FI1002 Sistemas Newtonianos
Judit Lisoni
Sección 6

Unidad 5A Oscilaciones

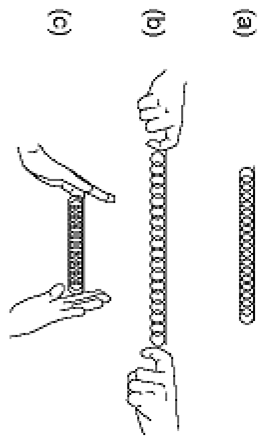
Contenidos

1. Repaso de oscilaciones

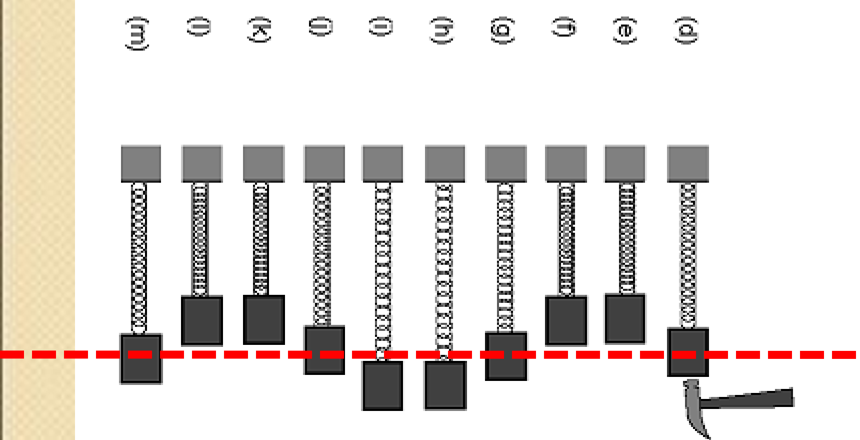
2. Oscilaciones amortiguadas

Movimiento armónico simple (MAS)

el resorte: sistema modelo



Una masa ligada a un resorte se moverá en forma sinusoidal



Posición de equilibrio

Desarrollo teórico

$$F_{neta} = ma_x = -Kx$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -Kx$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

Qué sucede si aplicamos la primera y segunda derivada a la ecuación **X(t)=Xcos(Θ$_o$+ωt)?**

$$\dot{x} = -X\omega sen(\theta_0 + \omega t)$$

$$\ddot{x} = (-X\omega sen(\theta_0 + \omega t))^{\bullet} = -X\omega^2 \cos(\theta_0 + \omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

Desarrollo teórico

x(t)=Xcos(Θ$_o$+ωt)

$$F_{neta} = ma_x = -Kx$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Periodo de oscilación de la masa m conectada al resorte de constante INDEPENDIENTE de la amplitud

Velocidad y aceleración de un MAS

$x(t)=X\cos(\Theta_o+\omega t)$

$$\dot{x} = -X\omega sen(\theta_0 + \omega t)$$ velocidad

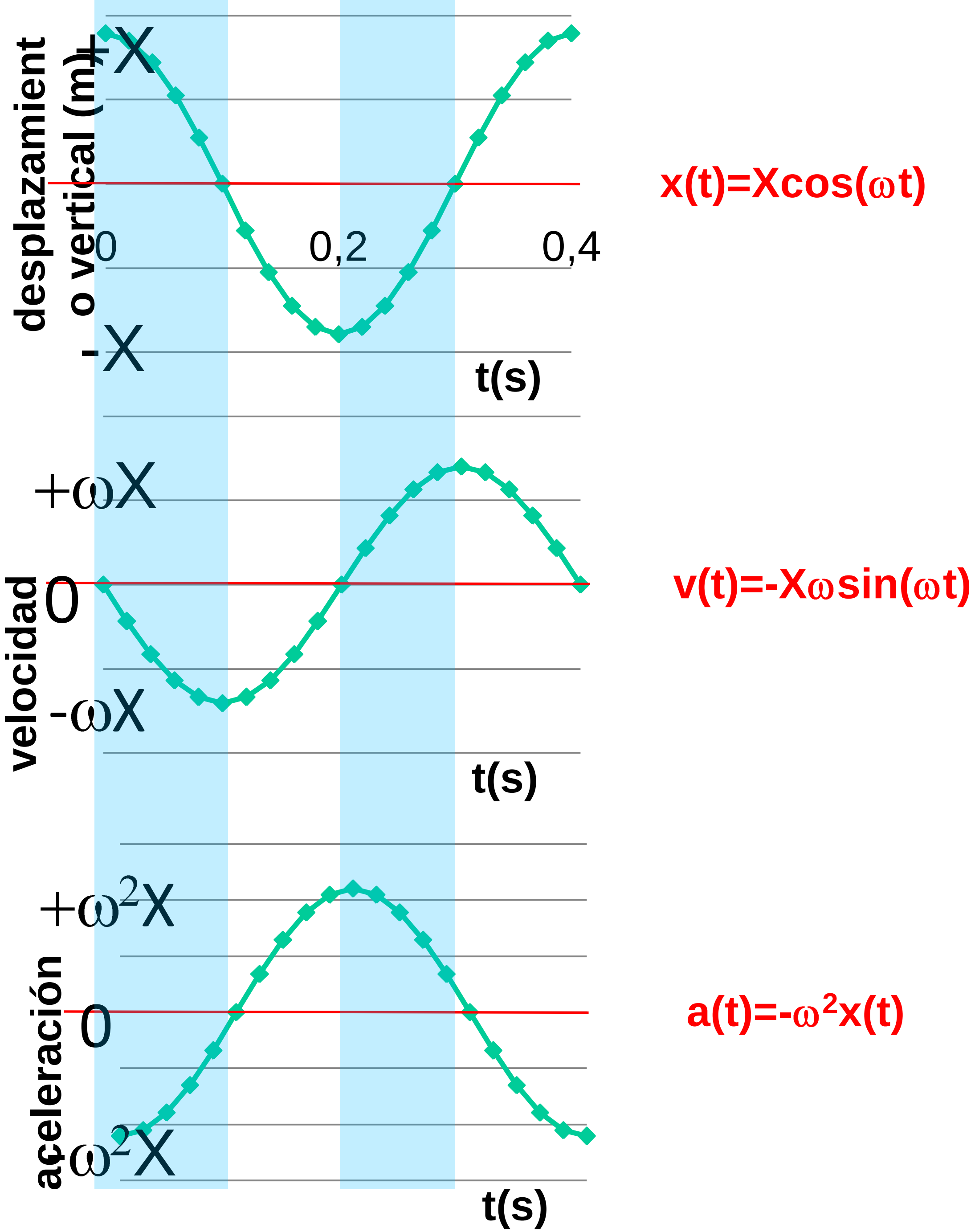
$$\ddot{x} = -X\omega^2 \cos(\theta_0 + \omega t) = -\omega^2 x(t)$$ aceleración

