FI1002 Sistemas Newtonianos
Judit Lisoni
Sección 6

Unidad 4C Sólidos rígidos: Torque y momento angular
Unidad 4D Sólidos rígidos: Rodadura o rodar sin resbalar

Contenidos

Unidad 4C

1. Forma rotacional de la segunda ley de Newton: momento angular y torque
2. Momento angular de un sistema de partículas
3. Momento angular de un cuerpo rígido que rota a través de un eje fijo
4. Conservación del momento angular

Unidad 4D

Movimiento de un cuerpo rígido: rotación y translación. Conservación de la energía mecánica

Forma rotacional de la segunda ley de Newton momento angular y torque

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{para una partícula}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0\,(\text{en ausencia de } \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}}) \Rightarrow \vec{F}_{neta} = 0$$

$$\vec{F} \Leftrightarrow \vec{\tau} \quad \text{¿Cuál es la contraparte rotacional de la 2a. Ley de Newton?}$$

$$\vec{\tau}_{neto} = \vec{r} \times \vec{F}_{neto}$$

$$\vec{\tau}_{neto} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{r}\times\vec{v})}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}} + \vec{r}\times\frac{d(\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{\tau}_{neto} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d(\vec{r}\times\vec{v})}{dt} \qquad \mathrm{m} = \text{constante}$$

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

$$\vec{\tau}_{neto} = m\frac{d(\vec{r}\times\vec{v})}{dt}$$

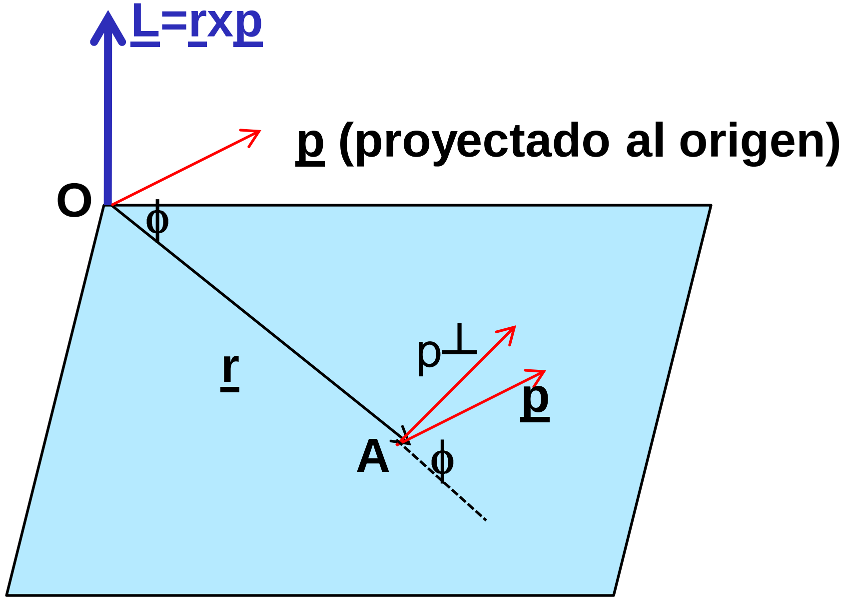
$$\vec{\tau}_{neto} = m\frac{d(\vec{r}\times\vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{neto} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \text{con} \qquad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$$

L=momento angular

Unidades=L^2M/T

La suma (vectorial) de todos los torques actuando sobre una partícula es igual a la tasa de cambio temporal del momento angular de esa partícula



