Torque y momentum angular

Puntual

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$$

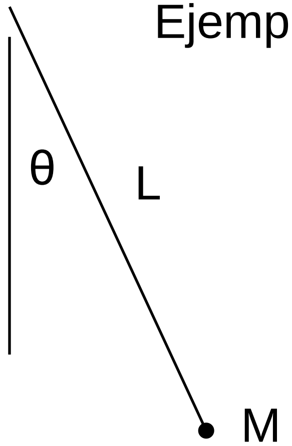
Sólido

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\vec{L} = I\omega$$

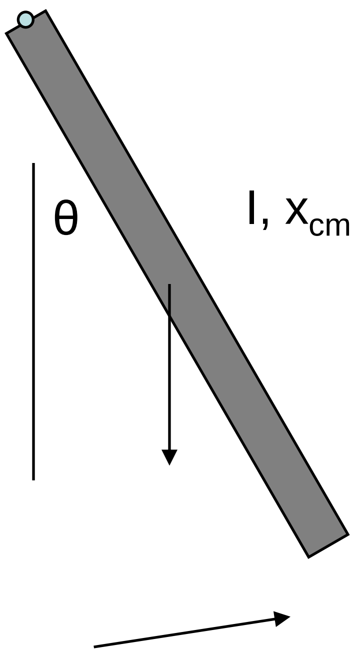
$$\dot{\vec{L}} = I\dot{\omega} = \vec{\tau}$$

Ejemplos



$$ML^2\ddot{\theta} = -MgL\,sen(\theta)$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} sen(\theta) = 0$$



$$I\ddot{\theta} = -Mg \cdot x_{cm} sen(\theta)$$

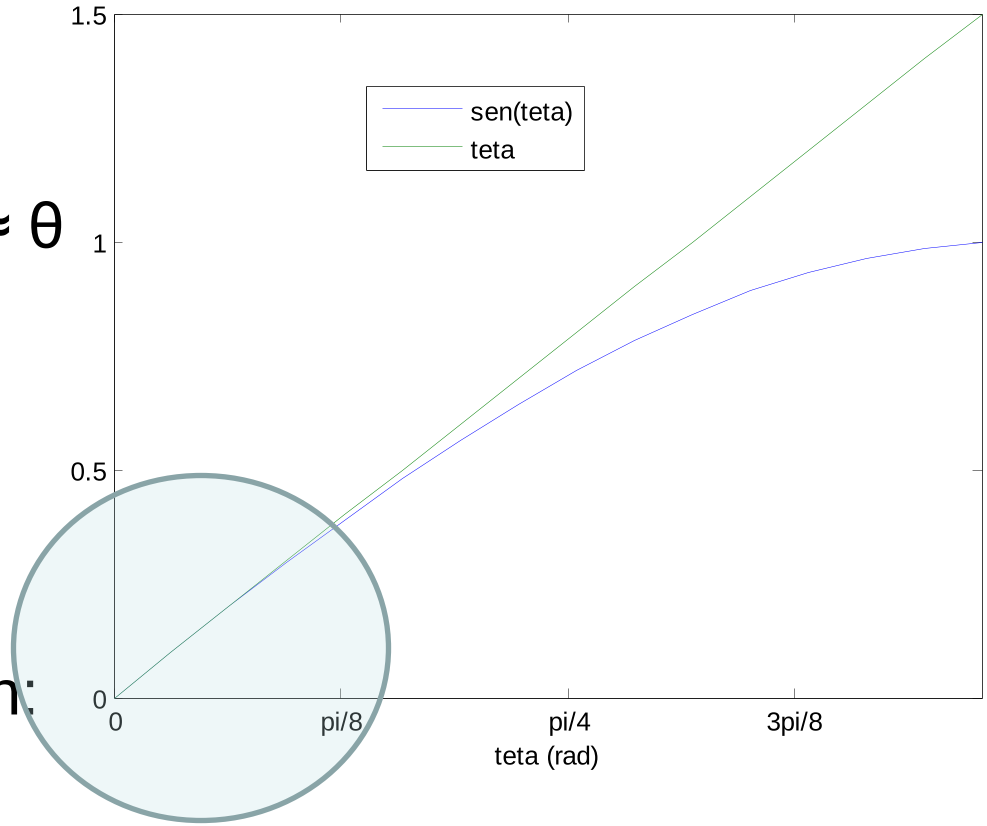
$$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mg \cdot x_{cm}}{I} sen(\theta) = 0$$

- Importancia de la ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} + \omega^2 sen\theta = 0$$

Para θ pequeño, $sen\theta \approx \theta$

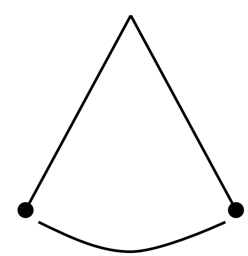
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

