PROBLEMA 1

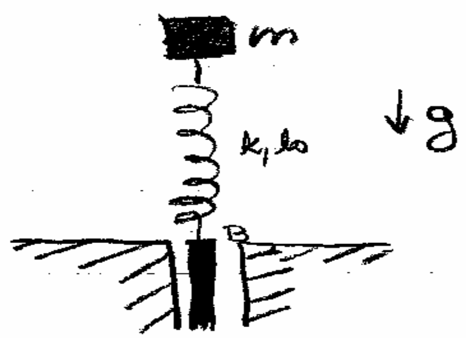
Considere un bloque de masa m que está apoyado sobre un resorte de constante k y largo natural l_0, bajo la acción de la gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t=0$ al nivel de la mesa.

(a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa

(b) En $t=0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t)$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa

(c) Resuelva la ecuación de movimiento

(d) Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia. ¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?



Solución

Para encontrar la posición de equilibrio igualamos las fuerzas a cero

$$0 = \text{Peso} + F_{resorte} = -mg + k(l_0 - x)$$

$$\Rightarrow kx = -mg + kl_0 \quad \Rightarrow \boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

Definimos la posición del punto B como $y_B = A_0 \operatorname{sen}(\omega t)$
Si $y_B > 0$ entonces para la misma altura de la masa el resorte se comprime menos, análogamente si $y_B < 0$ entonces el resorte se comprimirá menos.

Tenemos que la fuerza ejercida por el resorte será
$$F_{resorte} = k(l_0 - (x - y_B))$$

$$\Rightarrow ma = k(l_0 - (x - y_B)) - mg$$

$$\Rightarrow ma = kl_0 - mg - kx + kA_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Para poder utilizar el resultado conocido debemos hacer desaparecer las fuerzas que no dependen de x, para eso haremos un cambio de variable

$$ma = k\cancel{x}_{eq} - kx + kA_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Definimos $\bar{x} = x - x_{eq}$

$$\Rightarrow ma = -k\bar{x} + kA_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

identificamos en nuestra formula general:

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \operatorname{sen}(\omega t)$$

En nuestro caso $M = m$ $b = 0$ $F_0 = -kA_0$

$$\Rightarrow \frac{kA_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{m} = \ddot{x} + \frac{kx}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} = 0 \quad \wedge \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

con $\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$ pero $\frac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$.

Asimismo $e^{-t/2\tau} = e^0 = 1$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 = \omega_0^2$$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\omega_0^2 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Nos faltan calcular los valores de A y de φ_0, para eso usamos las condiciones de borde:

$x(0) = x_{eq} \Rightarrow \bar{x}(0) = 0 \Rightarrow A\cos(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\bar{x}}(0) = 0$

$$\dot{\bar{x}}(t) = -\omega_0 A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\omega_0^2 A_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{x}}(0) = -\omega_0 A + \frac{\omega_0^2 \omega A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow A = \frac{\omega \omega_0 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = \frac{\omega \omega_0 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_0^2 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Recordando que $\cos(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha \cancel{\cos(\pi/2)} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\pi/2 = -\operatorname{sen}\alpha$
y reordenando

$$\bar{x}(t) = \frac{\omega_0 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(+\omega_0 \operatorname{sen}(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega_0 t) \right)$$

Volviendo al cambio inicial $\bar{x} = x - x_{eq} \Rightarrow x = \bar{x} + l_0 - mg/K$

$$x(t) = \frac{\omega_0 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\omega_0 \operatorname{sen}(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega_0 t) \right) + l_0 - \frac{mg}{K}$$

Para ver la frecuencia máxima notemos primero que asumimos que la posición de equilibrio está sobre la mesa, luego $l_0 > \frac{mg}{K}$

Además por enunciado se nos dice que $\omega < \omega_0 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 > 0$ por lo que lo único que puede tomar valor negativo es.

$\omega_0 \operatorname{sen}(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega_0 t)$ de donde el menor valor posible es $-(\omega_0 + \omega)$, por lo que debemos imponer que cuando se alcance ese valor x siga siendo positivo.

Para encontrar la frecuencia crítica igualamos $x = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-\omega_0 A_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(\omega_0 + \omega) + l_0 - \frac{mg}{K}$$

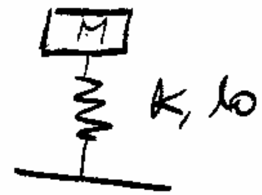
$$\Rightarrow l_0 - \frac{mg}{K} = \frac{\omega_0 A_0}{\omega_0 - \omega} \qquad \Rightarrow \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{A_0}{l_0 - \frac{mg}{K}} \right)$$

PROBLEMA 2

La figura representa un modelo de un automóvil, de masa M y suspensión de constante elastica total k y largo natural l_0. Supondremos que los resortes que componen la suspensión son tán rígidos que se desprecia el efecto de la gravedad. Se modelará la disipación como un roce viscoso lineal, de constante b. En equilibrio, la distancia entre el piso y el automóvil es $d = l_0/2$. Un terremoto ejerce una fuerza $F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ sobre el vehículo, en dirección vertical. Se observa que este alcanza un estado estacionario cuya amplitud es tal que el auto toca justo el piso. ¿Cuál es la frecuencia ω de forzaje del temblor?

Nos interesa el estado estacionario del movimiento, es decir cuando el $e^{-\gamma t}$ se hace tan pequeño que es despreciable, la ecuación para el estado estacionario es:

$$\frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\left(\frac{\omega}{T}\right)^2}} \sin(\omega t-\delta)$$



El auto justo toca el suelo cuando alcanza su amplitud máxima, por lo que la igualamos a $d = l_0/2$

$$\Rightarrow \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\left(\frac{\omega}{T}\right)^2}} = \frac{l_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4F_0^2}{M^2 l_0^2} = (\omega_0^2-\omega^2)^2-\left(\frac{\omega}{T}\right)^2 = \omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2+\omega^4-\frac{\omega^2}{T^2}$$

Utilizamos la solución general para ec. de segundo grado con

$A = 1 \quad B = -2\omega_0^2 - \frac{1}{T^2} \quad C = \omega_0^4 - \frac{4F_0^2}{M l_0^2}$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2\omega_0^2 + \frac{1}{T^2} \pm \sqrt{\left(2\omega_0^2 + \frac{1}{T^2}\right)^2 - 4\left(\omega_0^4 - \frac{4F_0^2}{I_0^2 M^2}\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\omega^2 = 2\omega_0^2 + \frac{1}{T^2} \pm \sqrt{4\omega_0^4 + \frac{4\omega_0^2}{T^2} + \frac{1}{T^4} - 4\omega_0^4 + \frac{16F_0^2}{I_0^2 M^2}}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{T^2} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{T^2} + \frac{1}{4T^4} + \frac{4F_0^2}{I_0^2 M^2}}$$

Por la simetría del problema tenemos que ambas soluciones son correctas, en una $\omega < \omega_0$ y en la otra $\omega > \omega_0$