



FII 002 Sistemas Newtonianos

Judit Lisoni

Sección 6

Unidad 5 Oscilaciones

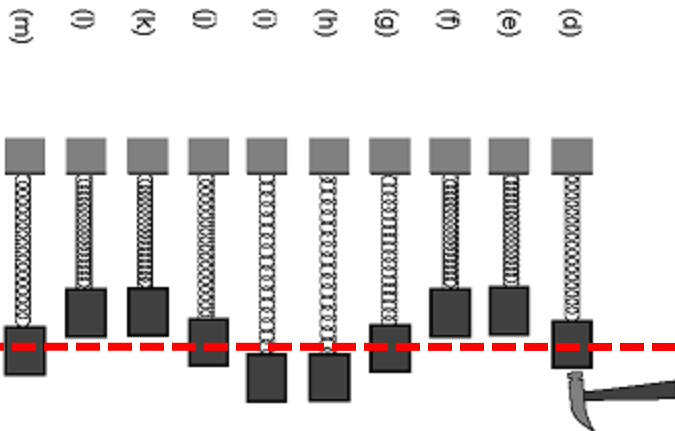
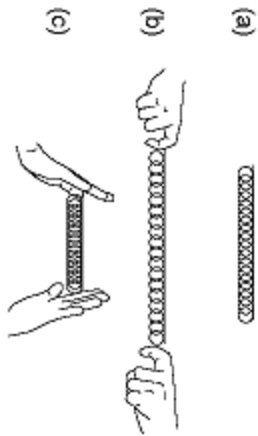
Contenidos

1. Repaso de oscilaciones: MAS
2. Oscilaciones amortiguadas
3. Oscilaciones forzadas

Movimiento armónico simple (MAS)

el resorte: sistema modelo

Una masa ligada a un resorte se moverá en forma sinusoidal



Posición de equilibrio

Desarrollo teórico

$$F_{neta} = ma_x = -Kx$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} = -Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$$

Qué sucede si aplicamos la primera y segunda derivada a la ecuación **$X(t) = X \cos(\theta_0 + \omega t)$** ?

$$\dot{x} = -X\omega \sin(\theta_0 + \omega t)$$

$$\ddot{x} = (-X\omega \sin(\theta_0 + \omega t))' = -X\omega^2 \cos(\theta_0 + \omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Desarrollo teórico

$$x(t) = X \cos(\Theta_0 + \omega t)$$

$$F_{neta} = ma_x = -Kx$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} = -Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Periodo de oscilación de la masa m conectada al resorte de constante INDEPENDIENTE de la amplitud

Velocidad y aceleración de un MAS

$$x(t) = X \cos(\theta_0 + \omega t)$$

$$\dot{x} = -X\omega \sin(\theta_0 + \omega t) \quad \text{velocidad}$$

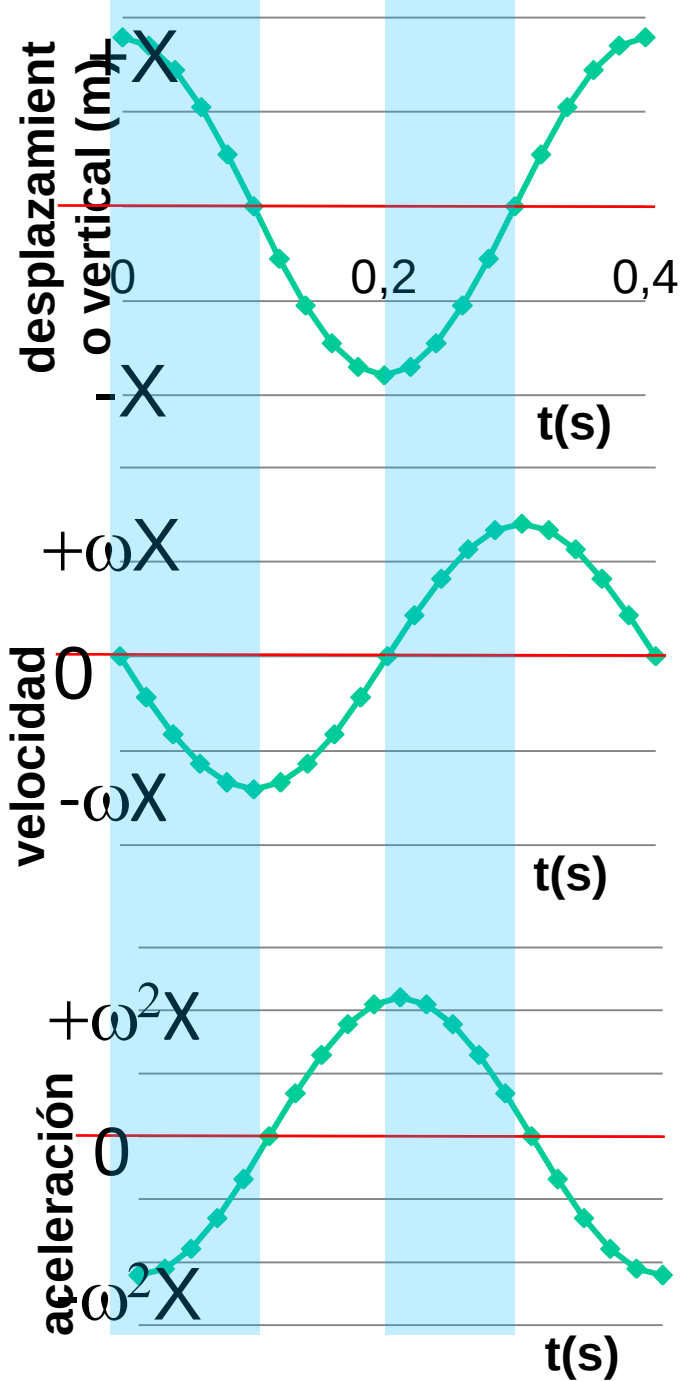
$$\ddot{x} = -X\omega^2 \cos(\theta_0 + \omega t) = -\omega^2 x(t) \quad \text{aceleración}$$

En un MAS la aceleración es proporcional al desplazamiento, pero opuesto en signo. La constante de proporcionalidad es la frecuencia angular, que para el caso de un resorte sería $\sqrt{k/m}$

