

Unidad 3: Sistemas Extendidos

3.1. Introducción

Durante las primeras aproximaciones a la física han sido expuestas a las ideas de Galileo y Newton sobre la naturaleza del movimiento. En estas nociones introductorias se ha usado el concepto de *partícula puntual*. Entendemos por partícula puntual un objeto sin dimensiones espaciales, dotado de una posición y masa como únicos atributos físicos. Dicho concepto es una idealización, solo aplicable, cuando en los fenómenos que estamos estudiando la extensión espacial de los objetos puede ser despreciada. De este modo, Newton fue capaz de explicar el movimiento de la traslación de la tierra en su conjunto, sin preocuparse de la otros movimientos, como la rotación. Del mismo modo, ud. ha trabajado con conceptos como la velocidad de un automovil, la aceleración de un paracaidista, etc. Todos los ejemplos son sistemas complejos, cada cual con una estructura interna capaz de cambiar. En este capítulo construiremos las herramientas básicas que permiten la comprensión del movimiento de los objetos reales.

Para poder plantear el estudio de un sistema complejo, usando las herramientas que nos entrega la mecánica Newtoniana, debemos establecer un modelo del mismo. El hacer un modelo, implica dejar de lado una serie de fenómenos asociados con el sistema, hacer aproximaciones, y por último, plantear representaciones simplificadas del sistema. Todo esto es en principio de gran dificultad, y requiere una gran intuición, pero por sobre todo hace necesaria la constante comprobación experimental. No es posible establecer modelos físicos que abarquen la totalidad de los fenómenos asociados a un sistema. La validez de nuestros modelos es limitada a ciertos aspectos y ciertos rangos de valores.

En un intento de clasificación muy general, los tipos de sistemas que podemos contemplar son

- i.- disgregados, tales como galaxias de estrellas, sistemas granulares, gases, etc.;
- ii.- líquidos, donde las moléculas constituyentes mantienen cohesión, pero permiten que dos moléculas en contacto puedan, luego de algún tiempo, estar muy distantes entre sí.
- iii.- medios elásticos, donde el conjunto de moléculas vecinas se mantiene pero sus y distancia de separación puede variar moderadamente ante deformaciones.

- iv.- sólidos indeformables, donde las distancias entre moléculas vecinas es invariable en el tiempo.

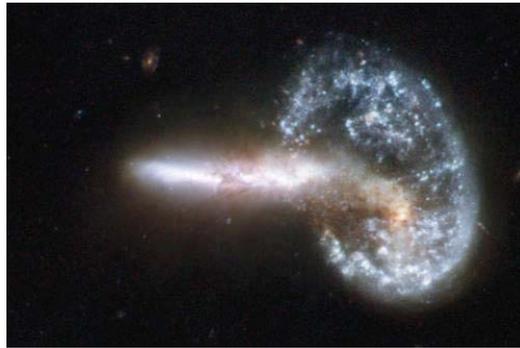


Figura 4: Choque de dos galaxias interretado a partir de datos obtenidos por el telescopio espacial Hubble.

Es importante destacar que dicha separación, aunque superficialmente evidente, corresponde a la elección de un rango experimental para nuestros estudios. Por ejemplo, no existe un cuerpo rígido en la naturaleza, la rigidez es un comportamiento aparente sólo en cierto rango experimental, si forzamos mucho un cuerpo este se deformará o simplemente se romperá. Alcances similares se pueden hacer para cada uno de los ejemplos recién dados.

