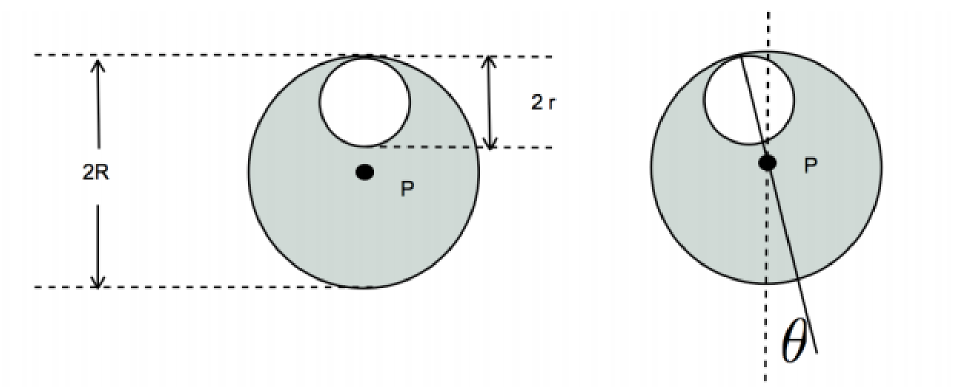
Claudio González Fuentes

SOLUCIÓN EJERCICIO 2
pág 128 apuntes

1



1. Determine la ecuación de movimiento para las desviaciones del sistema desde su posición de equilibrio vertical.

2. Encuentre el periodo de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.

3. Estudie cuidadosamente el sentido físico de de su resultado en los límites $r/R \gg 1$ y $|1 - r/R| \ll 1$.

Partimos de la ecuación de movimiento :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

CALCULAMOS EL MOMENTO DE INERCIA

$$I = I_{disco} - I_{hueco}$$

por el teorema de steiner

$$I_{hueco} = \frac{M_{hueco}r^2}{2} + M_{hueco}\left(R-r\right)^2$$

luego

$$I = \frac{M_{disco}R^2}{2} - \left(\frac{M_{hueco}r^2}{2} + M_{hueco}\left(R-r\right)^2\right)$$

por otra parte

$$\frac{M_{hueco}}{M_{disco}} = \frac{\rho\pi r^2}{\rho\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$I = \frac{M_{disco}R^2}{2} - \left(M_{disco}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{r^2}{2} + M_{disco}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\left(R-r\right)^2\right)$$

Simplificando

$$I = \frac{M_{disco}\left(-3r^4+4r^3R-2r^2R^2+R^4\right)}{2R^2}$$

Ahora recordamos que :

$$M_{disco} = M\frac{R^2}{R^2-r^2}$$

reemplazando

$$I = M\frac{R^2}{R^2-r^2}\frac{\left(-3r^4+4r^3R-2r^2R^2+R^4\right)}{2R^2}$$

desarrollando esto algebraicamente y simplificando :

$$I = \frac{M}{2}R^2 - \frac{M}{2}r^2 + \frac{2Mr^3}{r+R}$$

CALCULAMOS EL CENTRO DE MASAS

La distancia del centro de masas al centro será :

$$r_{cm} = \frac{1}{M_{disco}+M_{hueco}}\left(M_{disco}\times(0) - M_{hueco}\left(R-r\right)\right)$$

$$r_{cm} = \frac{1}{M_{disco}+M_{hueco}}\left(-M_{hueco}\left(R-r\right)\right)$$

$$r_{cm} = \frac{(R-r)}{\frac{R^2}{r^2}+1}$$

$$r_{cm} = \frac{r^2(R-r)}{(R^2+r^2)}$$

volviendo a la ecuación de movimiento

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$-Mgr_{cm}\sin[\theta\,[t]] = I\ddot{\theta}\,[t]$$

$$\approx$$

$$-Mgr_{cm}\theta\,[t] = I\ddot{\theta}\,[t]$$

$$-\frac{Mgr_{cm}}{I}\theta\,[t] = I\ddot{\theta}\,[t]$$

2

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{cm}}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\left(\frac{R^5+rR^4+4R^2r^3-Rr^4+3r^5}{r^2R^2-R^4}\right)}$$

3

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{I(R^2+r^2)}{mgr^2(R-r)}}$$

el límite cuando $r \ll R$ es :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{R}{r}\sqrt{\frac{I}{mgR}} \to \infty$$

esto tiende a infinito que equivale a un $\omega = 0$, lo cual concuerda con el hecho de que esto se aproxima un disco macizo que gira en torno al centro de masa y por lo tanto no hay torque, es un disco que gira libremente sobre su eje.

el límite cuando $r \approx R$ es :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{R}{r}\sqrt{\frac{2IR^2}{mgr^2(0)}} \to \infty$$

esto tiende a infinito que equivale a un un $\omega = 0$, ya que esto se aproxima a un anillo que gira en torno a su centro de masa y por lo tanto no hay torque, pero esta vez es un anillo de grosor infinitesimal que gira sobre su centro libremente.

En ambos casos límite ante un pequeño impluso el objeto gira enternamente sin volver a $\theta = 0$ por lo que $T \to \infty$