En un periodo de oscilación

Lo que hace el resorte

Se ha considerado la fase
cero



$$x(t) = X \cos(\omega t)$$

$$v(t) = -X \omega \sin(\omega t)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Desarrollo teórico

$$\tau_z = -Lmg \sin\theta = I\alpha_z$$

$$\theta \approx 0$$

$$\sin\theta = \frac{x}{L} \approx \frac{s}{L} = \theta$$

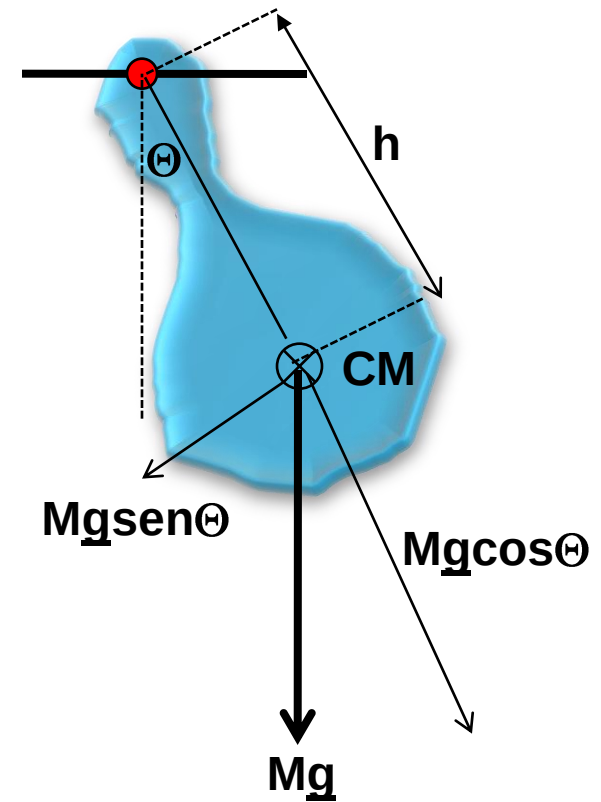
$$\alpha_z = -\frac{mgL\theta}{I} = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I}\theta = 0$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