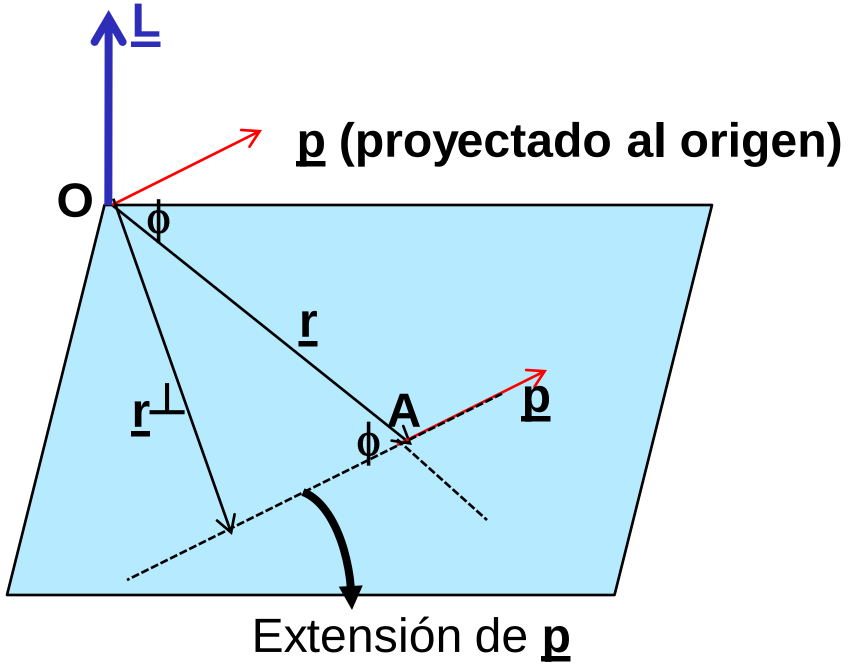
Observaciones

1. **L** tiene sentido con respecto a un origen especificado
2. **L** es penpendicular al plano(**r**,**v**)

L=**r**x**p**=I**r**ImI**v**Isen(ϕ)

L=rmv⊥ =r⊥mv

r⊥=brazo del momento



Momento angular de un sistema de partículas

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i \qquad \mathrm{i = partícula\ i\text{-}ésima}$$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{\,neto}$$

$$\vec{\tau}_i \Rightarrow \vec{F}_i \qquad \mathrm{fuerzas\ que\ actúan\ en\ la\ i\text{-}ésima\ partícula}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{internas} + \vec{F}_{externas} \Rightarrow \vec{\tau}_{internos} + \vec{\tau}_{externos}$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}_{neto}}$$

El torque (externo) neto actuando en un sistema de partículas es igual a las tasa de cambio temporal del momento angular total del sistema

$$\underbrace{\vec{\tau}_{neto} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \Leftrightarrow \vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

τ y **L** deben ser medidos con respecto al mismo origen

Momento angular de un cuerpo rígido que rota a través de un eje fijo

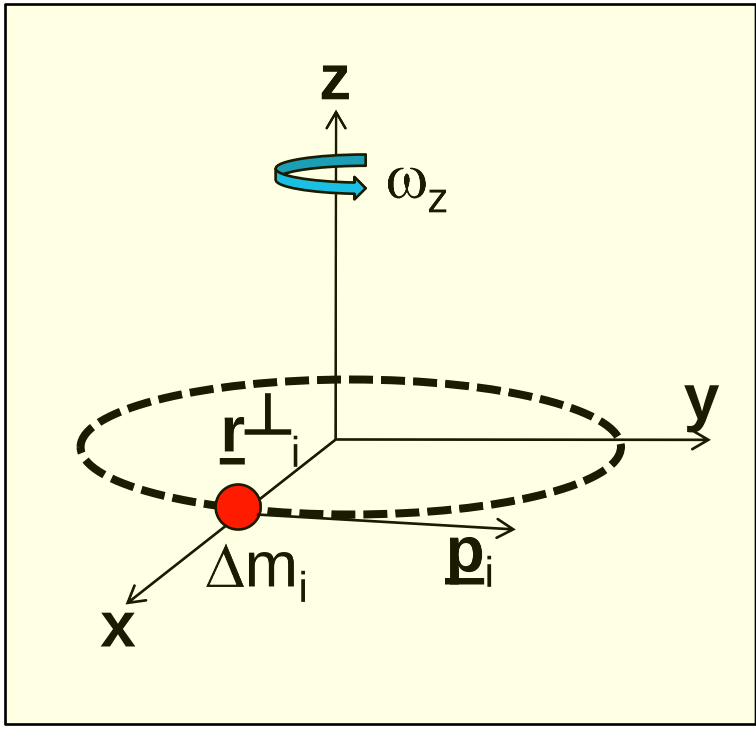
$$\vec{l}_i \perp (\vec{r}_i, \vec{p}_i)$$

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i = r_i \Delta m_i v_i \hat{k}$$

$$v_i = \omega_i r_i$$

$$\vec{l}_i = r_i \Delta m_i \omega_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega = l_{iz}$$

$$\sum_{i=1}^{N} l_{iz} = (\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2)\omega_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta I_i \omega_z = I\omega_z$$



$$\boxed{\vec{L} = I_O \vec{\omega}}$$

La velocidad angular ω es un VECTOR!!!