Para estudiar la evolución de un sistema formado por muchas componentes nos valemos de las leyes de Newton, las que se adaptan de forma muy sencilla a sistemas complejos. Debemos considerar, provisoriamente, al sistema complejo como un conjunto de sistemas más pequeños, para los cuales las leyes de movimiento se puede aplicar en forma sencilla. Para esto es necesario definir *el sistema* a estudiar, vale decir, el conjunto de partículas –distinguidas y enumerables– que uno escoge (ficticiamente) para el estudio de un fenómeno dado. El criterio que comunmente nos guía para definir las componentes del sistema es la simplicidad que nos brinde para respondernos preguntas específicas. Suponemos que las componentes del sistema pueden interactuar entre sí, y a su vez con el exterior. Es decir, las fuerzas actuando sobre cada constituyente corresponden a la suma de las fuerzas que se hacen directamente más las fuerzas que las otras partes hagan sobre él. La mecánica Newtoniana de sistemas compuestos consiste en una aplicación de las tres Leyes de Newton, además del *Principio de Superposición*, postuladas para cuerpos puntuales. Estas leyes se resumen como sigue:

I.- Si un cuerpo en reposo no interactúa con el entorno, entonces este permanecerá en reposo indefinidamente.¹

II.- El cambio de momentum $\delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza aplicada y a la duración δt de su aplicación.²

¹A la inversa, si un cuerpo cambia de su estado de reposo, entonces es porque interactuó con el entorno.

²Esta relación se expresa $\delta\vec{p} = \vec{F}\delta t \rightarrow \vec{F} = d\vec{p}/dt = m\vec{a}$.

III.- La fuerza que un agente externo ejerce sobre el cuerpo es igual en magnitud, pero de sentido opuesto, a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el agente.

El Principio de Superposición se refiere a que las fuerzas son aditivas en el sentido vectorial.

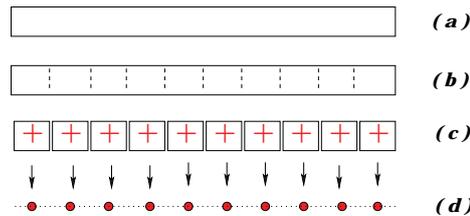


Figura 5: Representación de una barra como una colección de partículas.

En un primer acercamiento al estudio de sistemas extendidos nos focalizaremos en los *sólidos indeformables*. Un sólido lo visualizamos como un continuo de materia, como se ilustra en la Fig. (29a) para una barra. Esta barra la trozamos imaginariamente en celdas (29b), para terminar con las celdas independientes indicadas en (29c). Entre celdas contiguas hay fuerzas de cohesión. Cada una de estas celdas, si son lo suficientemente pequeñas, puede ser emulada como una partícula (29d). Nuevamente, la interacción dominante ocurre entre partículas vecinas.

3.2. Masa y centro de masas

La masa de un sistema de muchos cuerpos es, dentro del rango de validez de las leyes de movimiento de Newton, la suma de las masas de cada uno de ellos. Con este argumento podemos imaginar un cuerpo como la unión de N pedazos materiales, cada uno de ellos con masa determinada. Si el elemento i -ésimo tiene masa m_i , con $i : 1 \rightarrow N$, entonces la masa del sistema viene dada por

$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$$

Supongamos el sistema se distribuye espacialmente de modo que la posición de la celda i se representa mediante el vector posición \vec{r}_i referido a un origen O de un sistema de referencia S arbitrario. Este sistema puede ser el laboratorio, el suelo, la tierra, la vía láctea, etc. Se define la posición del *centro de masas* \vec{R} del sistema por

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i.$$

Tan solo al mirar la definición podemos interpretar geoméricamente el punto \vec{R} como el promedio de las posiciones de las partículas, ponderando cada una relativamente con la

contribución que hacen a la masa total. Esta interpretación en términos de promedio, permite utilizar la intuición para identificar el CM de sistemas simples, por ejemplo el CM de un círculo esta en su centro. En coordenadas cartesianas, si denotamos

$$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z) , \quad (3.1)$$

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) , \quad (3.2)$$

entonces,

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i , \quad (3.3)$$

$$R_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i , \quad (3.4)$$

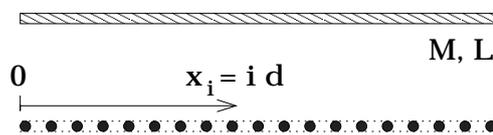
$$R_z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i . \quad (3.5)$$

Hacemos incapie en que el CM no es punto material específico del sistema. Es un punto abstracto, conveniente para la descripción del movimiento del mismo. De hecho en CM ni siquiera debe estar contenido dentro del sistema. (ver recuadro sobre en CM de la escuadra).