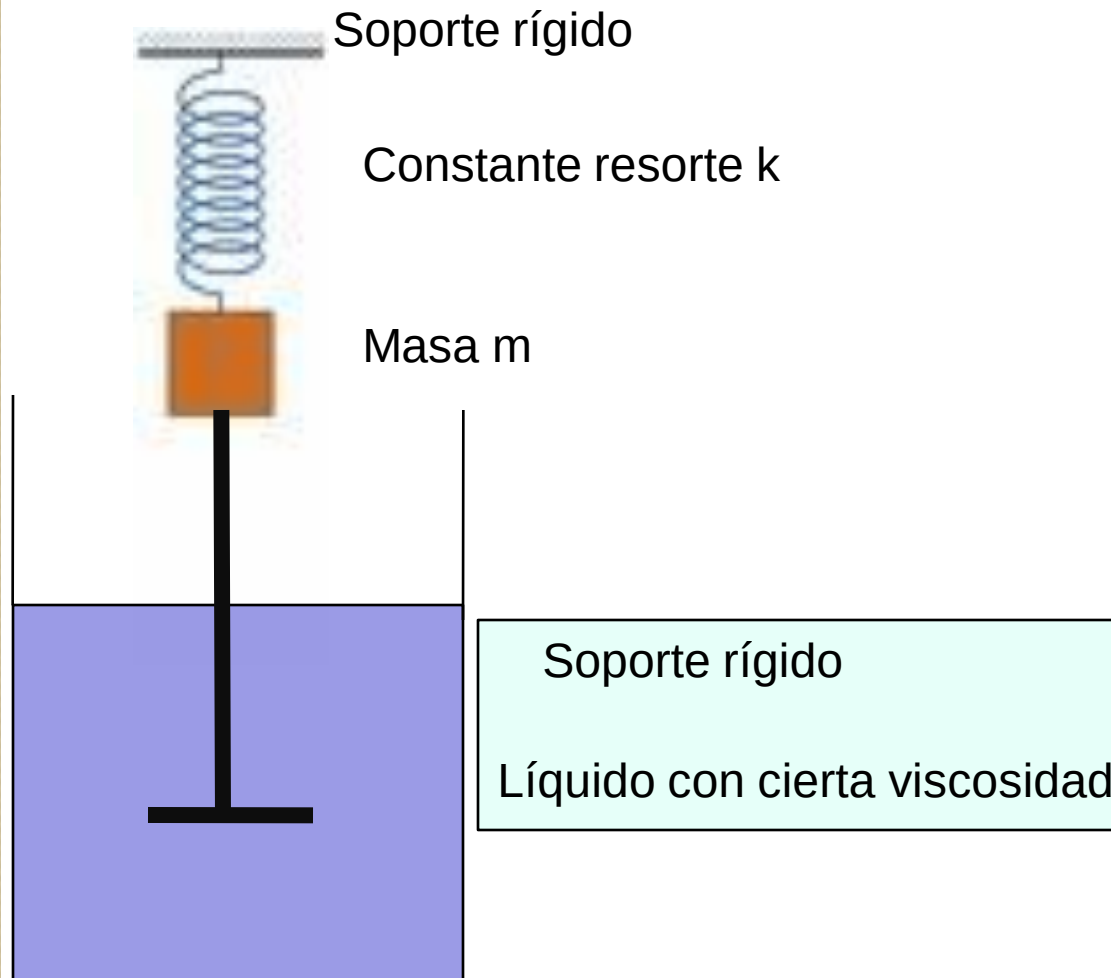


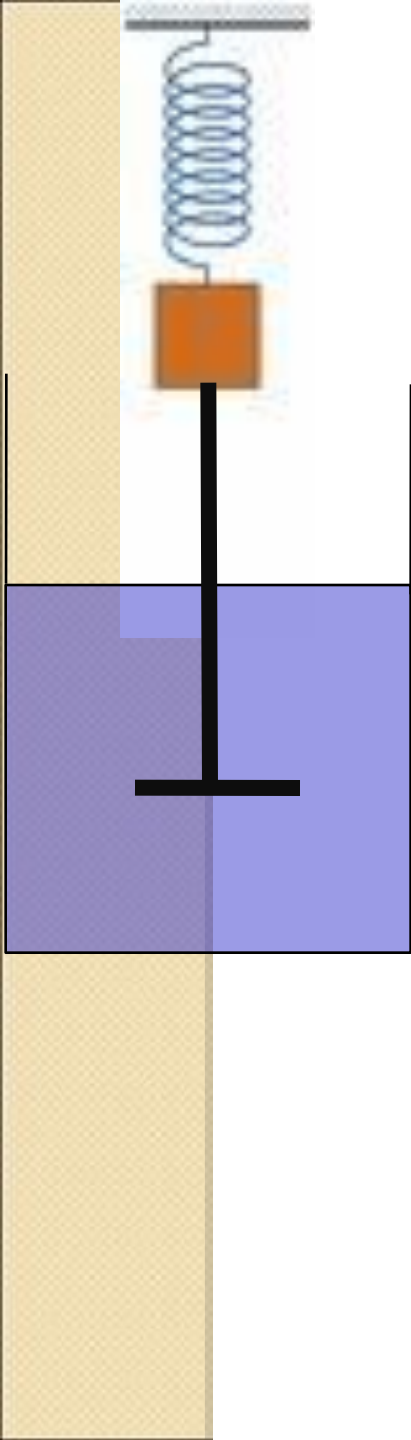
Oscilaciones amortiguadas

No todo oscila para siempre

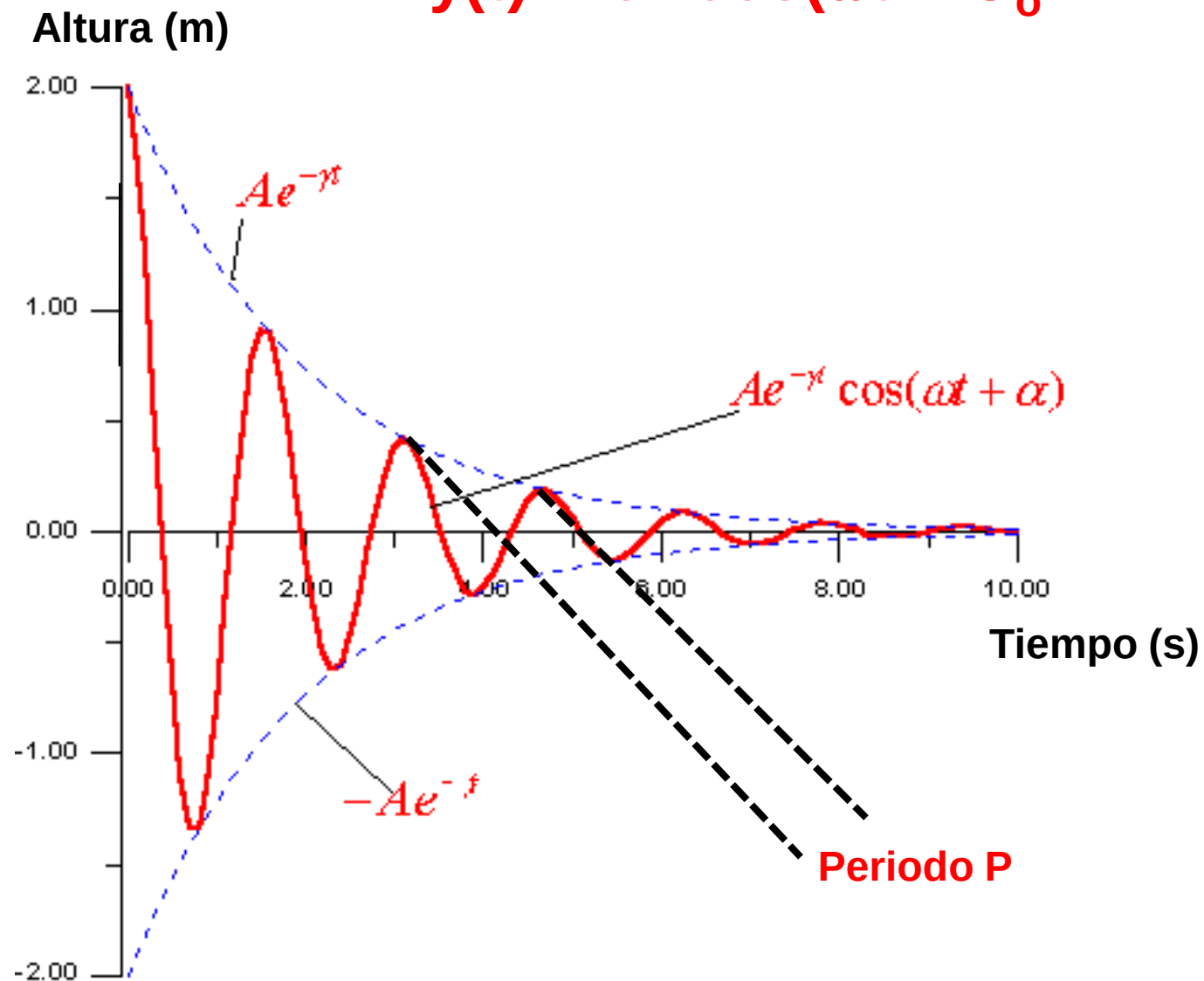
<http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/oscillations.htm#Quantitative>

Ejemplo idealizado de una oscilación amortiguada

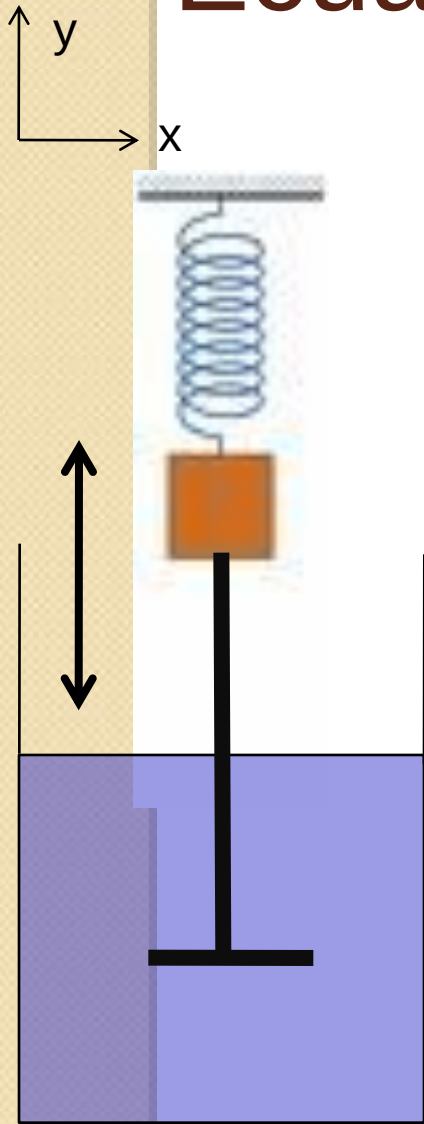




$$y(t) = Y e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \Theta_o)$$



Ecuación de movimiento



$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{\text{resorte}} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

$$ma_y = -ky + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

$$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} \propto \text{velocidad}$$

$$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} \propto (\text{velocidad})^2$$



$$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} \propto v \Rightarrow \text{fuerzas viscosas}$$