Conservación del momento angular

1. Conservación de la energía mecánica
2. Conservación del momento lineal d**P**/dt=0
3. Conservación del momento angular d**L**/dt=0

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = constante \Rightarrow \vec{\tau}_{neto} = 0$$

$$\vec{L}_{t1} = \vec{L}_{t2} \quad \text{si} \quad \vec{\tau}_{neto} = 0$$

Observación: recordar que son VECTORES
L=(L_x, L_y, L_z) ➔ τ=(τ_x, τ_y, τ_z) si existe un τ_i=0 ➔ L_i en esa componente no debería cambiar

Conservación del momento angular

Para el caso de un cuerpo rígido girando sobre un eje

$\underline{\mathbf{L}}_1 = \underline{\mathbf{L}}_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

Ejemplos:

1. Patinadora ejecutando spinning
2. Nadadores salto en trampolín
3. Otros?

OJO: la conservación del momento angular es válida a velocidades cercanas a la velocidad de luz (teoría especial de la relatividad) o para dimensiones cercanas a las atómicas (mecánica cuántica)

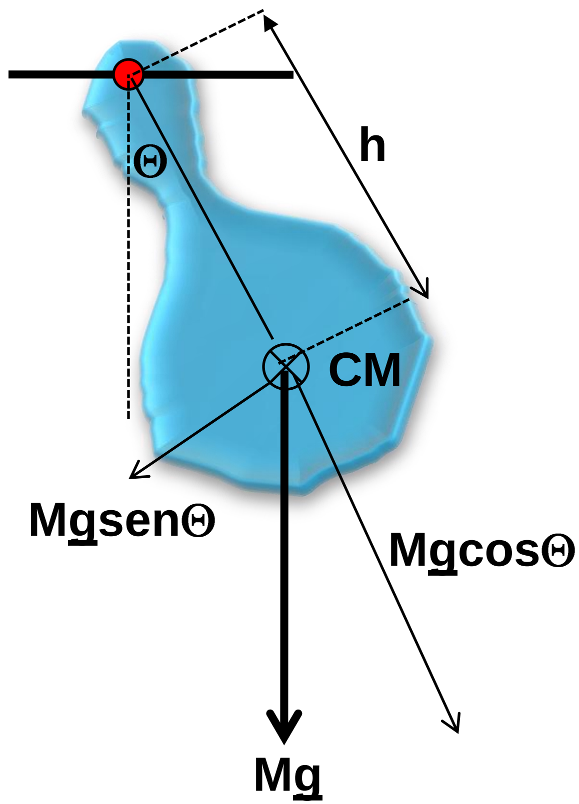
Translación		Rotación	
Fuerza	$\underline{\mathbf{F}}$	Torque	$\underline{\tau}=\underline{\mathbf{r}}\mathrm{x}\underline{\mathbf{F}}$
Momento lineal	$\underline{\mathbf{P}}_{sistema}$	Momento angular	$\underline{\mathbf{L}}=\underline{\mathbf{r}}\mathrm{x}\underline{\mathbf{p}}$
Momento lineal para un sistema de partículas o cuerpos rígidos	$\underline{\mathbf{P}}_{sistema}=\Sigma\underline{\mathbf{p}}_i$	Momento angular para un sistema de partículas o cuerpos rígidos	$\underline{\mathbf{L}}=\Sigma\underline{\mathbf{L}}_i$
Momento lineal para un sistema de partículas o cuerpos rígidos	$\underline{\mathbf{P}}_{sistema}=M\underline{\mathbf{V}}_{cm}$	Momento angular para un sistema de partículas o cuerpos rígidos	$\underline{\mathbf{L}}=I\underline{\omega}$
Segunda ley de Newton	$\Sigma\underline{\mathbf{F}}_{externas}=dP_{sistema}/dt$	Segunda ley de Newton	$\Sigma\underline{\tau}_{externas}=d\underline{\mathbf{L}}/dt$
Ley de conservación (para un sistema cerrado e aislado $\underline{\mathbf{F}}_{neta}=0$, $\underline{\tau}_{neto}=0$)	$\underline{\mathbf{P}}_{sistema}=constante$	Ley de conservación (para un sistema cerrado e aislado $\underline{\mathbf{F}}_{neta}=0$, $\underline{\tau}_{neto}=0$)	$\underline{\mathbf{L}}=$ constante