En un MAS la aceleración es proporcional al desplazamiento, pero opuesto en signo. La constante de proporcionalidad es la frecuencia angular, que para el caso de un resorte sería $\sqrt{k/m}$

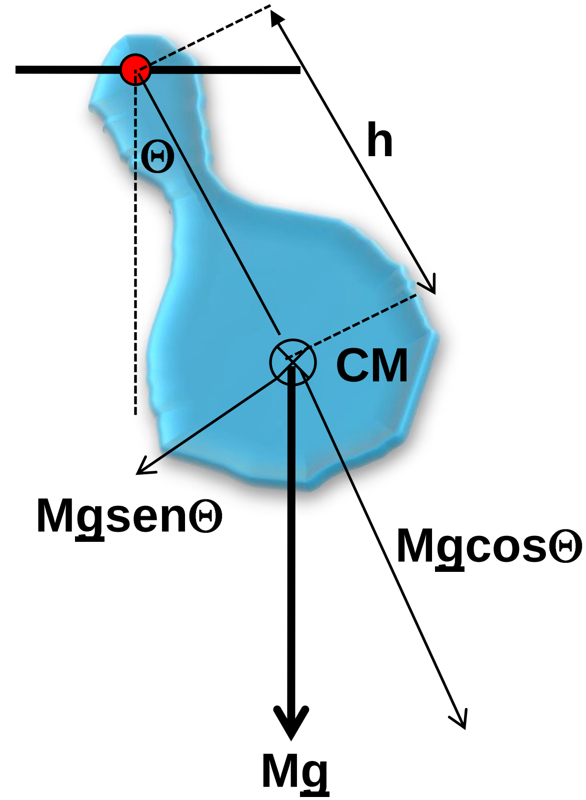
En un periodo de oscilación

Lo que hace el resorte

Se ha considerado la fase cero



Desarrollo teórico



$$\tau_z = -Lmgsen\theta = I\alpha_z$$

$$\theta \approx 0$$

$$sen\theta = \frac{x}{L} \approx \frac{s}{L} = \theta$$

$$\alpha_z = -\frac{mgL\theta}{I} = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I}\theta = 0$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

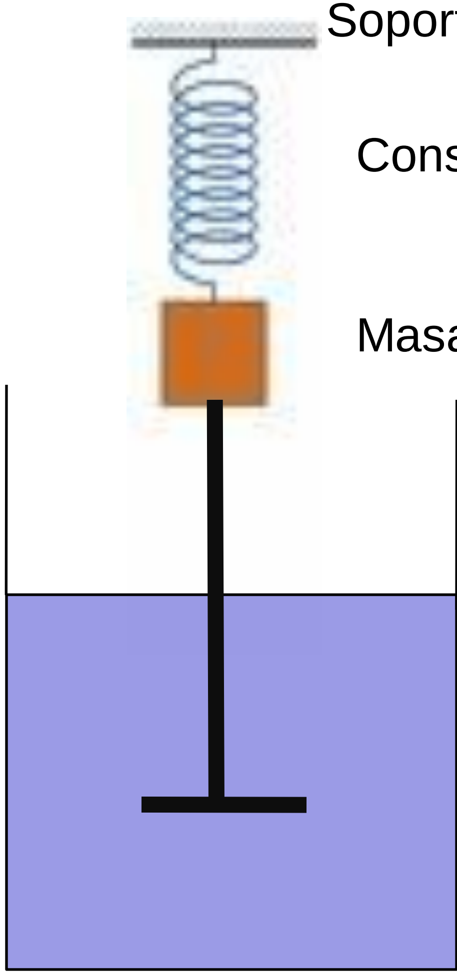
$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Oscilaciones amortiguadas