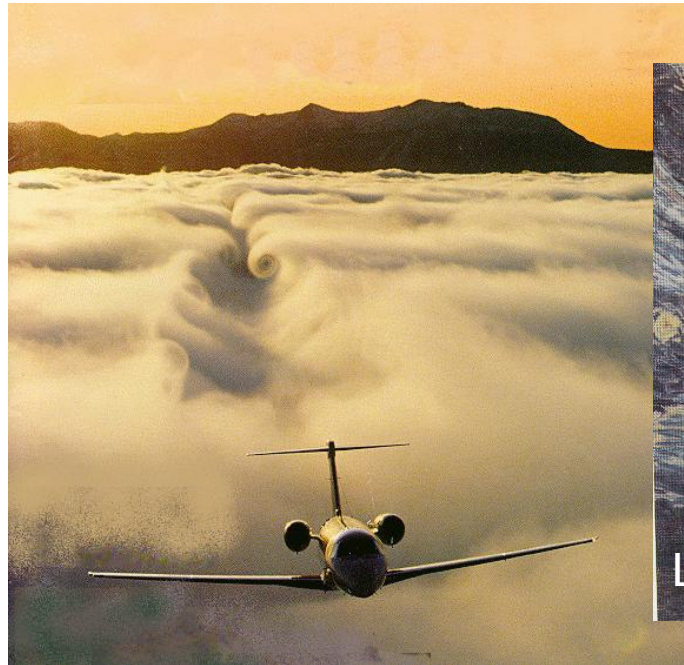
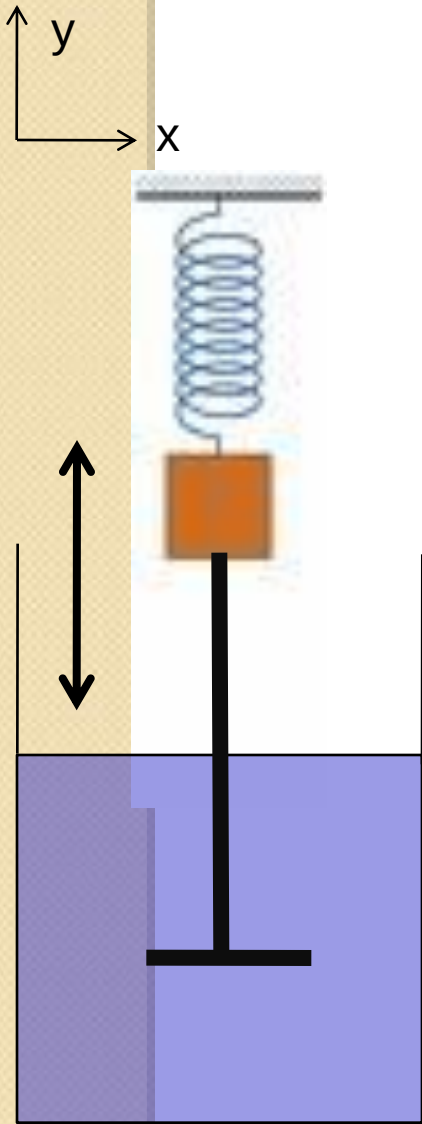
$$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} \propto v^2 \Rightarrow \text{turbulencias}$$

$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} \propto v \Rightarrow$ fuerzas viscosas

Fuerzas de Stokes

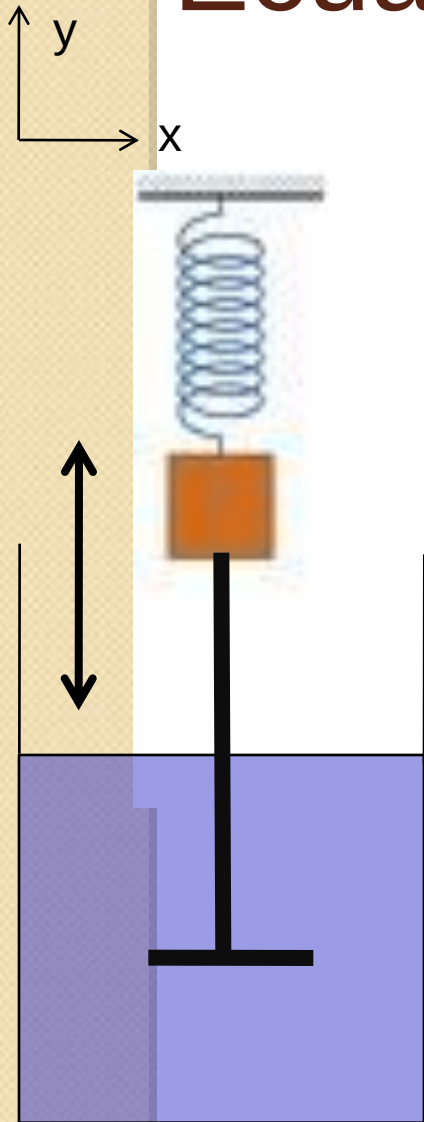
$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} \propto v^2 \Rightarrow$ turbulencias

Fuerza de arrastre de Rayleigh



La noche estrellada de Van Gogh

Ecuación de movimiento



$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{\text{resorte}} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

$$ma_y = -ky + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

caso fuerzas viscosas

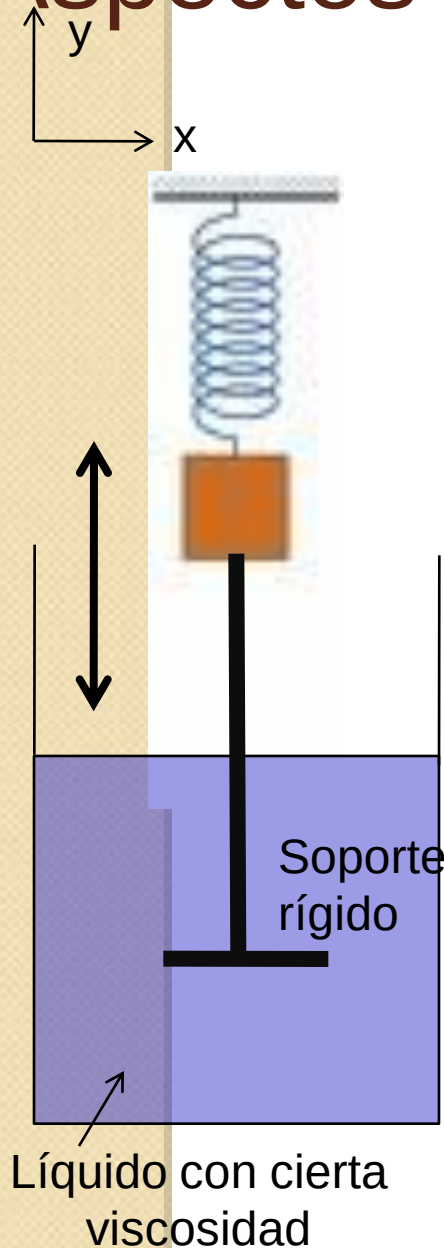
$$\vec{f}_{\text{amortiguamiento}} = -b\vec{v}$$

