_0 r_0)^2\frac{1}{r^3} - g\cos\alpha]dr$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{(v_0 r_0)^2}{2}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}) - g\cos\alpha(r - r_0)$$

y de aqui se obtiene que:

$$\dot{r}^2 = (v_0 r_0)^2(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}) - 2g\cos\alpha(r - r_0)$$

c) Busquemos las distancias radiales mínima y máxima del movimiento de la partícula. Para esto, cuando la partícula llegue a dichos radios, su velocidad radial $\dot{r}$ debe ser nula ya que, de lo contrario, seguirá avanzando radialmente. En base a esto:

$$\dot{r}^2 = 0 \Rightarrow 2g\cos\alpha(r - r_0) = (v_0 r_0)^2(\frac{r^2 - r_0^2}{r^2 r_0^2})$$

$$\Rightarrow 2g\cos\alpha = v_0^2(\frac{r + r_0}{r^2})$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 2g\cos\alpha\frac{r^2}{r + r_0}$$

si evaluamos en $r_{max} = 2r_0$, se tiene que:

$$v_0^2 = \frac{8}{3}g r_0 \cos\alpha$$

d) Si evaluamos en $r_{min} = \frac{r_0}{2}$, se tiene que:

$$v_0^2 = \frac{1}{3}g r_0 \cos\alpha$$

y de aquí se obtiene que la condición que debe cumplir v_0 para que la partícula no se salga de la superficie cónica es:

$$v_0 \in [\sqrt{\frac{1}{3}g r_0 \cos\alpha}, \sqrt{\frac{8}{3}g r_0 \cos\alpha}]$$