Momento angular de un cuerpo rígido que rota a través de un eje fijo

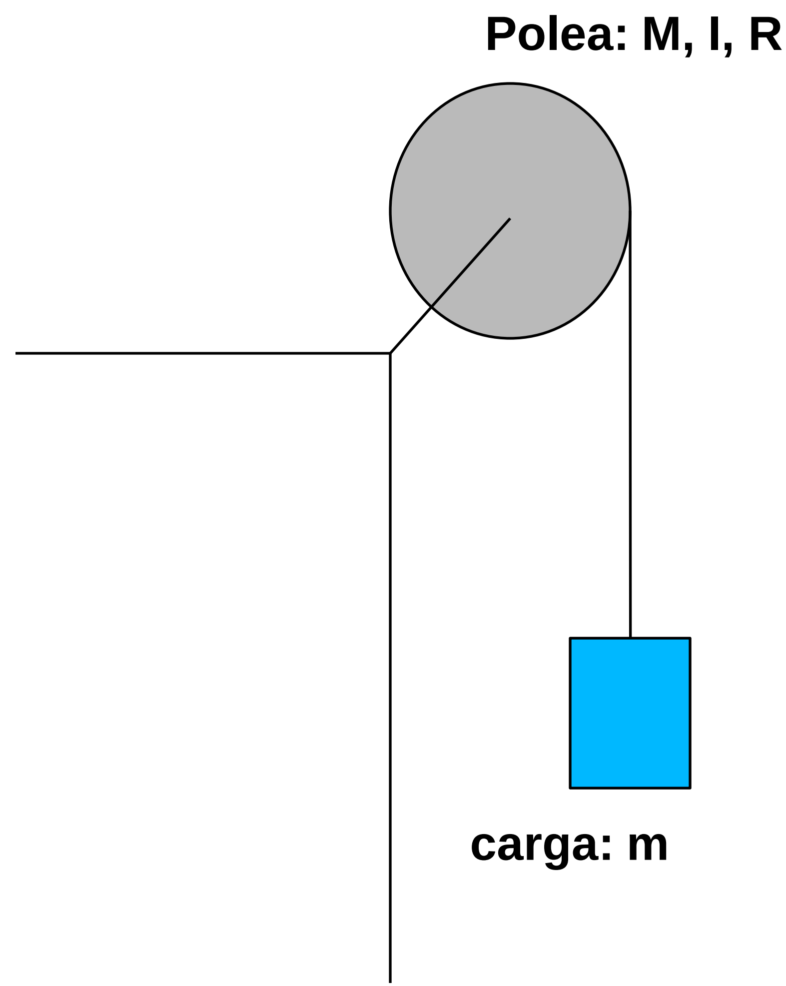
$$\left.\begin{aligned}\vec{\tau}_{neto} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{L} &= I\vec{\omega}\end{aligned}\right\} \quad \dot{\vec{L}} = I\,\dot{\vec{\omega}} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}_{neto}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{neto} = I\vec{\alpha}}$$