$$m \ddot{y} = -ky - bv$$

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + ky = 0$$

$$y(t) = Ye^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0)$$

Aspectos importantes de esta solución



$$m \ddot{y} + b \dot{y} + ky = 0$$

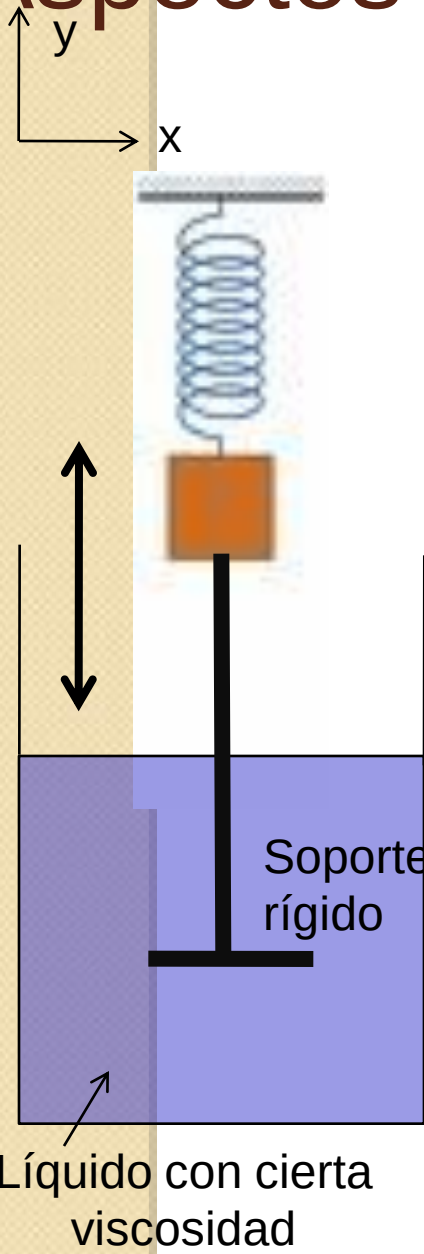
$$y(t) = Y e^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0)$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Y , Θ_0 dependiendo de de las condiciones iniciales de posición y velocidad

b =constante de amortiguamiento= f (viscosidad del líquido, forma del soporte)

Aspectos importantes de esta solución


$$y(t) = Y e^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0) \quad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$b = f(\text{viscosidad del líquido, forma del soporte})$

Viscosidad

- gases, líquidos en movimiento
- Depende de la temperatura (y presión)
- Oposición a las fuerzas de cizalla (fuerzas tangenciales) o resistencia a fluir
- Unidad: $\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ o Poise = $\text{g}/(\text{m} \cdot \text{s})$

Agua: $8.94 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Sangre: $3-4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Acetona: $3.06 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

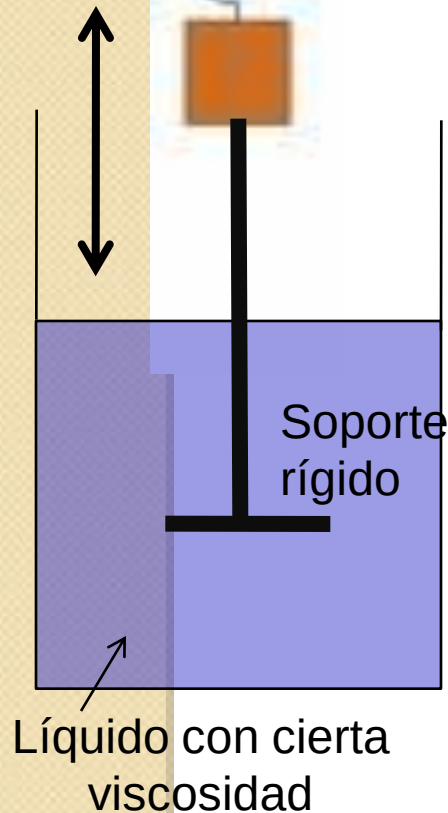
Aceite de oliva: $0.081 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Líquido con cierta viscosidad

Aspectos importantes de esta solución

$$y(t) = Y e^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0) \quad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

ω^*



- si $b=0 \rightarrow \omega^* = \omega_0 = \sqrt{k/m}$
 - se recupera el movimiento oscilatorio de un resorte sin amortiguamiento
- si $b \ll \sqrt{km}$
 - $\omega^* \sim \omega_0$ pero $\omega^* < \omega_0$
 - Oscilador está subamortiguado
- si $\omega^* = 0$ o $b = \sqrt{km}$
 - Amortiguamiento crítico
 - El oscilador vuelve a su posición de equilibrio en el mínimo tiempo posible sin oscilar
- si $b > \sqrt{km}$
 - ω^* se hace imaginario: Oscilador sobreamortiguado
 - El oscilador vuelve a su posición de equilibrio exponencialmente, pero toma más tiempo

Aspectos importantes de esta solución

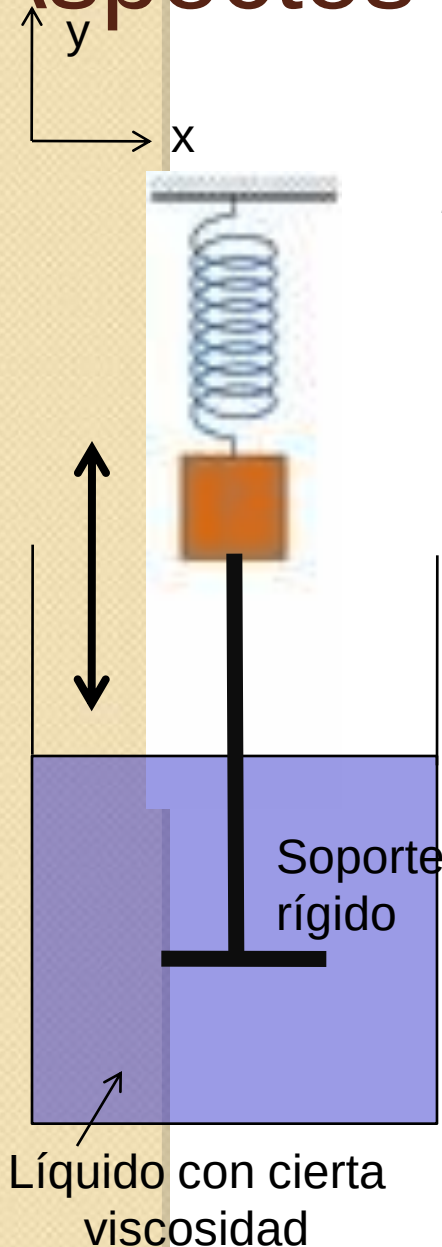
$$y(t) = Y e^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0) \quad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