El centro de masas de una barra.

Consideremos una barra de longitud L y masa M distribuida uniformemente. Es evidente que el promedio de las posiciones esta en el centro de la barra, de este modo concluimos que el CM esta precisamente en el centro de la barra. Ahora usaremos la definición matemática del CM, para ello dividimos la barra en $n + 1$ trozos, los cuales se separan en $d = L/n$. La masa de cada trozo es $M/(n + 1)$, y la coordenada x de la i -ésima es $x_i = i d$. Entonces, la ubicación del centro de masas (según el eje horizontal x) está dado por

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n m_i x_i = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n \frac{M}{n + 1} \times \frac{iL}{n} = \frac{L}{2}$$



3.2.1. Energía potencial gravitacional de un cuerpo.

Consideremos un cuerpo de masa M en presencia de la gravedad terrestre g . Podemos imaginar este cuerpo constituido por N celdas enumerables. La energía potencial gravitacional

del sistema es la suma de la contribución de cada una. Así, si la celda i -ésima es de masa m_i y su coordenada con respecto al nivel cero de energía potencial es y_i , entonces la energía potencial total U_g es

$$U_g = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = Mg \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} = Mg Y_{CM} ,$$

donde claramente Y_{CM} representa la coordenada Y del centro de masas del sistema.

3.2.2. Centro de masas de centros de masas

Como vimos anteriormente, el centro de masas de una barra uniforme se ubica en su punto medio. Nos preguntamos por la ubicación del centro de masas de una 'L' formada por dos barras idénticas, unidas perpendicularmente en uno de sus extremos. Este cálculo es bastante simple si se recurre al siguiente teorema:

*Si \vec{R}_A localiza el centro de masas de un sistema A de masa M_A
y \vec{R}_B el de un sistema B de masa M_B ,
entonces el centro de masas del conjunto está dado por*

$$\vec{R} = \frac{M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B}{M_A + M_B}$$

La demostración es bastante simple. Sea M la masa de todo el sistema, con $M = M_A + M_B$. Si \vec{R} denota la posición del centro de masas de todo el sistema, entonces

$$M \vec{R} = \sum_{\text{todos}} m_i \vec{r}_i = \sum_{i \in A} m_i \vec{r}_i + \sum_{i \in B} m_i \vec{r}_i .$$

Pero, $M_A \vec{R}_A = (\sum_{i \in A} m_i \vec{r}_i)$, análogamente para \vec{R}_B . Con ello,

$$M \vec{R} = M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B ,$$

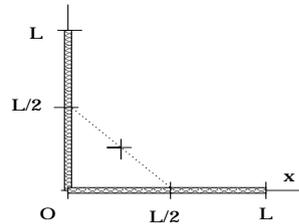
el resultado buscado.

El centro de masas de una escuadra:

Consideremos el sistema formado por dos barras idénticas de longitud L y masa M , unidas perpendicularmente en sus extremos. Ubicamos la escuadra en un sistema cartesiano, eligiendo orientación y origen que aporten la mayor simplificación en los cálculos. Si el subsistema A es la barra horizontal y la B es la vertical, entonces

$$R_x = \frac{M \times (L/2) + M \times 0}{M + M} = \frac{L}{4}; \quad R_y = \frac{M \times 0 + M \times (L/2)}{M + M} = \frac{L}{4}.$$

Este resultado representa el punto medio entre los puntos medios de cada barra, como se ilustra en la figura de más abajo.

