# Pauta Ejercicio #1 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Se sabe que la velocidad de una partícula en coordenadas cilíndricas se escribe como:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

para este caso, como $z = z(\rho)$ y $\rho = \rho(\theta) \Rightarrow z = z(\theta)$ donde

$$z(\theta) = hAe^{k\theta}$$

luego, derivando con respecto al tiempo cada relación se tiene que:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}$$

$$\dot{z} = hAke^{k\theta}\dot{\theta}$$

por lo tanto, la velocidad esta dada por

$$\vec{v} = Ae^{k\theta}\dot{\theta}(k\hat{\rho} + \hat{\theta} + hk\hat{k})$$

pero, por enunciado, se tiene que la rapidez (o la norma del vector $\vec{v}$) es $v_0$. Luego

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 e^{-k\theta}}{A\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}}$$

por lo que el vector velocidad es

$$\boxed{\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}}(k\hat{\rho} + \hat{\theta} + hk\hat{k})}$$

b) la aceleración se obtiene al realizar $\frac{d\vec{v}}{dt}$. Con esto se obtiene que

$$\vec{a} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}}(k\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}\hat{\rho})$$

por lo que se concluye

$$\boxed{\vec{a} = \frac{v_0^2 e^{-k\theta}}{A(k^2 + h^2k^2 + 1)}(k\hat{\theta} - \hat{\rho})}$$

c) para demostrar que son ortogonales se usa la propiedad del producto interno o producto punto, que dice que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

haciendo esto, se tiene que

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}} \frac{v_0^2 e^{-k\theta}}{A(k^2 + h^2k^2 + 1)}(-k + k) = 0$$

con lo que se demuestra la ortogonalidad entre la velocidad y la aceleración.

d) tomando la ecuación que relaciona la velocidad angular y la posición angular, y haciendo separación de variables, se tiene que:

$$e^{k\theta} d\theta = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}} dt$$

$$\int e^{k\theta} d\theta = \int \frac{v_0}{A\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}} dt$$

$$\frac{e^{k\theta}}{k} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}} t + c$$

Luego,

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{k} \ln(\frac{v_0 k}{A\sqrt{k^2h^2 + k^2 + 1}} t + kc)}$$