ω^*

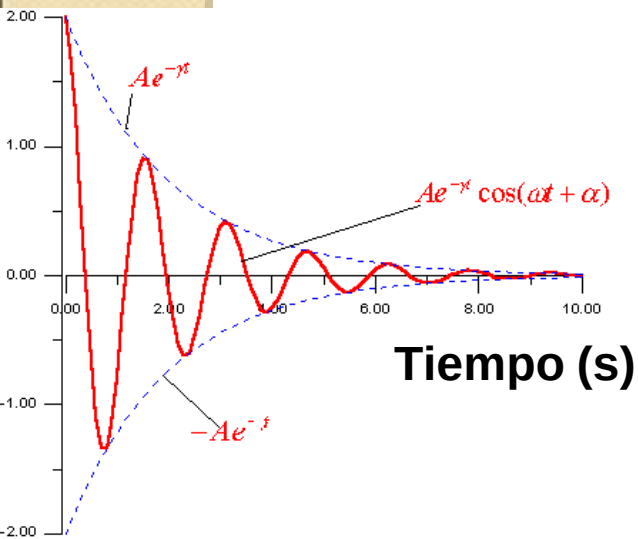
- si $\omega^* = 0$ o $b = \sqrt{km}$
 - Amortiguamiento crítico
- si $b > \sqrt{km}$
 - Oscilador sobreamortiguado

Importante para el diseño de absorbedores de choques en automóviles:

- el auto choca
- los resortes que conectan el chasis con las ruedas vuelve a su posición de equilibrio lentamente de tal forma que el pasajero no oscile ni mucho ni poco (respuesta del cuerpo a un choque)



Altura (m)



$$y(t) = Ye^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0)$$

$$e^{-bt/2m}$$

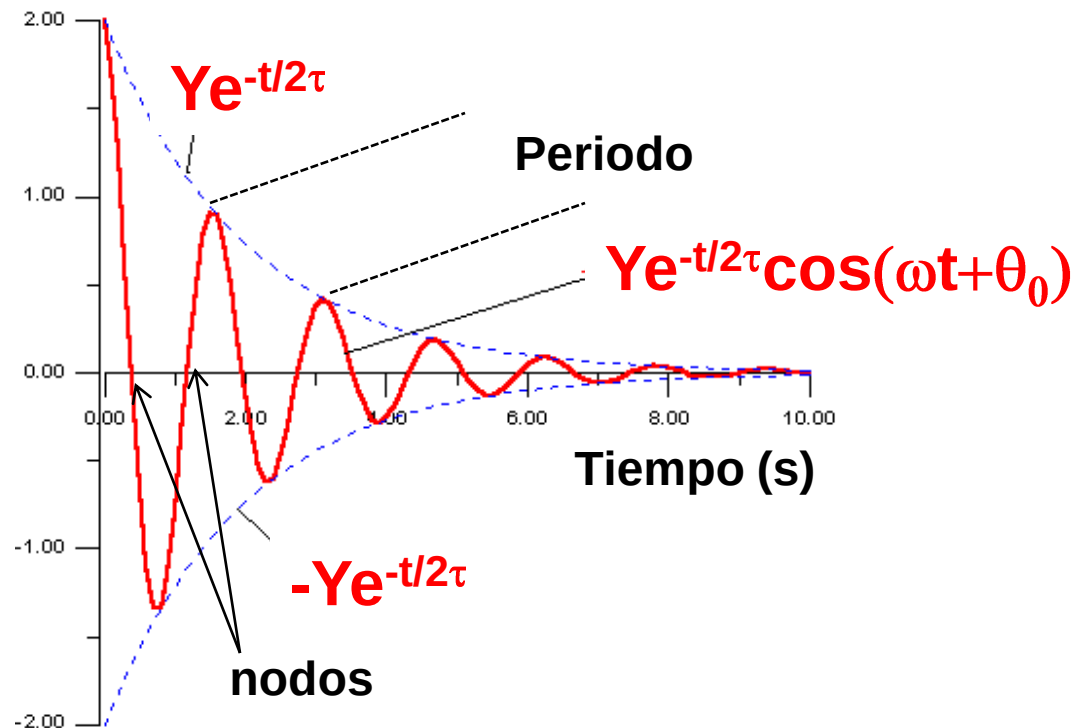
- como decae la oscilación: la envolvente de la oscilación
- $\gamma = b/2m = 1/\text{tiempo}$: constante de atenuamiento
- γ tiempo característico para que la oscilación decaiga $1/e \sim 0.368 \rightarrow \sim 2/3$ de señal se ha perdido
- Muchos fenómenos físicos se pueden caracterizar con decaimientos exponenciales: decaimientos radioactivos, procesos de difusión, enfriamiento de un horno, efecto túnel, etc

$$y(t) = Y e^{-bt/2m} \cos(\omega^* t + \theta_0)$$

$$\tau = 1/(b/m)$$

$$y(t) = Y e^{-t/2\tau} \cos(\omega^* t + \theta_0)$$

Altura (m)



Energía en una oscilación amortiguada

$$E_{\text{potencial}}(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kX^2 \cos^2(\theta_0 + \omega t)$$

$$E_{\text{cinética}}(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\omega^2} \right) X^2 \omega^2 \sin^2(\theta_0 + \omega t)$$

$$E_{\text{cinética}}(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kX^2 \sin^2(\theta_0 + \omega t)$$

MAS

$$E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} kX^2$$

**CONSTANTE E
INDEPENDIENTE DEL
TIEMPO para un MAS**

$$E \approx \frac{1}{2} kY^2 e^{-bt/m}$$

**Para pequeños
factores de
amortiguamiento**

Caída en el campo gravitacional: caso viscoso

$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{\text{peso}} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

$$ma_y = mg - b\vec{v}$$

$$m \ddot{y} = mg - bv$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} - g = 0$$

$$y(t) = g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right) \quad \text{Con } \tau = m/b$$

si no se acelera más $\Rightarrow$ velocidad terminal

$$mg = bv_{\text{terminal}}$$

$$v_{\text{terminal}} = \frac{mg}{b} = g\tau$$

Caída en el campo gravitacional

$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{\text{peso}} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