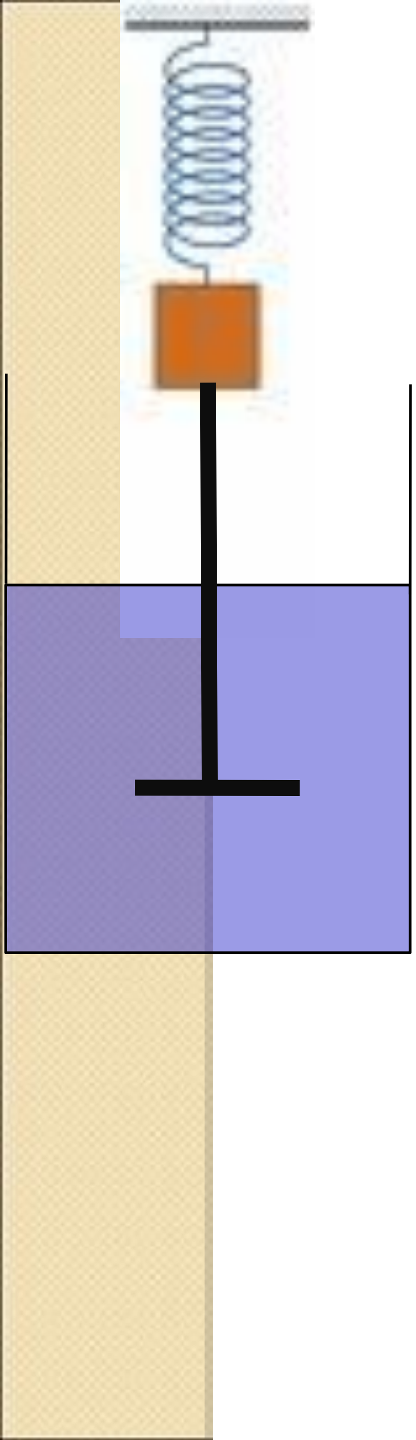
No todo oscila para siempre

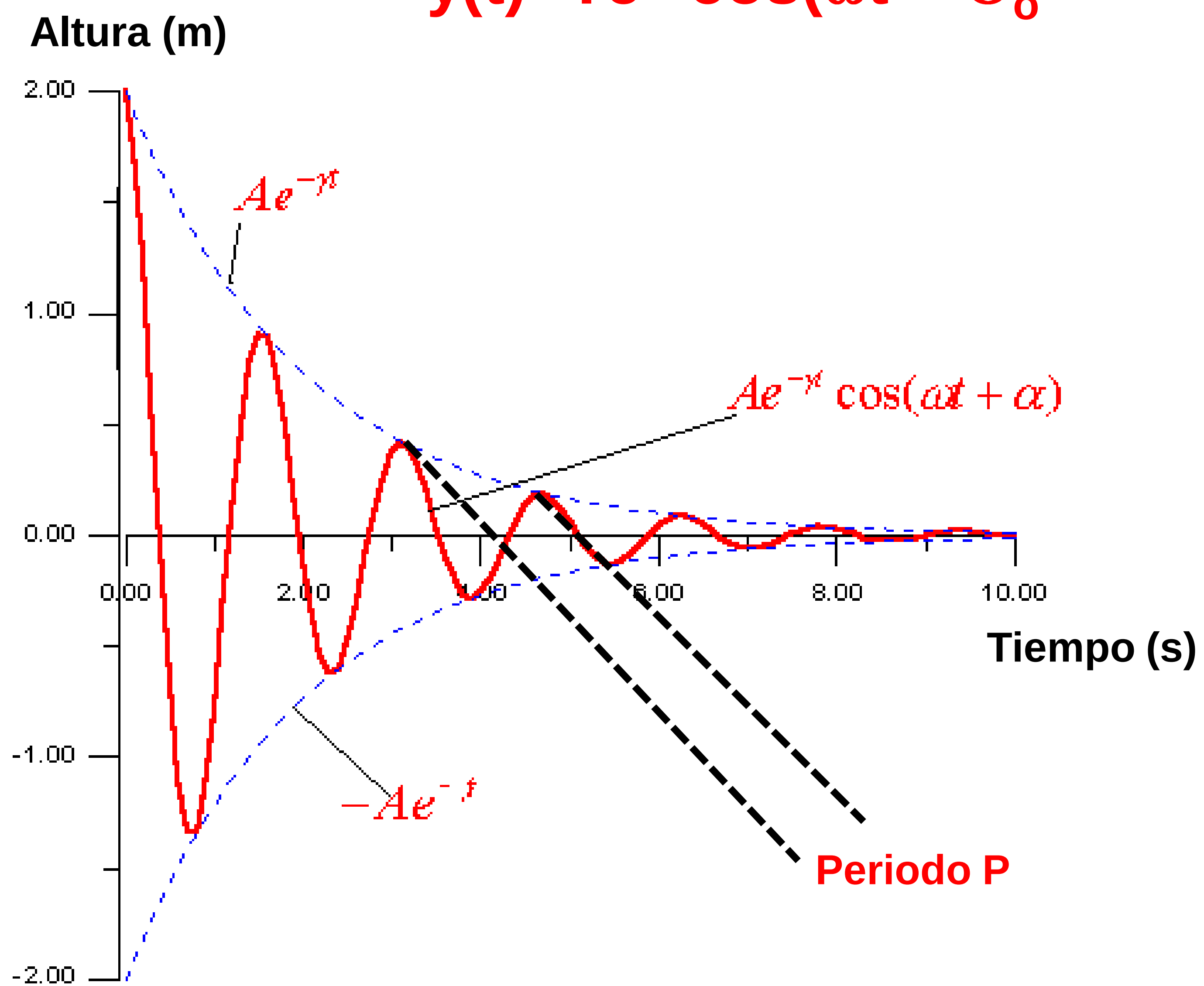
http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/oscillations.htm#Quantitative