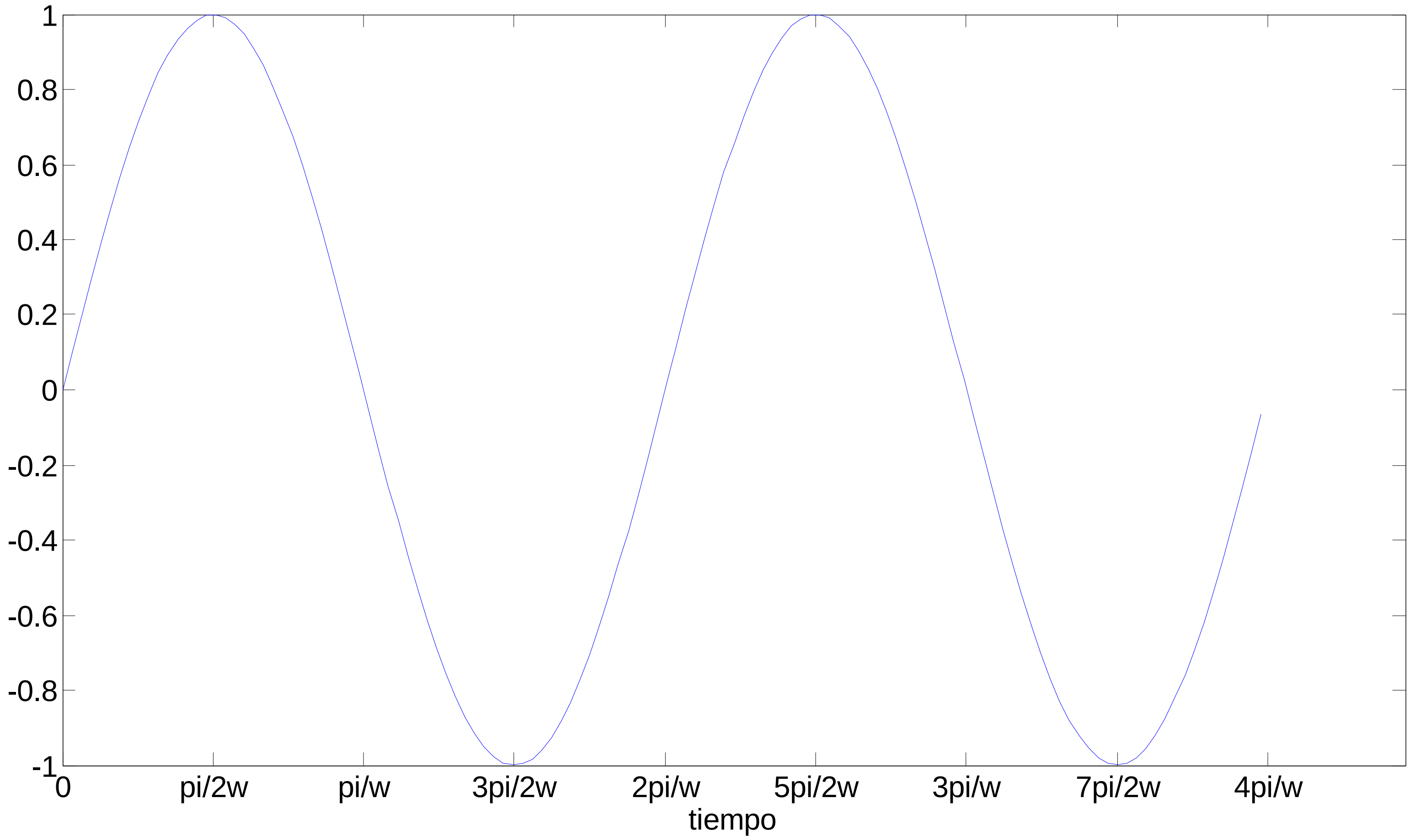


Ecuación del oscilador armónico. Tiene solución:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

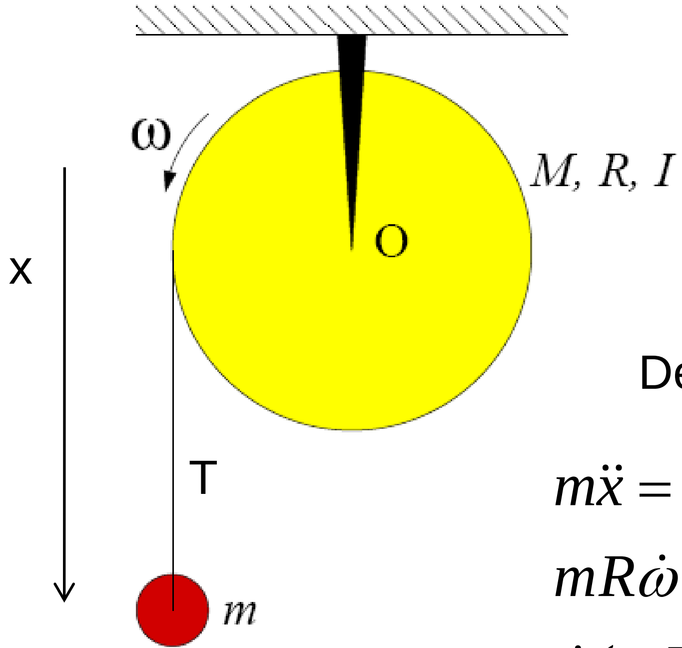
Donde ω es la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$