**3.2.3. Problema Resuelto: El centro de masas de un triángulo:**

La propiedad recién descrita es sumamente importante. Sin ella, el concepto de centro de masas sería bastante irrelevante. Las subpartes de un sistema se comportan, puntos situados en los centros de masas respectivos. Para ilustrar el poder de la afirmación anterior, usaremos poco más que la relación recién descrita para calcular el CM de una placa triangular. Consideremos un triángulo rectángulo hecho de un material homogéneo³. Para determinar la posición del CM del triángulo, procedemos a dividirlo imaginariamente en cuatro triángulos iguales. Como los cuatro triángulos que debemos considerar son semejantes nos centraremos en el estudio de uno solo. Un triángulo rectángulo queda completamente determinado por su hipotenusa y el ángulo que esta forma con alguno de los catetos. Usando el sistema de referencia de la figura, fijando tanto c como α el triángulo queda completamente determinado. Ahora, la posición del centro de masas (X, Y) , debe también quedar determinado por dichas variables. Tenemos, entonces, que: $X = (c, \alpha)$ y $Y = Y(c, \alpha)$. Usando análisis dimensional obtenemos, simplemente: $X = c \times f(\alpha)$ y $Y = c \times g(\alpha)$ donde f y g son funciones adimensionales de α . Si dividimos todos los lados del triángulo por la mitad, el ángulo α no cambia. De modo que la posición del CM corresponde a $(X/2, Y/2)$.

Ahora podemos simplemente evaluar los CM de cada uno de los triángulos que componen el triángulo grande. Para el primero ya lo hemos evaluado: $CM_1 = (\frac{X}{2}, \frac{Y}{2})$. El segundo es

³Homogeneo significa que su composición es idéntica en todas las partes del mismo. En un sentido estricto no existen materiales homogéneos, son una idealización. En un sentido práctico podemos decir que un material es homogéneo cuando las diferencias de composición entre sus partes son tan pequeñas que son incapaces de ser detectadas en un experimento específico. Es decir: ¡Un mismo objeto puede ser homogéneo o no dependiendo del experimento!

simplemente el primero desplazado hacia la derecha por $a/2$: $CM_2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$, mientras que el tercero es el primero desplazado hacia arriba por $b/2$: $CM_3 = \left(\frac{X}{2}, \frac{b}{2} + \frac{Y}{2}\right)$. Por último, el cuarto está invertido y desplazado hacia $(a/2, b/2)$, $CM_4 = \left(\frac{a}{2} - \frac{X}{2}, \frac{b}{2} - \frac{Y}{2}\right)$.

El CM de todo es el CM de las partes (propiedad mágica). Como cada triángulo tiene un cuarto de la masa tenemos:

$$CM = \frac{\frac{M}{4}CM_1 + \frac{M}{4}CM_2 + \frac{M}{4}CM_3 + \frac{M}{4}CM_4}{M} \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{4}(CM_1 + CM_2 + CM_3 + CM_4) \quad (3.7)$$

usando la parte anterior, tenemos,

$$CM = \frac{1}{4}(a + X, b + Y) \quad (3.8)$$

pero sabemos que el CM es (X, Y) , de modo que:

$$(X, Y) = \frac{1}{4}(a + X, b + Y) \quad (3.9)$$

Obteniendo:

$$(X, Y) = \frac{1}{3}(a, b). \quad (3.10)$$

3.3. Momentum de un sistema extendido

Supongamos que un sistema de partículas se encuentra en movimiento. El movimiento puede ser arbitrario. Enumeremos las componentes del sistema, de modo que el pedazo i -ésimo, de masa m_i , tiene una velocidad \vec{v}_i . Es fácil ver que el momentum es $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$. El *momentum total del sistema*, o simplemente el *momentum del sistema*, se denota por \vec{P} y se define como la suma de los momenta de sus componentes:

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

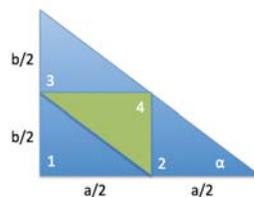


Figura 6: El triángulo se divide en 4 partes iguales.

Una propiedad muy importante es que el momentum \vec{P} de un sistema elemental o compuesto resulta igual al producto de su masa total M por la velocidad de su centro de masas \vec{V} .