Caso viscoso

$$ma_y = -mg - b\vec{v}$$

$$m \ddot{y} = mg - bv$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} - g = 0$$

$$y(t) = g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right)$$

**Caso
generación de
turbulencias**

$$ma_y = -mg - cv_y^2$$

$$v_y(t) = V_t \frac{1 - e^{-gt/V_t}}{1 + e^{-gt/V_t}}$$

Oscilaciones forzadas

Compensación de la disipación

[http://www.animations.physics
.unsw.edu.au/jw/oscillations.h
tm#Quantitative](http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/oscillations.htm#Quantitative)

Ecuación de movimiento

$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{\text{resorte}} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}} + \vec{f}_{\text{forzamiento}}$$

$$ma_x = -kx + -b\vec{v} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

$$\ddot{m} x = -kx - bv + F_0 \sin(\omega t)$$

$\underline{\mathbf{f}}_{\text{forzamiento}}$ es periódica

ω : frecuencia angular de la fuerza

F_0 : constante (la amplitud de la fuerza)

Ecuación de movimiento

$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{\text{resorte}} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}} + \vec{f}_{\text{forzamiento}}$$

$$ma_x = -kx - b\vec{v} + \vec{f}_{\text{amortiguamiento}}$$

$$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m}$$

Solución

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m}$$

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\tan \delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Análisis de la solución

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

$$x(t) = \text{transiente} + B \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

Condición estable: entrada de energía por ciclo se iguala a la parte de pérdida de energía por ciclo

- parte amortiguada se anula: τ muy grande
- a partir de este tiempo amplitud es constante
- Amplitud B presenta una divergencia en $\omega = \omega_0$

La energía se transfiere en forma óptima

Análisis de la solución: τ muy grande

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \text{sen}(\omega t - \delta)$$

$$x(t) = \text{transiente} + B \text{sen}(\omega t - \delta)$$

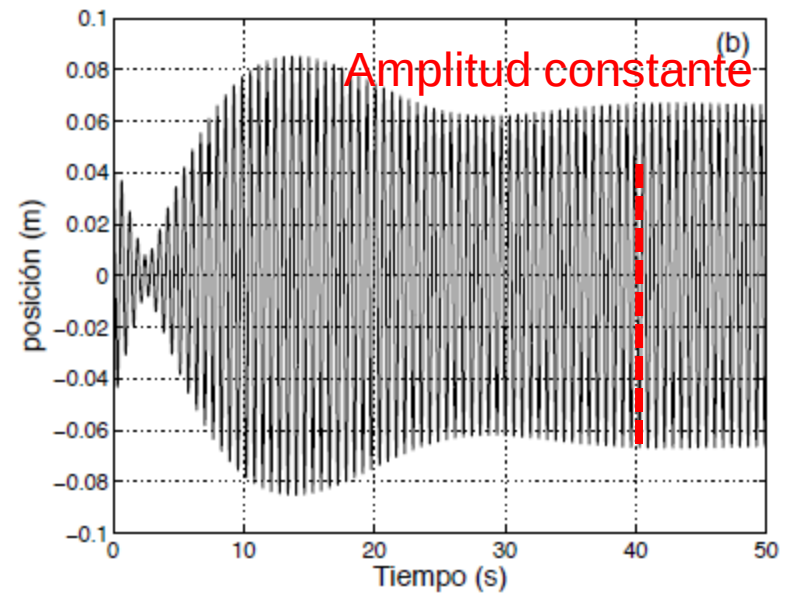
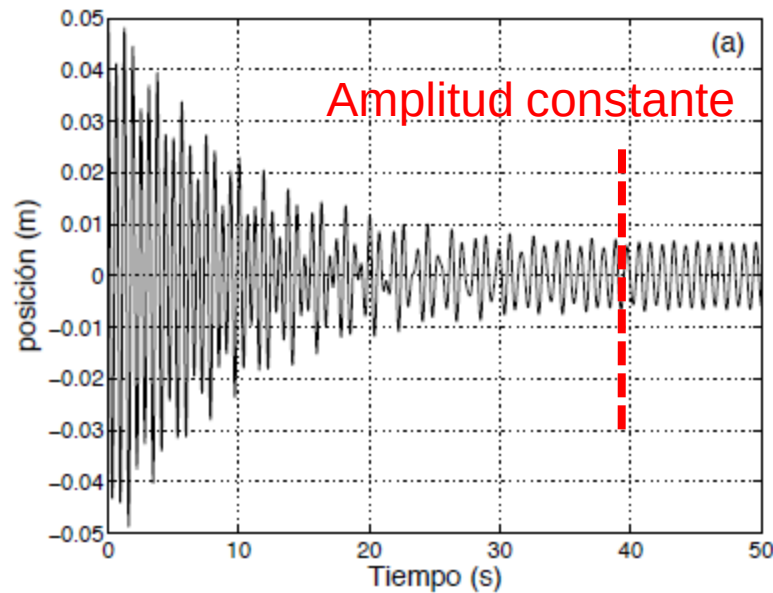


Figura 20: Ejemplos de soluciones $x(t)$ obtenidas con $M = 0,778$ kg, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $F_0 = 0,25$ N, $x(0) = 0,05$ m, $\dot{x}(0) = 0$. En (a), $\omega = 7$ rad/s y en (b) $\omega = 9,8$ rad/s. La frecuencia natural de resonancia es $\omega_0 = \sqrt{k/M} = 10$ rad/s.

Análisis de la solución: τ muy grande

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \text{sen}(\omega t - \delta)$$