Ejemplos de cálculos

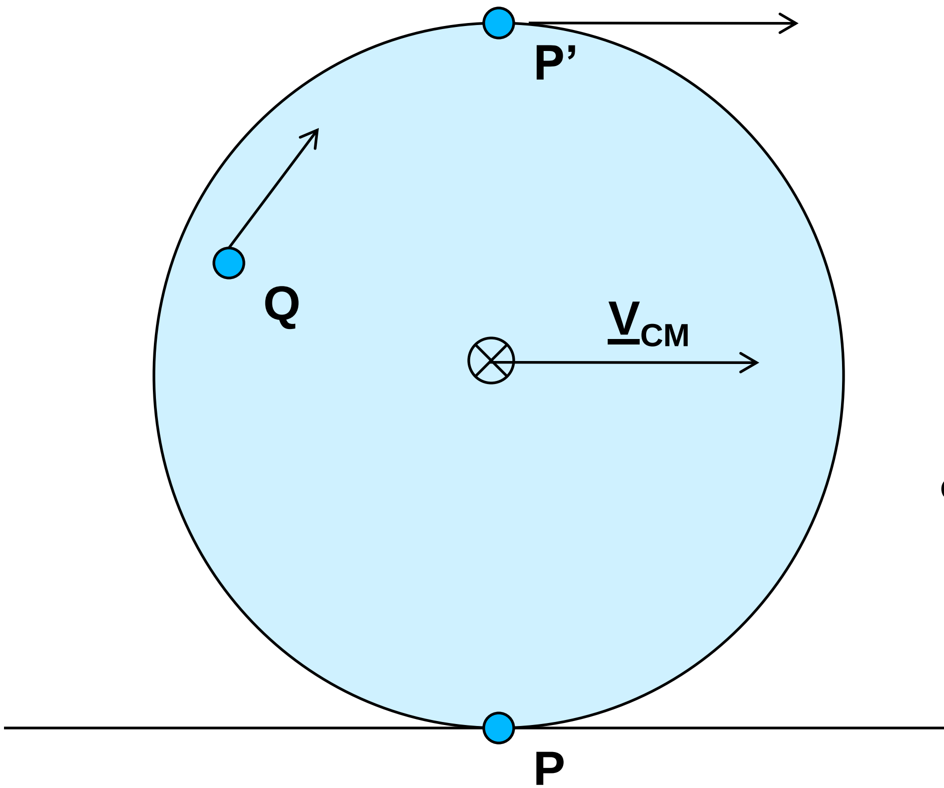


Encontrar la el periodo de oscilación del péndulo



Encontrar la aceleración ay del bloque que cae y la tensión de la cuerda