En efecto, consideremos la definición de centro de masas y derivamos con respecto al tiempo para obtener su velocidad. Usando propiedades de las derivadas y considerando las masas m_i no varían en el tiempo

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} = \frac{1}{M} \vec{P}.$$

Entonces

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (3.11)$$

3.3.1. La Segunda Ley de Newton para un sistema extendido

Hemos denotado por \vec{V} la velocidad del centro de masas de un sistema. Su tasa de variación por unidad de tiempo corresponde a la aceleración del centro de masas y la denotamos por \vec{a} . En algunos textos se usa la notación \vec{a}_{CM} . Entonces,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

El uso de las leyes 2da y 3ra de Newton sobre cada una de las N componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema. Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas que ligan al sistema y del eventual cambio de geometría que este pueda experimentar.

Consideremos un sistema formado por N partículas interactuando entre ellas. El sistema no necesariamente es un sólido; puede tener cualquier constitución. Al analizar la i -ésima partícula, observamos que sobre ella puede actuar resultante externa que denotamos \vec{F}_i . También, sobre la misma partícula i -ésima interactúan las restantes $N - 1$ partículas. Por simplicidad, asumiremos que las fuerzas de interacción actúan entre pares de partículas. Es fácil generalizar las conclusiones que obtendremos, si consideramos fuerzas más complejas, pero la discusión se vería seriamente entorpecida⁴. Hecho este comentario, denotemos $\vec{f}_{j/i}$ la fuerza que ejerce la componente j sobre la i , naturalmente $\vec{f}_{i/i} = 0$, entonces la fuerza

⁴Es posible que el estudiante haya sido educado en la creencia de que las fuerzas elementales son siempre entre pares. Por ejemplo, las leyes de gravitación Universal y de interacción electrostática son de este tipo. Es necesario aclarar que la generalización de este principio al conjunto de todas las interacciones fundamentales carece de un sentido no preciso, pues las leyes fundamentales de la naturaleza no se escriben en el lenguaje entregado por las leyes de Newton. Sin embargo, y este es el principal punto de este apartado, incluso si fuese cierto, el supuesto de interacciones de a pares no se reflejaría necesariamente en las interacciones de nuestras partículas. Las celdas en las que dividimos los sistemas son complejas y están compuestas de muchos átomos.

neta de todas las componentes sobre la i -ésima es $\sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}$. La ecuación de movimiento de Newton para la partícula i es:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}. \quad (3.12)$$

La ecuación anterior corresponde a la de la partícula i , y por lo tanto resume un total de N ecuaciones. Si sumamos todas ellas:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}_{\vec{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}}_{\vec{0}}. \quad (3.13)$$

Aquí observamos

- que la suma de derivadas es igual a la derivada de la suma, por lo cual $\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$;
- que la resultante \vec{F} de las fuerzas externas es igual a la suma de todas ellas; y
- que la suma de todos los *pares de fuerzas internas* es nulo, en virtud al principio de acción y reacción ($\vec{f}_{i/j} = -\vec{f}_{j/i}$).

Con lo anterior

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\dot{\vec{V}} = M\vec{a}. \quad (3.14)$$

Esta ecuación resume el comportamiento del centro de masas de un sistema cualquiera cuando sobre este actúa una fuerza externa neta \vec{F} . Este es un resultado totalmente general, independiente de si el sistema es sólido, líquido, gaseoso, granular, plástico, amorfo, etc. **El movimiento del centro de masas está determinado exclusivamente por las fuerzas externas.** Notemos que este resultado es lo que a priori nos permitía el uso de las Leyes de Newton para sistemas extendidos. A lo largo de todo el primer semestre cuando hablabamos del movimiento de un cuerpo en respuesta a fuerzas, nos referiamos implícitamente al movimiento del centro de masas del cuerpo.

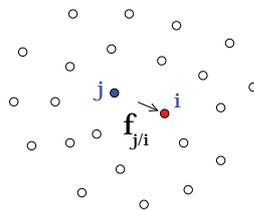


Figura 7: Un sistema de N cuerpos donde se muestra la fuerza ejercida por j sobre i .