$$x(t) = \text{transiente} + B \text{sen}(\omega t - \delta)$$

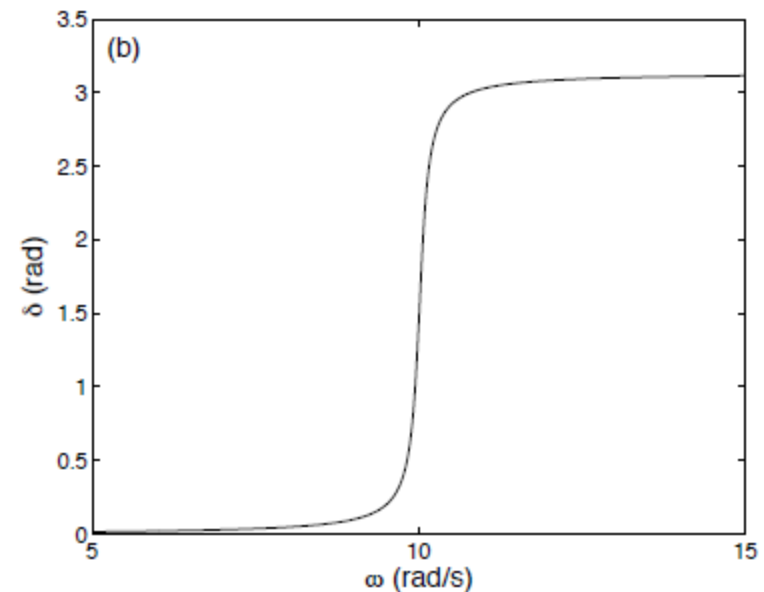
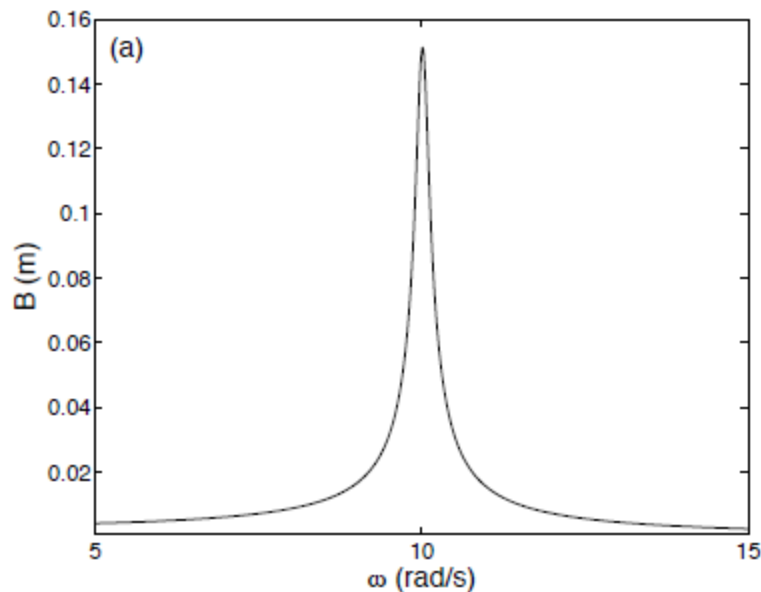


Figura 21: (a) Curva de resonancia de la amplitud B como función de ω . (b) Diferencia de fase δ como función de ω . Ambas curvas fueron obtenidas con $M = 0,778$ kg, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $F_o = 0,25$ N. La frecuencia natural de resonancia es $\omega_o = \sqrt{k/M} = 10$ rad/s.

Análisis de la solución

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0) + \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

$$x(t) = \text{transiente} + B \sin(\omega t - \delta)$$

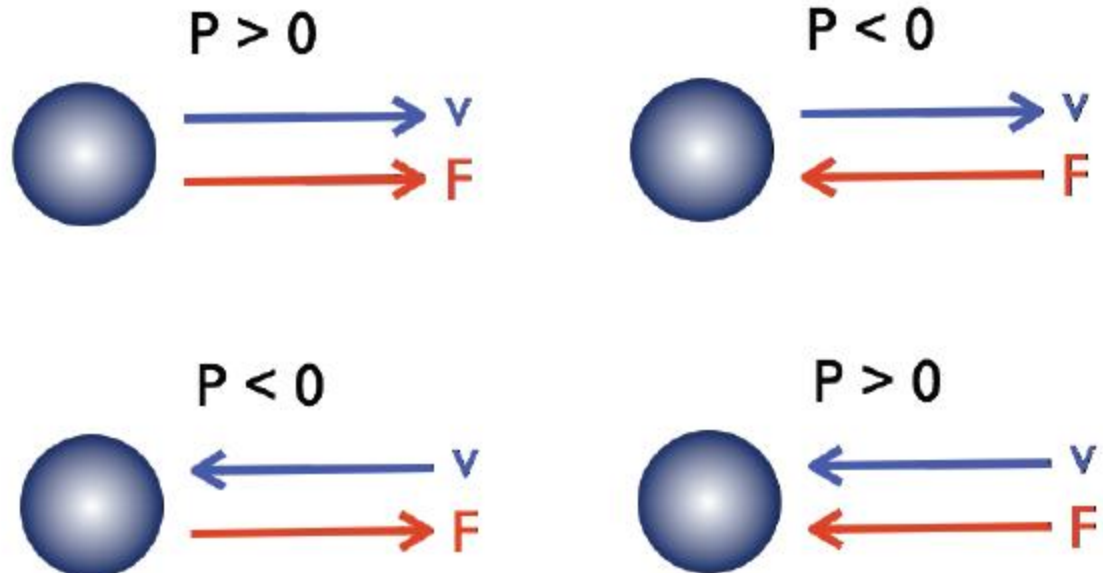
$$v(t) \propto \cos(\omega t - \delta)$$

Trabajo = $F \cdot \text{desplazamiento}$

La tasa de trabajo = $F \cdot \text{desplazamiento}/dt = \text{potencia} = F \cdot v$

$F \cdot v > 0$ si están en fase

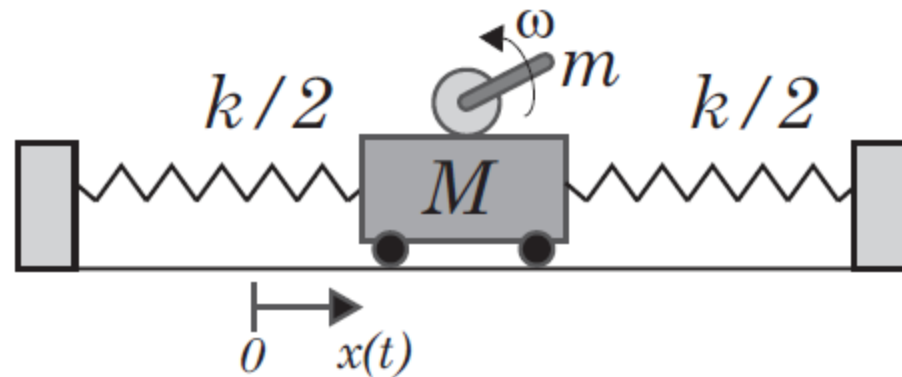
Desfase de $\pi/2$



Experiencia 6 de Octubre

**Descargar en U-cursos:
Apuntes-5CGuiaPractica.pdf**

archivo OscForzado.m y VerletOscForzado.m
Oscilaciones forzadas



determine el valor medio de la constante elástica total k , suponiendo que los resortes son iguales de constante $k/2$ (para resortes en paralelo se suman las constantes elásticas).