Ejemplo idealizado de una oscilación amortiguada

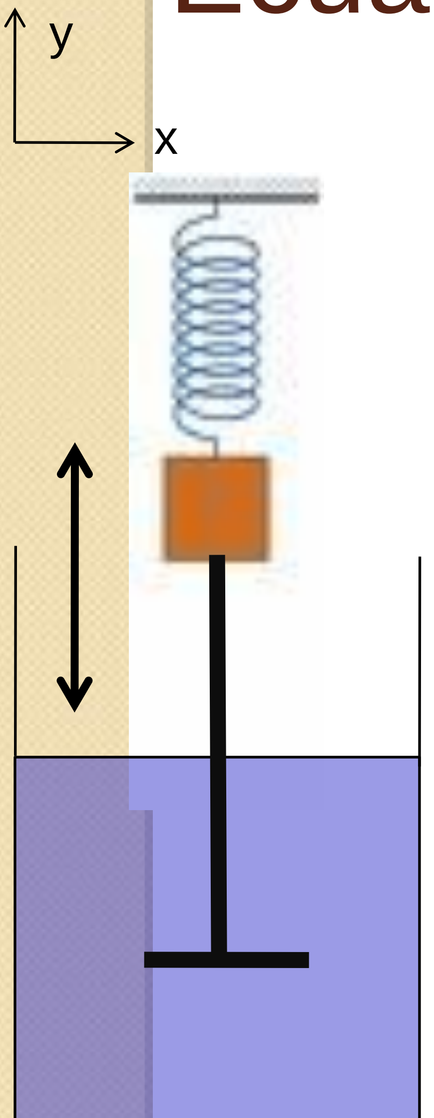


$$y(t)=Ye^{-\gamma t}\cos(\omega t + \Theta_o)$$





Ecuación de movimiento



$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{resorte} + \vec{f}_{amortiguamiento}$$

$$ma_y = -ky + \vec{f}_{amortiguamiento}$$

caso fuerzas viscosas

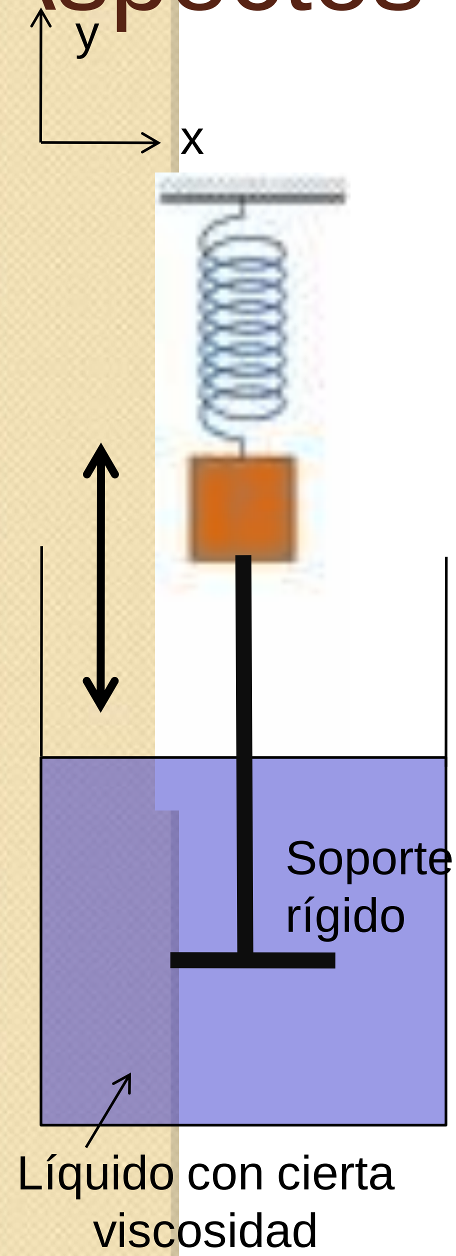
$$\vec{f}_{amortiguamiento} = -b\vec{v}$$

$$m\ddot{y} = -ky - bv$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0$$

$$\boxed{y(t) = Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^{*}t + \theta_0)}$$