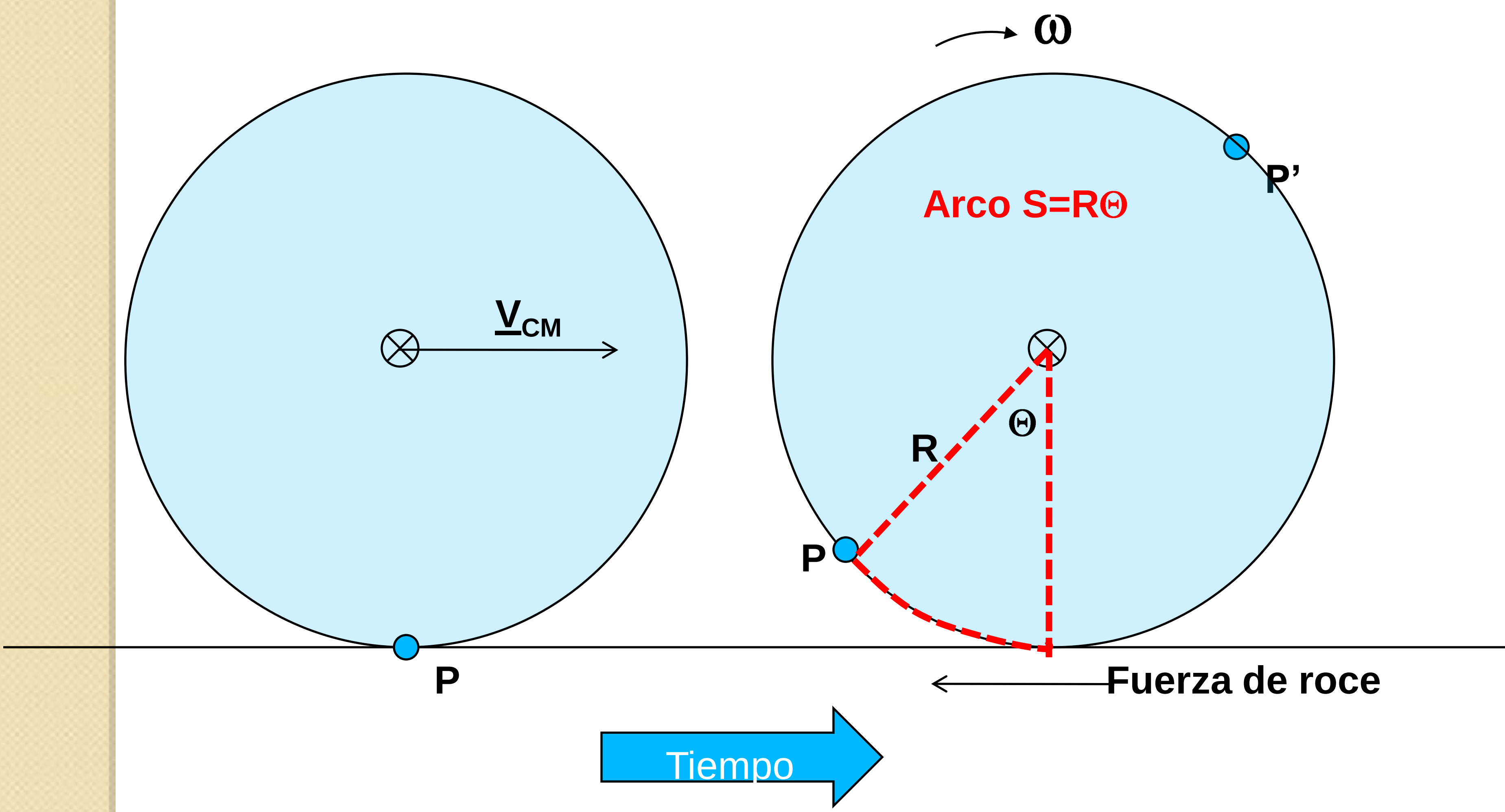
Movimiento de rodamiento Cuerpo rígido



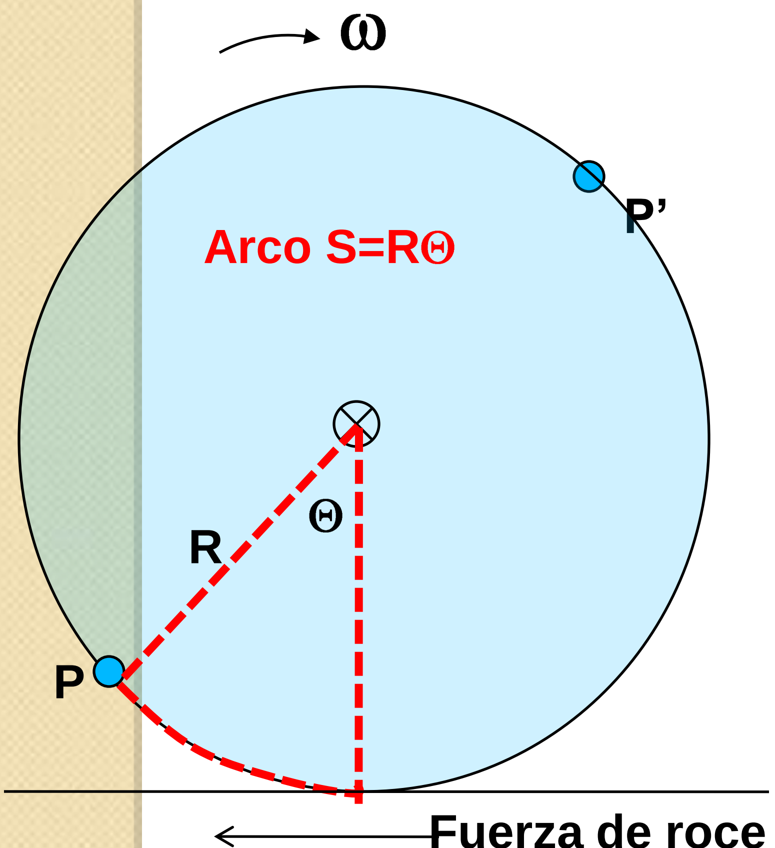
¿Qué movimiento sigue el CM?

