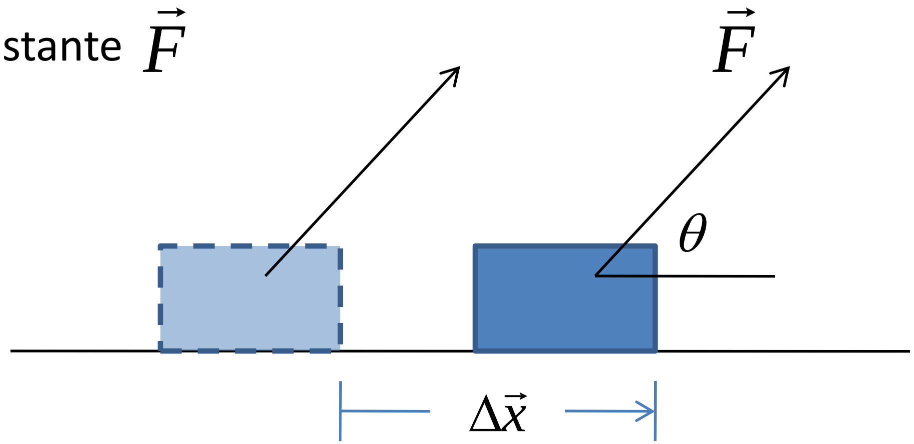
# Sólidos rígidos: energía de rotación

Trabajo de una fuerza: Si la fuerza constante $\vec{F}$

es paralela al desplazamiento $\Delta\vec{x}$




Entonces el trabajo W será:

W=F· Δx

Más generalmente, en caso de no ser paralelas:

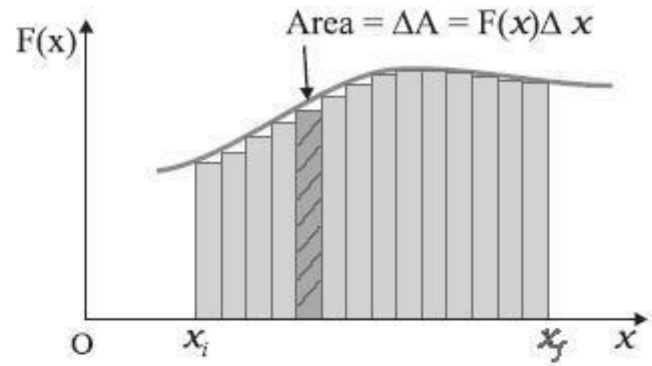
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F\Delta x \cos(\theta)$$

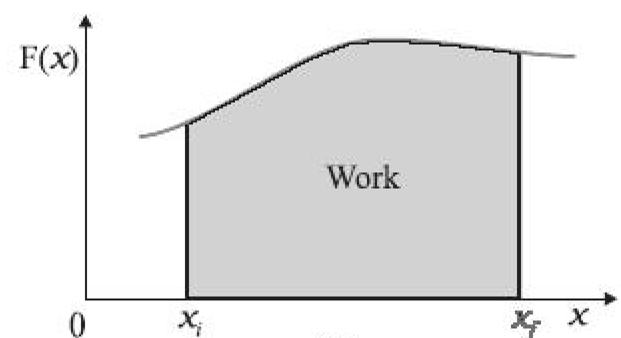
- Si la fuerza no es constante o si el desplazamiento cambia de dirección:

$$dW = \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

En el caso unidimensional

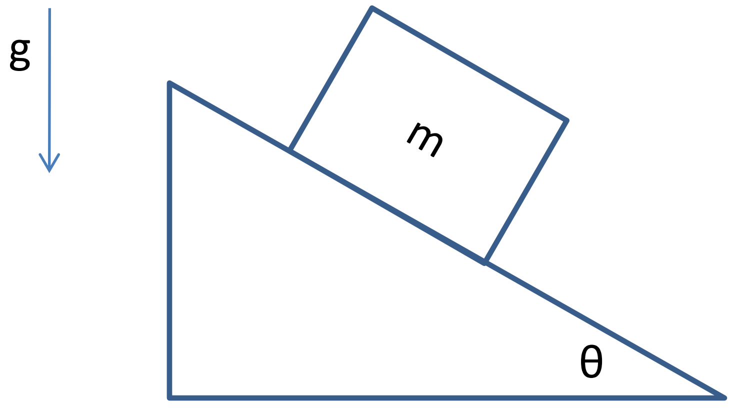
$$\Delta W = \int_a^b F(x)dx$$



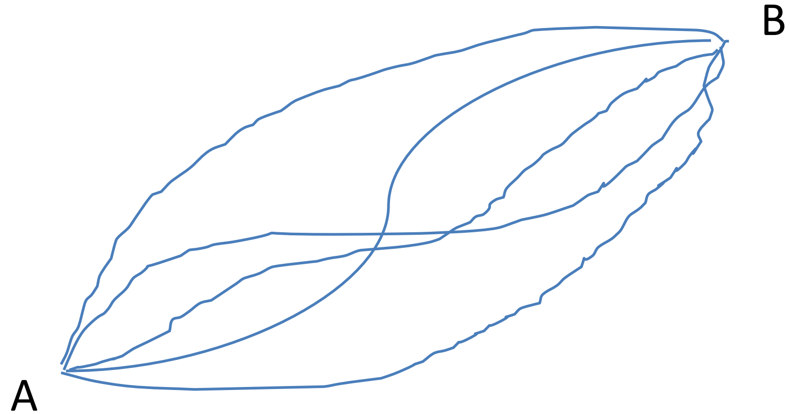
(b)

Ejemplo: trabajo hecho por la gravedad en un plano inclinado




¿Cómo es si el bloque se mueve hacia arriba o hacia abajo?

**Fuerzas conservativas**: el trabajo realizado al ir de un punto al otro depende sólo del punto inicial y final, y no de la trayectoria.




$\Delta W_{AB}$ Es independiente de la trayectoria

Ejemplos de fuerzas conservativas: gravitacional
Elástica, electrostática, etc

Se define la energía potencial U tal que:

$$-\Delta U_{AB} = \Delta W_{AB}$$

$$\rightarrow \Delta W_{AB} + \Delta U_{AB} = 0$$

Luego, si decimos que el cambio en la energía cinética es igual al trabajo:

$$\Delta K = \Delta W$$

$$\rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

$$\Delta(K + U) = 0$$

$$E = K + U$$

$$\Delta E = 0$$

¿De donde viene lo anterior?

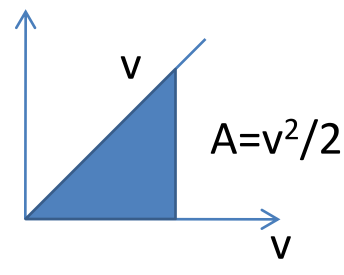
$$dW = Fdx$$

$$dW = m\ddot{x}dx = m\frac{d\dot{x}}{dt}dx = md\dot{x}\frac{dx}{dt}$$

$$dW = md\dot{x}\dot{x} = m\dot{x}d\dot{x}$$

$$\Delta W = \int m\dot{x}d\dot{x} = \int mv\,dv = m\int v\,dv$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$



**Ejemplo:** Un objeto se suelta desde una altura $H$, ¿A qué velocidad impacta contra el suelo?

**Solución:** Despreciando el roce con el aire, podemos aplicar la conservación de energía mecánica entre el instante inicial (objeto se suelta desde el reposo) y final (objeto impacta el suelo):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg0$$

de donde obtenemos directamente

$$v_f = (2gH)^{\frac{1}{2}}$$

Revisar resorte.

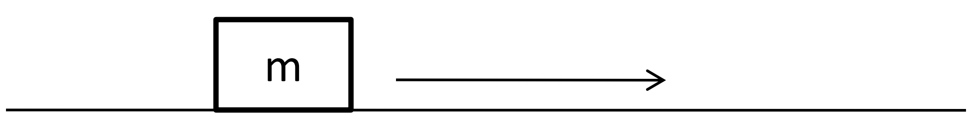
# Si existe una fuerza no conservativa

$$\rightarrow \Delta E \neq 0$$

$$\Delta E = W_{fuerzaroce}$$

$$\Delta E = \sum W_{fuerzaroce}$$

Ejemplo: un cuerpo es lanzado una con una velocidad inicial $v_o$ en una superficie horizontal en la cual siente una fuerza de roce proporcional a la reacción normal N y al coeficiente de roce dinámico μ. Calcule la distancia que recorrerá el cuerpo antes de detenerse.



# En un sólido rígido

Si no hay fuerzas de roce:

$$\Delta E = \Delta(\sum_i K_i + U_i) = 0$$

**Energía cinética de rotación**:
Ya vimos

$$K = \sum K_n = \sum \left(\frac{1}{2} m_n v_n^2\right) = \frac{1}{2} \sum (m_n \rho_n^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