Aspectos importantes de esta solución



$$m\ddot{y}+b\dot{y}+ky=0$$

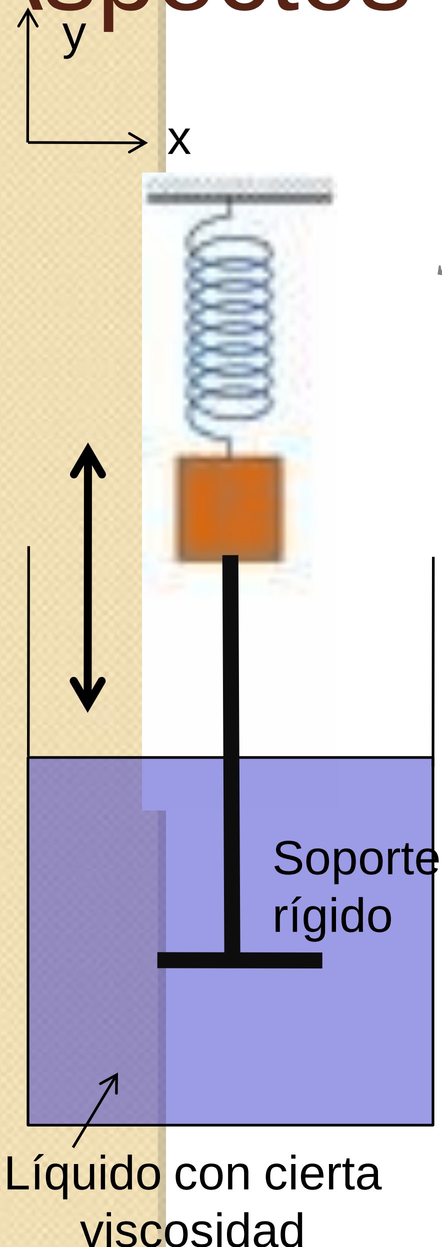
$$y(t)=Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^{*}t+\theta_{0})$$

$$\omega^{*}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^{2}}{4m^{2}}}$$

Y, Θ_0 dependiendo de de las condiciones iniciales de posición y velocidad

b=constante de amortiguamiento=f(viscosidad del líquido, forma del soporte)

Aspectos importantes de esta solución



$$y(t) = Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^* t + \theta_0) \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

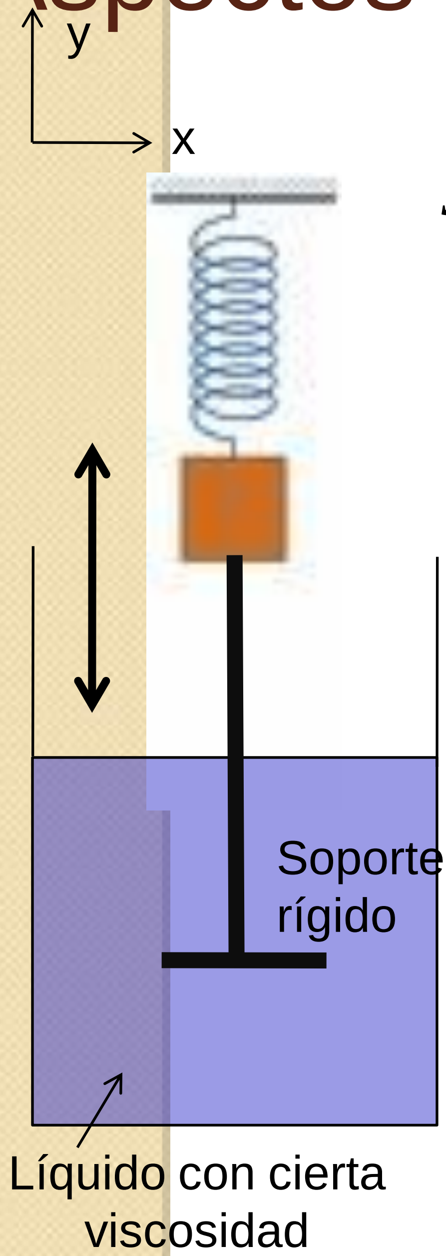
b=f(viscosidad del líquido, forma del soporte)

Viscosidad

- gases, líquidos en movimiento
- Depende de la temperatura (y presión)
- Oposición a las fuerzas de sizalle (fuerzas tangenciales) o resistencia a fluir
- Unidad: Pa*s=kg/(m*s) o Poise=g/(m*s)

Agua:	8.94×10^{-4} Pa*s
Sangre:	$3\text{-}4\times10^{-3}$ Pa*s
Acetona:	3.06×10^{-4} Pa*s
Aceite de oliva:	0.081 Pa*s