¿cómo se mueve P`? Lo único que necesitamos es CM

Condiciones para rodadura
Se rueda sin deslizar



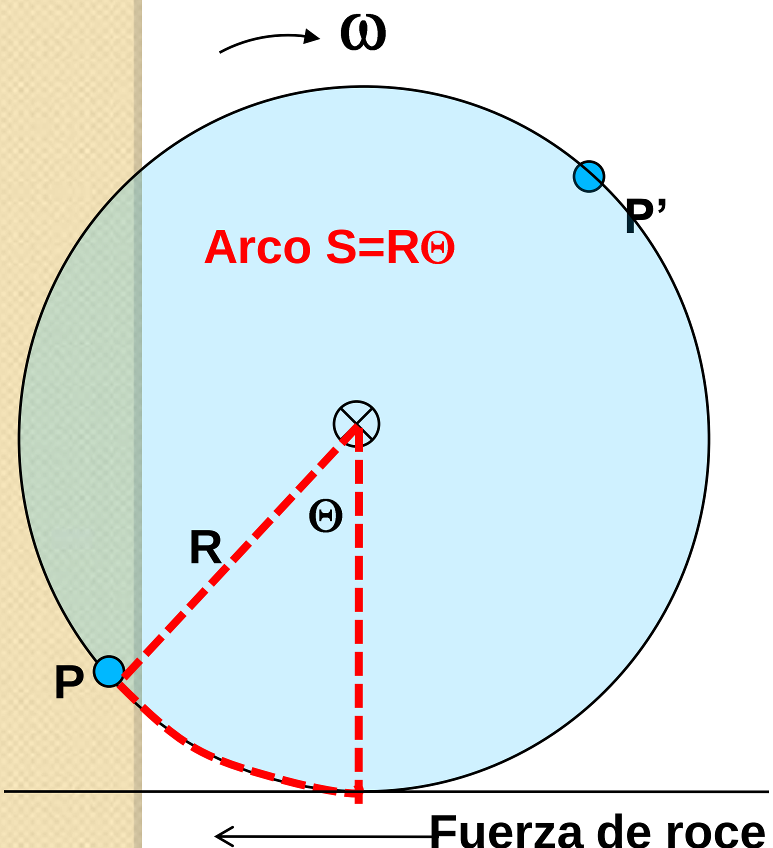
Condiciones para caso de rodadura pura



$$V_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = \omega R$$

$$a_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \alpha R$$

Condiciones para caso de rodadura pura



Energía cinética del cilindro

$$E_c = \frac{1}{2} I_p \omega^2$$

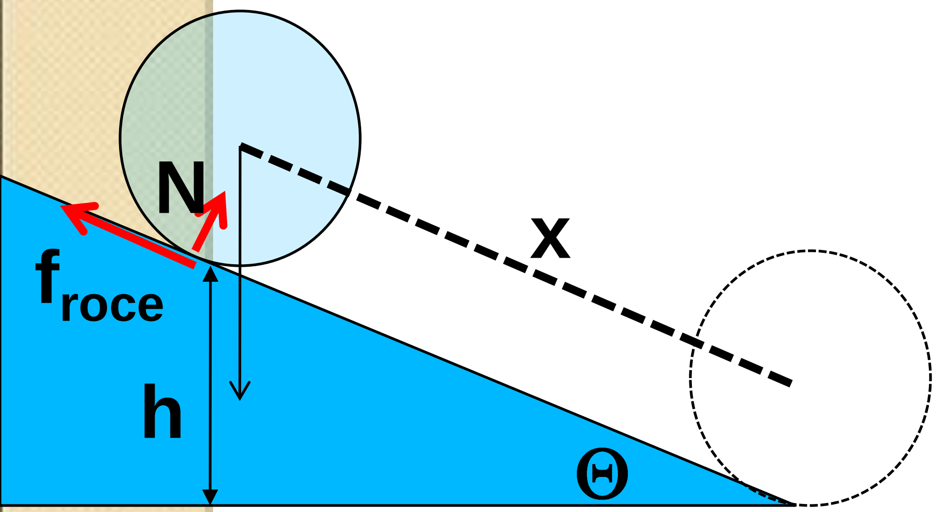
$$I_p = I_{CM} + MR^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MV_{CM}^2}$$

Conservación de la energía para caso de rodadura pura

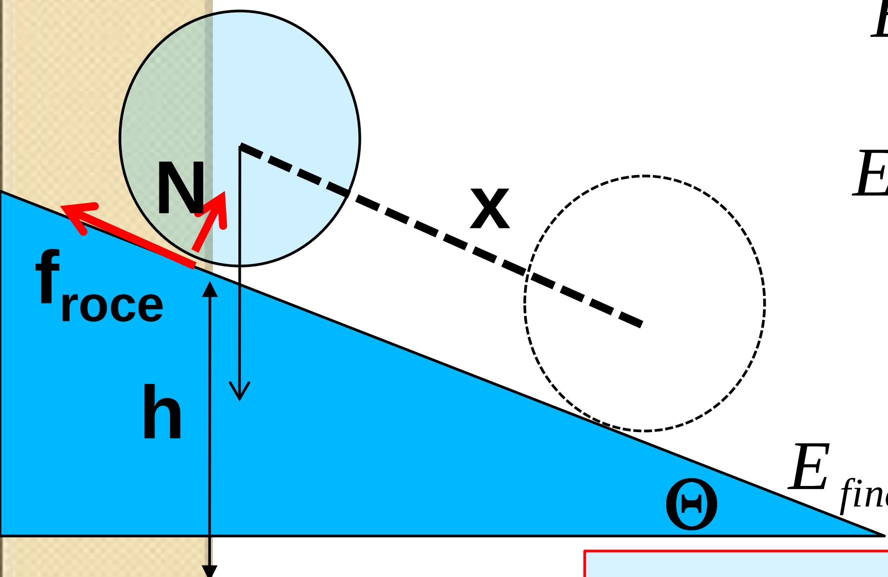


¿Se conserva la energía mecánica para el caso de rodadura pura?

1. Normal **N** no ejerce trabajo
2. **F_{roce}** no ejerce trabajo ya que el punto de contacto siempre está en reposos instantáneo