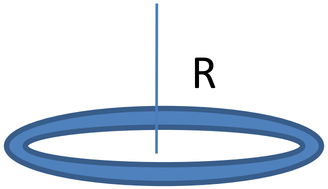
**Energía potencial gravitatoria**

$$\sum_n U_{gn} = \sum_n g m_n y_n = M Y_{CM}\, g$$

# Momento de inercia

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

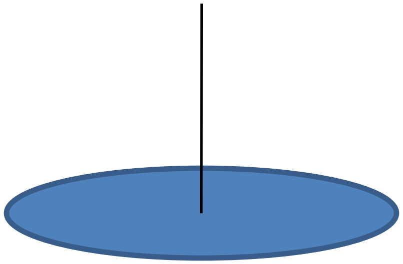
Ejemplo: circunferencia



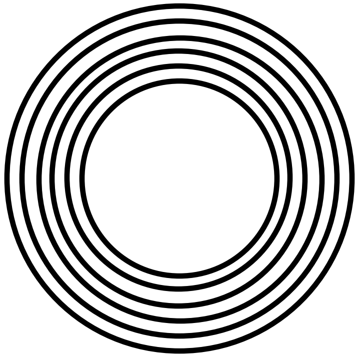

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = R^2 \sum_i m_i = MR^2$$

Cuando el objeto es continuo

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \Rightarrow \int r^2 dm$$



Ejemplo: disco

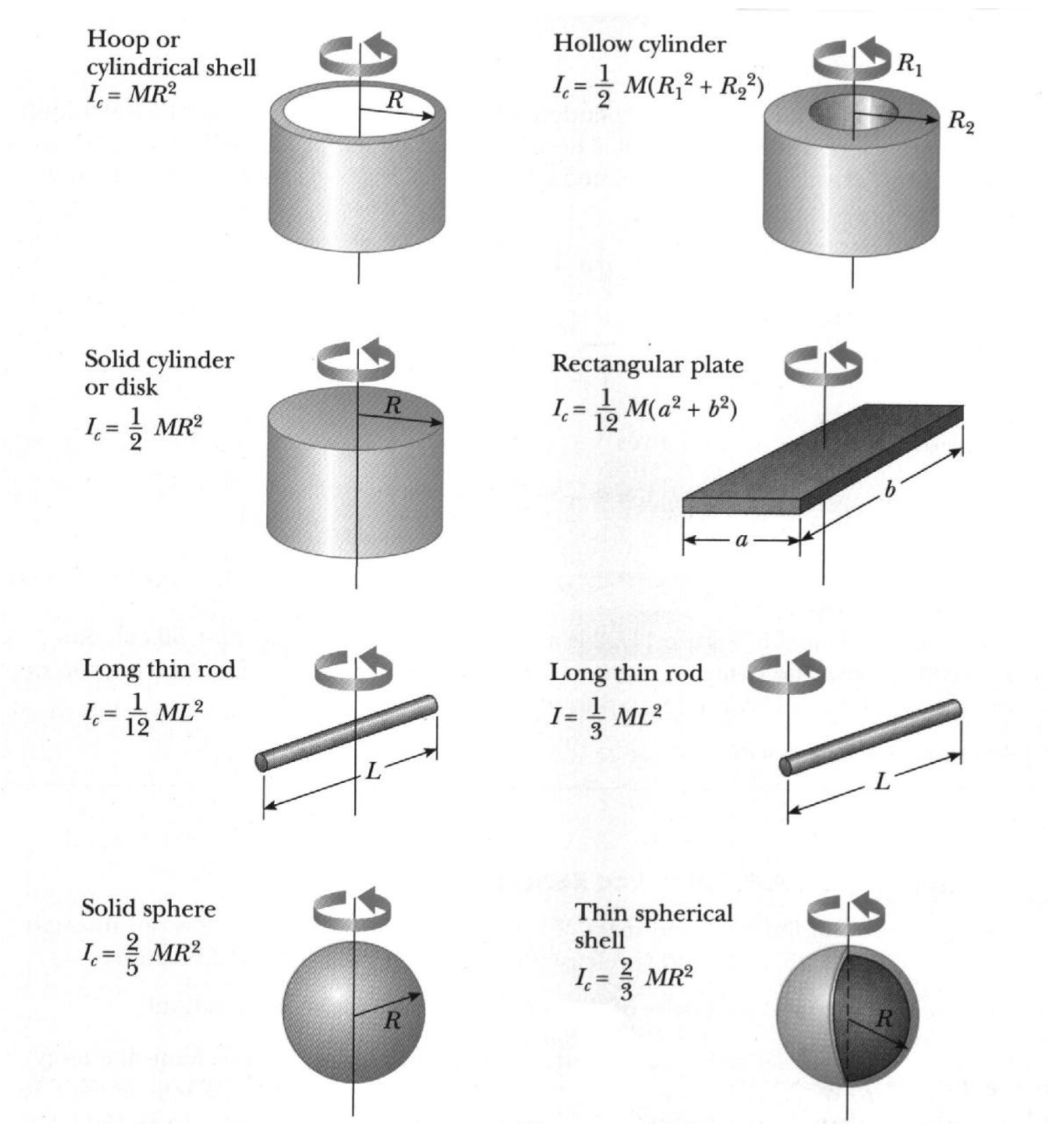


$$dm = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 \cdot dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4}$$

$$I = \sigma \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

Del mismo modo, se pueden calcular:




En general:
$I = \gamma ML^2$

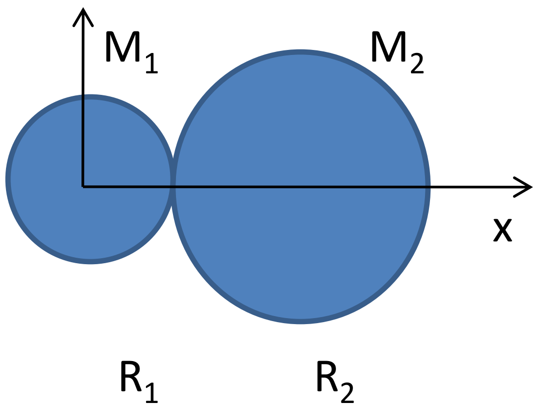
# Centro de masa de un cuerpo rígido

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r_i}$$

Si hay más de un cuerpo, a saber A y B:

$$\vec{R} = \frac{M_A\vec{R}_A + M_B\vec{R}_B}{M_A + M_B}$$

Ejemplo:

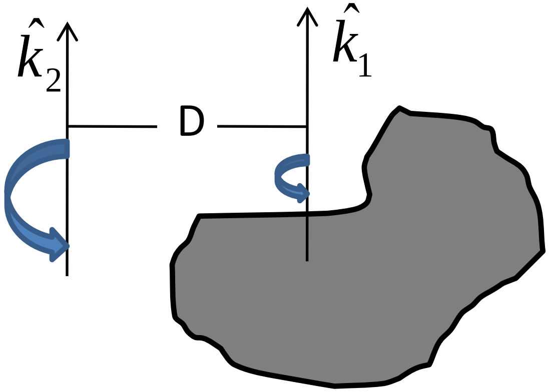



con $M_1 / R_1^2 = M_2 / R_2^2$

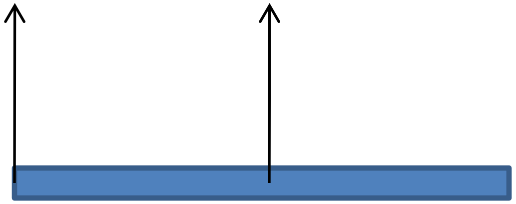
Calcule el centro de masa

# Teorema de los ejes paralelos

$$I_2 = I_1 + MD^2$$




Ejemplo: barra que gira por un extremo. $I_{cm}$=ML$^2$/12



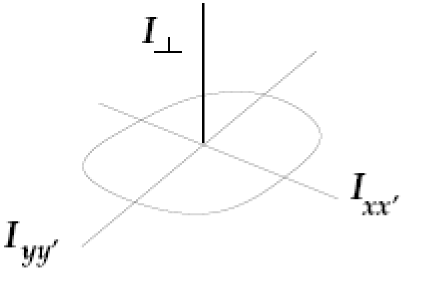
$$I_2 = I_{cm} + M(L/2)^2$$

$$I_2 = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$$

# Teorema de los ejes perpendiculares

- Viene de escribir el momento de inercia en coordenadas cartesianas:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_{yy} + I_{xx}$$

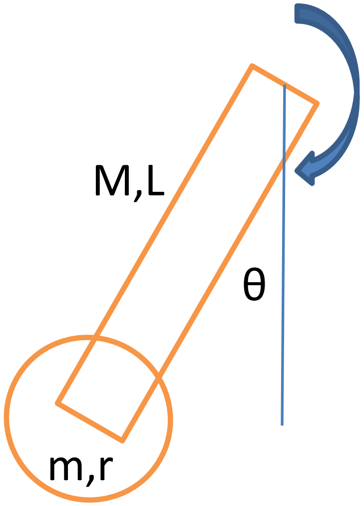



Ejemplo: calcule el momento de inercia de un aro con respecto a un diámetro

# Ej: energía cinética y potencial

$$I = \frac{ML^2}{3} + \frac{mR^2}{2} + mL^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$




$$r_{cm} = \frac{\frac{ML}{2} + mL}{M + m}$$

$$U = (M + m) \cdot g \cdot r_{cm} (1 - \cos\theta)$$

$$U = (\frac{ML}{2} + mL) \cdot g \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$E = K + U$$