Aspectos importantes de esta solución

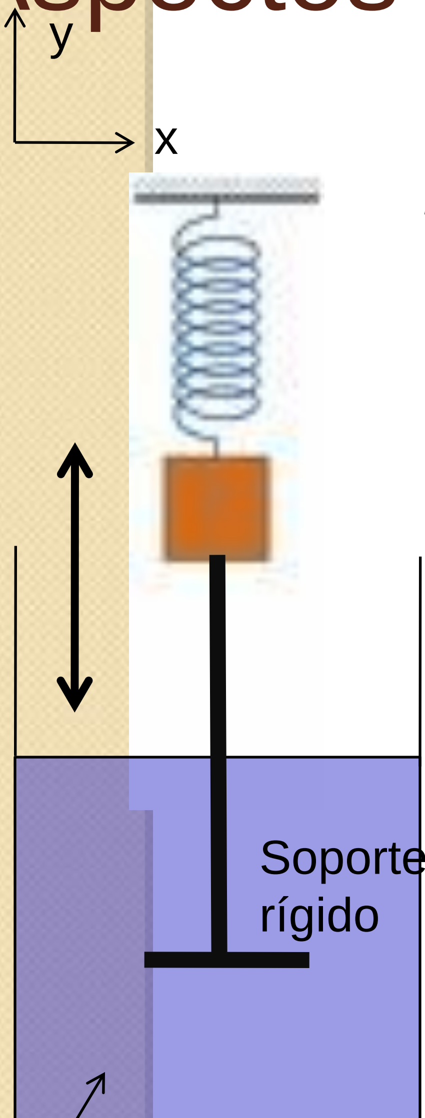


$$y(t) = Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^* t + \theta_0) \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

ω^*

- si b=0 → $\omega^* = \omega_0 = \sqrt{k/m}$
  - se recupera el movimiento oscilatorio de un resorte sin amortiguamiento
- si $b \ll \sqrt{km}$
  - $\omega^* \sim \omega_0$ pero $\omega^* < \omega_0$
  - Oscilador está subamortiguado
- si $\omega^* = 0$ o $b = \sqrt{km}$
  - Amortiguamiento crítico
  - El oscilador vuelve a su posición de equilibrio en el mínimo tiempo posible sin oscilar
- si $b > \sqrt{km}$
  - ω^* se hace imaginario: Oscilador sobreamortiguado
  - El oscilador vuelve a su posición de equilibrio exponencialmente, pero toma más tiempo

Aspectos importantes de esta solución



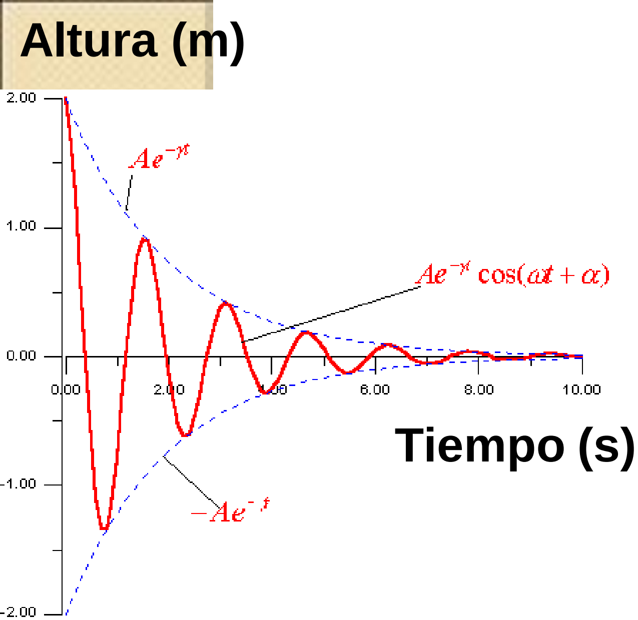
$$y(t) = Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^{*}t + \theta_0) \qquad \omega^{*} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

ω^*

- si $\omega^* = 0$ o $b = \sqrt{km}$
  - Amortiguamiento crítico
- si $b > \sqrt{km}$
  - Oscilador sobreamortiguado

Importante para el diseño de absorbedores de choques en automóviles:

- el auto choca
- los resortes que conectan el chasis con las ruedas vuelve a su posición de equilibrio lentamente de tal forma que el pasajero no oscile ni mucho ni poco (respuesta del cuerpo a un choque)