$E_{mecánica}$ si se conserva

Conservación de la energía para caso de rodadura pura



$$E_{inicial} = E_{gravitacional} = Mgxsen\theta$$

$$E_{final} = Ec = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} MV_{CM}^2$$

$$V_{CM} = \omega R$$

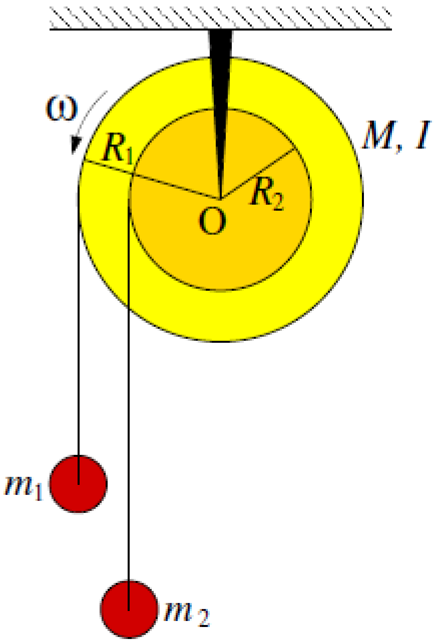
$$E_{final} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)V_{CM}^2 = Mgxsen\theta$$

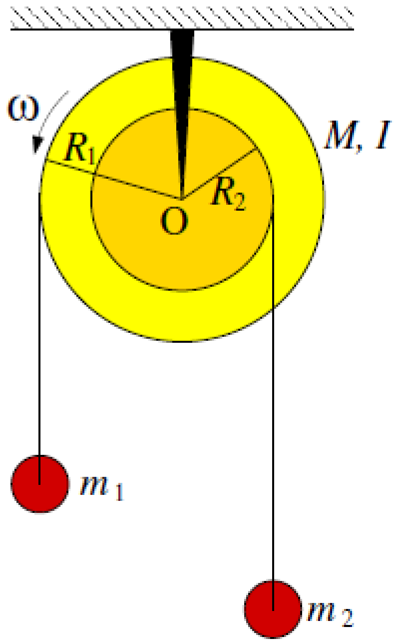
$$\boxed{V_{CM} = \sqrt{\frac{Mgxsen\theta}{\frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)}} = \sqrt{\frac{2gxsen\theta}{1 + {I_{CM}}/{MR^2}}} = V_{CM}}$$

Experiencia próxima semana

Páginas 212-216 del apuntes

Torques, momentos de inercia, aceleración angular y poleas





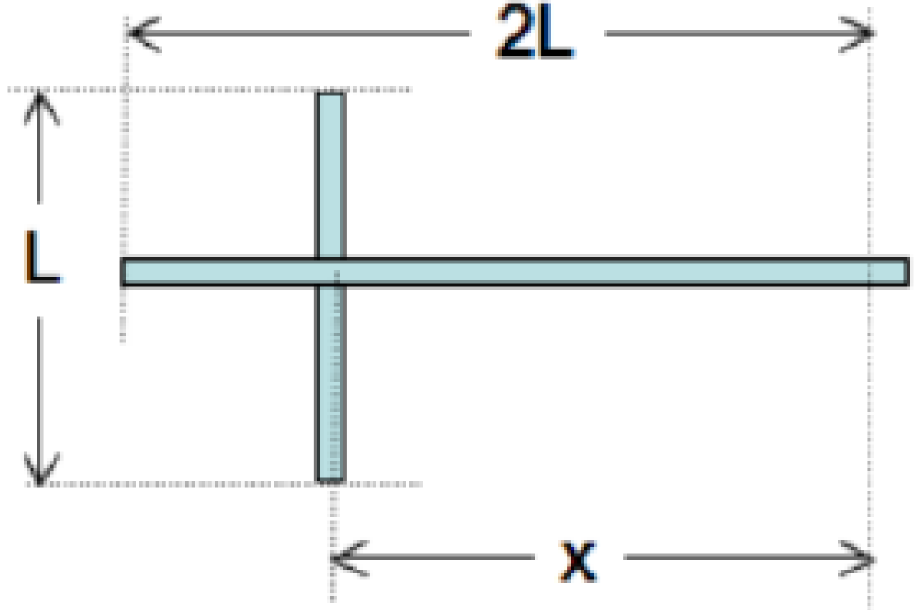
Una polea con dos canales R1, R2

Condiciones para que la polea gire en uno u otro sentido según las masas utilizadas m1 y m2

Determinación de I_{polea} a partir de la medición de la aceleración angular y torque conocido

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \\ &= A + Bt + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= A + Bt + Ct^2\end{aligned}$$

Experiencia de esta semana



Sugerencias

1. Resoluciones/sensibilidad de los equipos utilizados
2. Unidades a utilizar
3. Explicar los gráficos
4. Análisis de errores:
    - que error asocio?
    - La desviación estándar?
    - El error de la medición misma?
    - Que ejes llevan errores? Pueden ser ambos
5. Graficar
    - Datos experimentales: puntos + barra de errores
    - Curva teórica: línea continua