Ejemplo con δ=0 y A=1

Otro sistema: poleas



$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$I\dot{\omega} = RT$$

$$\rightarrow \dot{x} = R\omega$$

$$\rightarrow \ddot{x} = R\dot{\omega}$$

Despejando T

$$m\ddot{x} = mg - I\dot{\omega}/R$$

$$mR\dot{\omega} = mg - I\dot{\omega}/R$$

$$\dot{\omega}(mR + I/R) = mg$$

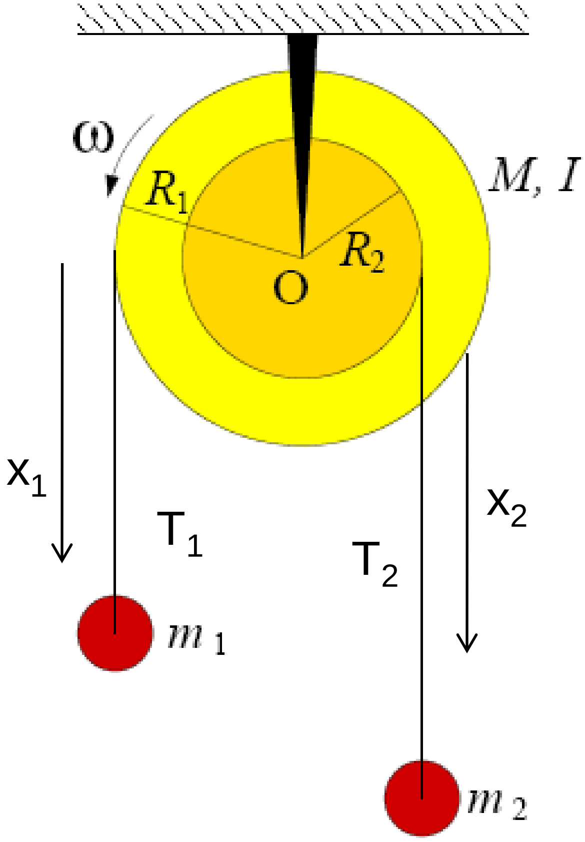
$$\dot{\omega} = \frac{mg}{mR + I/R}$$

$$\omega(t) = \dot{\omega}t + \dot{\omega}_0$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 + \dot{\omega}_0 t + \theta_0$$

$$T = \frac{I \cdot mg}{mR^2 + I}$$

La tensión es constante y la velocidad angular aumenta en forma lineal en el tiempo



$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2$$

$$I\ddot{\theta} = T_1 R_1 - T_2 R_2$$

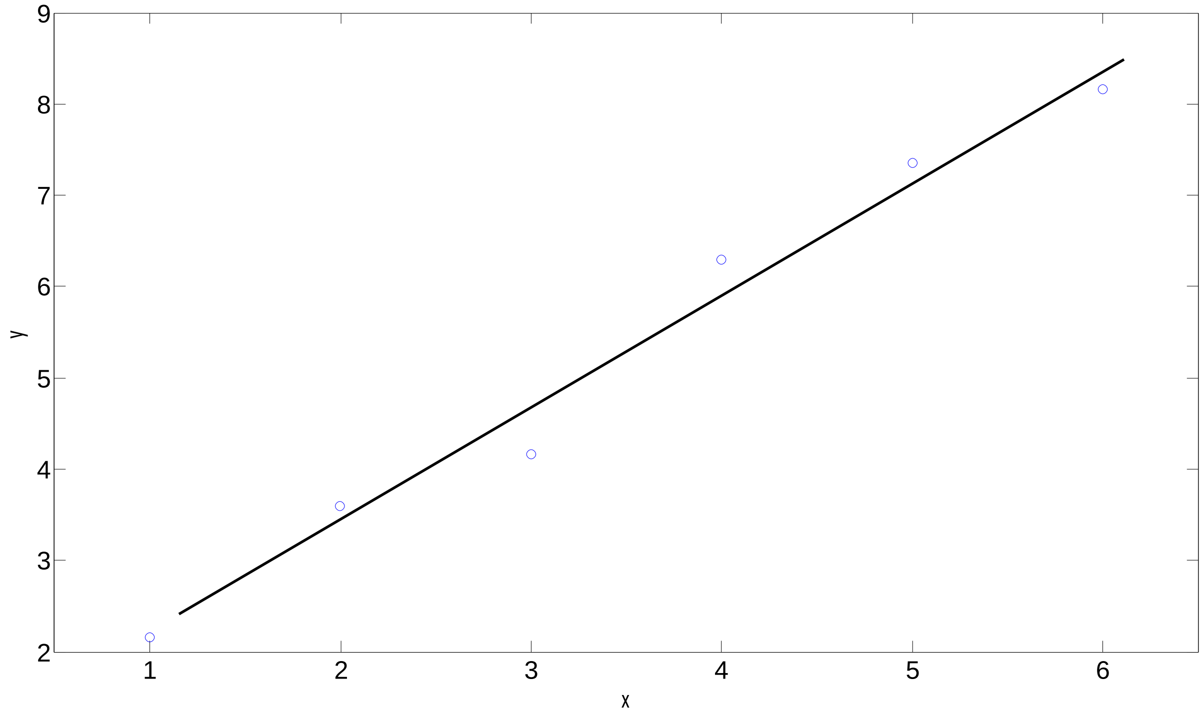
$$\frac{\ddot{x}_1}{R_1} = -\frac{\ddot{x}_2}{R_2}$$