$$y(t) = Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^{*}t + \theta_0)$$

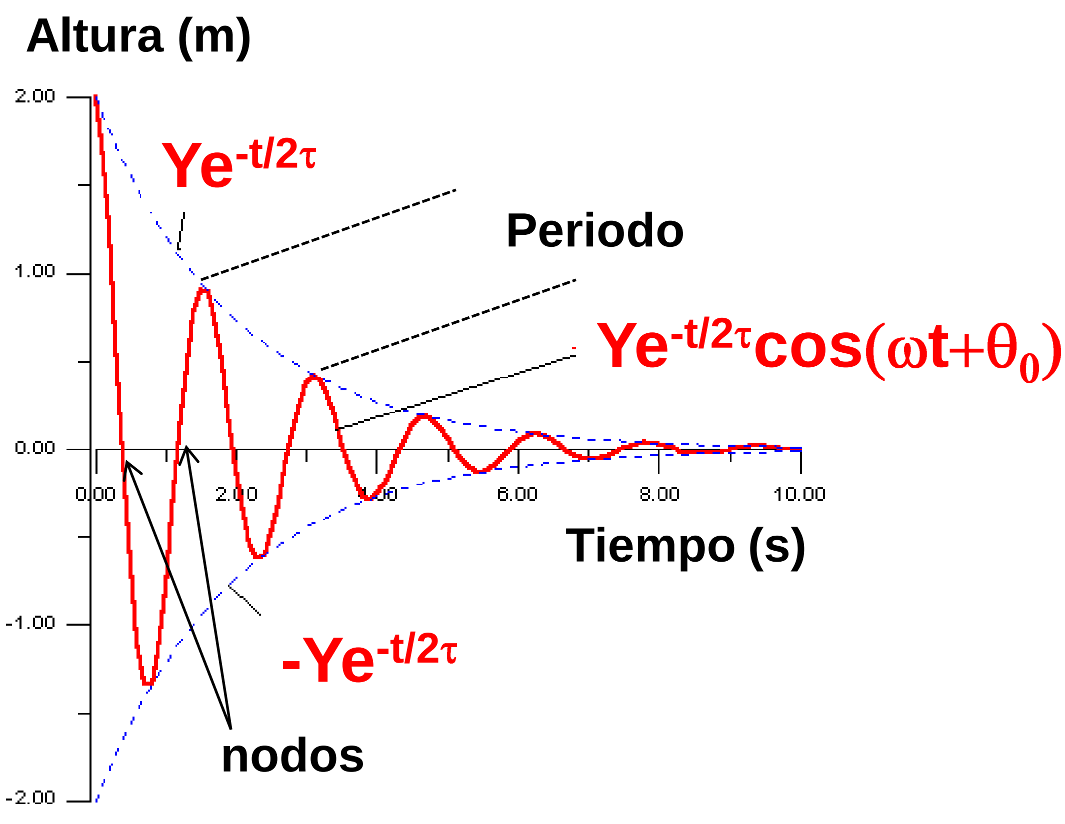
$$e^{-bt/2m}$$

- como decae la oscilación: la envolvente de la oscilación
- $\gamma =$ b/2m=1/tiempo: constante de atenuamiento
- γ tiempo característico para que la oscilación decaiga 1/e~0.368 → ~2/3 de señal se ha perdido
- Muchos fenómenos físicos se pueden caracterizar con decaimientos exponenciales: decaimientos radioactivos, procesos de difusión, enfriamiento de un horno, efecto túnel, etc

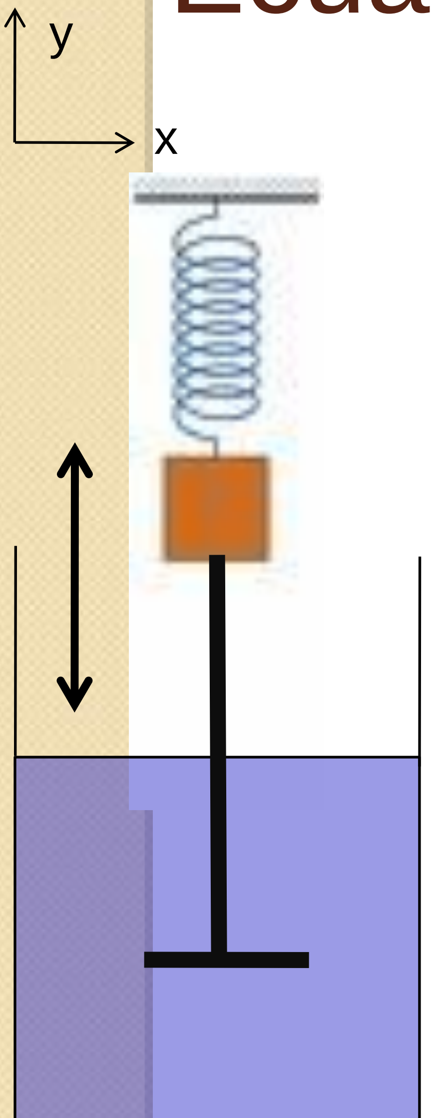
$$y(t) = Ye^{-bt/2m}\cos(\omega^{*}t + \theta_0)$$

$$\tau = 1/(b/m)$$

$$y(t) = Ye^{-t/2\tau}\cos(\omega^{*}t + \theta_0)$$



Ecuación de movimiento



$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{resorte} + \vec{f}_{amortiguamiento}$$

$$ma_y = -ky + \vec{f}_{amortiguamiento}$$

$$\vec{f}_{amortiguamiento} \; \alpha \; velocidad$$

$$\vec{f}_{amortiguamiento} \; \alpha \; (velocidad)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{f}_{amortiguamiento} \; \alpha \; v \Rightarrow \text{fuerzas viscosas}$$

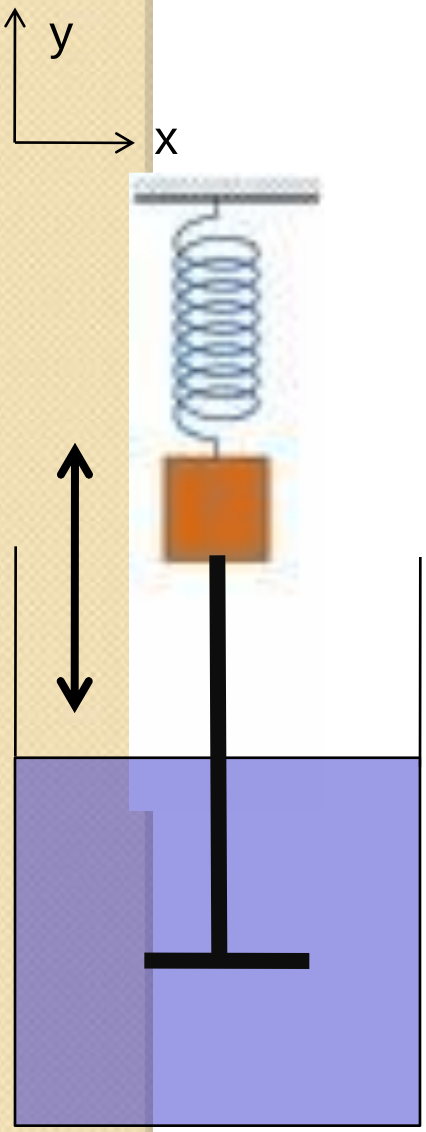
$$\vec{f}_{amortiguamiento} \; \alpha \; v^2 \Rightarrow turbulencias$$

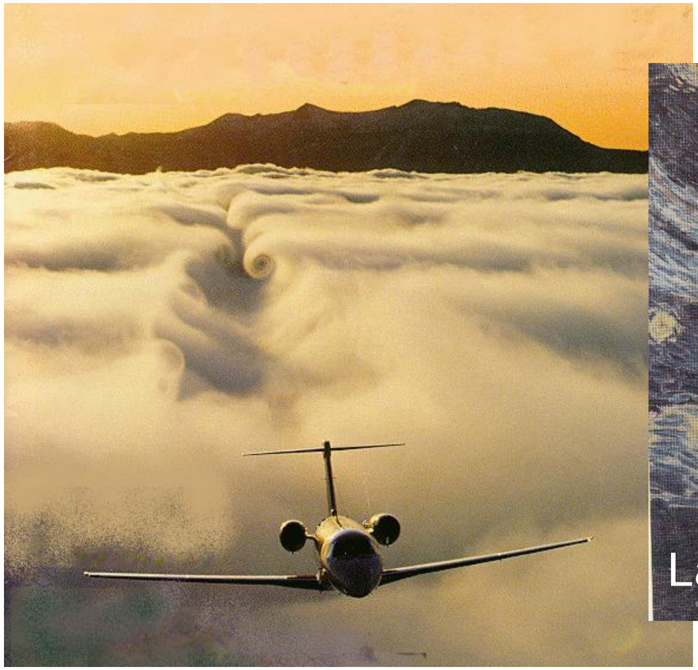
$\vec{f}_{amortiguamiento} \ \alpha \ v \Rightarrow$ fuerzas viscosas

Fuerzas de Stokes

$\vec{f}_{amortiguamiento} \ \alpha \ v^2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{turbulencias}}$

Fuerza de arrastre de Rayleigh





La noche estrellada de Van Gogh

Energía en una oscilación amortiguada

$$E_{potencial}(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\theta_0 + \omega t)$$

$$E_{cinética}(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(\frac{k}{\omega^2})X^2\omega^2\sin^2(\theta_0 + \omega t)$$

$$E_{cinética}(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX^2\sin^2(\theta_0 + \omega t)$$

MAS

$$E_{potencial} + E_{cinética} = \frac{1}{2}kX^2$$

CONSTANTE E INDEPENDIENTE DEL TIEMPO para un MAS

$$\boxed{E \approx \frac{1}{2}kY^2e^{-bt/m}}$$

Para pequeños factores de amortiguamiento

Caída en el campo gravitacional: caso viscoso

$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{peso} + \vec{f}_{amortiguamiento}$$

$$ma_y = mg - b\vec{v}$$

$$m\ddot{y} = mg - bv$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} - g = 0$$

$$y(t) = g\tau^2\left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1\right)$$ Con τ=m/b

$$\text{si no se acelera más} \Rightarrow \text{velocidad terminal}$$

$$\mathrm{mg} = \mathrm{bv}_{\mathrm{terminal}}$$

$$v_{terminal} = \frac{mg}{b} = g\tau$$

Caída en el campo gravitacional

$$\sum \vec{F}_y = \vec{f}_{peso} + \vec{f}_{amortiguamiento}$$

Caso viscoso

$$ma_y = -mg - b\vec{v}$$

$$m\ddot{y} = mg - bv$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} - g = 0$$

$$y(t) = g\tau^2\left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1\right)$$

Caso generación de turbulencias

$$ma_y = -mg - cv_y^2$$

$$v_y(t) = V_t \frac{1 - e^{-gt/V_t}}{1 + e^{-gt/V_t}}$$

Experiencia 6 de Octubre

Páginas 225-229 del apuntes

Oscilaciones amortiguadas: un péndulo formado por un globo