El sentido de giro está dado por la tercera ecuación.
Notar que aceleraciones de 1 y 2 tienen signos distintos

Ajuste de curvas

Serie de datos

x	y
1	2,159
2	3,595
3	4,161
4	6,293
5	7,357
6	8,167



Queremos encontrar la ecuación de la recta que mejor se ajuste a los datos

En general, para una función f(x,a1,a2, …,a3), la diferencia entre los valores experimentales y los predichos por la función será:

$$R^2 \equiv \sum [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_n)]^2$$

Para que la diferencia sea mínima

$$\frac{\partial (R^2)}{\partial a_i} = 0$$

Si la función es una recta

$$f(a, b) = a + b\,x,$$

$$R^2(a, b) \equiv \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b\,x_i)]^2$$

$$\frac{\partial (R^2)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b\,x_i)] = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\,a + b \sum_{i=1}^{n} x_i$$

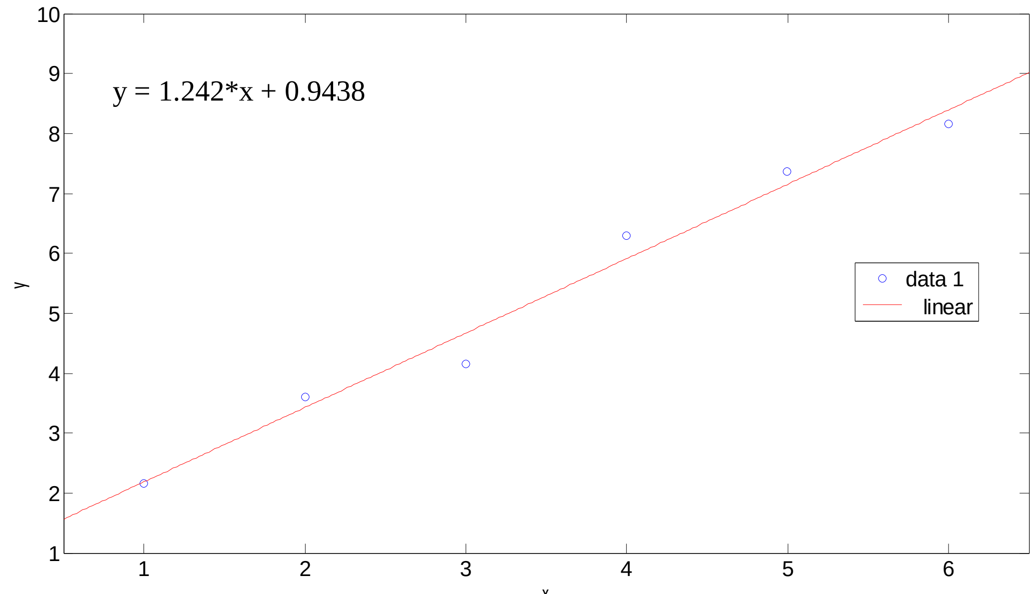
$$\frac{\partial (R^2)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b\,x_i)]\,x_i = 0. \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Finalmente

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{y}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\overline{x}^2}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\overline{x}^2}$$

Luego:



- Procedimiento anterior puede ser extendido para otras funciones, y para considerar error en parámetros (usar origin). Ej: considerar una función cúbica.

Comando Matlab:
u=polyfit(x,y,n)
x, y vectores
n órden del polinomio.
entrega coeficientes del polinomio.