3.4. Energía cinética por rotación en torno a ejes fijos

Consideremos un sólido rotando con velocidad angular ω en torno a un eje fijo. Lo que hace simple el cálculo de la energía cinética de este sistema es el hecho de que cada molécula que compone al sólido describe un movimiento circular.

La energía cinética es una cantidad aditiva, vale decir, si representamos el sistema como un conjunto de N celdas, cada una de masa m_i , con $i : 1 \rightarrow N$, entonces la energía cinética total del sistema está dado por

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$

Considerando que la celda i -ésima experimenta describe un trayecto de radio ρ_i con velocidad angular ω , entonces su rapidez es $\omega \rho_i$. Sustituyendo en la expresión para la energía cinética obtenemos

$$K = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \right]}_I \omega^2$$

Aquí hemos definido el *momento de inercia* del sólido en torno al eje de rotación, que denotamos por I :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 ,$$

con ρ_i la distancia al eje de la celda i -ésima, de masa m_i . Esta definición se extiende a cualquier sólido distribuido volumétricamente.

Observaciones:

1. El momento de inercia depende del eje con respecto al cual se evalúa.
2. No hay restricción a la orientación ni dirección de los ejes con respecto al cual se evalúe el momento de inercia.
3. El momento de inercia disminuye cuando la distribución de masas es muy próxima al eje considerado.

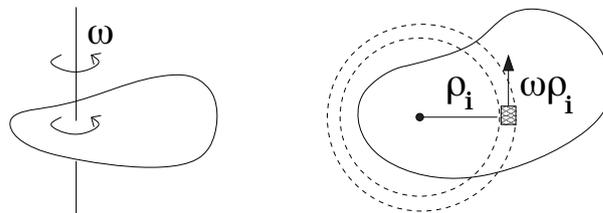


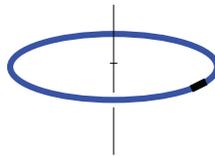
Figura 8: Un cuerpo plano rotando en torno a un eje fijo; a la derecha se ilustra una vista desde arriba.

4. El momento de inercia expresa el grado de ‘porfia’ de los sólidos a variaciones en su movimiento angular.

El momento de inercia de un aro:

Consideremos un aro de masa M y radio R . Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de este. Si discretizamos el aro en N segmentos, con N muy grande, entonces $\rho_i = R$, para todo i . Con ello

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = MR^2 .$$



Apéndices

3.5. ¿Altera un espectador pasivo la dinámica de un sistema?

El centro de masas de un sistema, sea este cohesionado, disgregado, amorfo o deformable, es un punto. Lo interesante es que cual sea la naturaleza del sistema y de sus fuerzas internas, el movimiento (aceleración, velocidad y trayectoria) de su centro de masas está determinado sólo por la acción de las **fuerzas externas**.

Un ejemplo curioso que permite ilustrar este punto lo encontramos en un sistema formado por dos masas idénticas, A y B, sin que interactúen entre sí y cada una de masa m . Ambas posan sobre una superficie horizontal lisa y el centro de masas se ubica en el punto medio entre ambas. Para fijar ideas, alineamos ambas partículas en un eje horizontal x , con x_A y x_B las coordenadas de A y B, respectivamente.

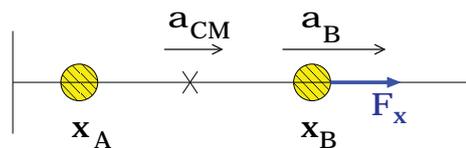
Si una fuerza horizontal F_x actúa solamente sobre B, entonces la ecuación para el **sistema binario**, $\sum F_{ext} = M_{tot}a_{CM}$, implica

$$F_x = (m + m)a_{CM} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m}.$$

Por otro lado, al considerar sólo la partícula B, su aceleración es simplemente $a_B = F_x/m$. Con ello notamos que

$$a_{CM} = \frac{1}{2}a_B,$$

vale decir, el centro de masas acelera a una tasa igual a la mitad de lo que ocurre con B.



Lo anterior es consistente con el siguiente resultado para la localización del centro de masas:

$$R_x = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

Si x_A no es alterada por la fuerza externa, entonces

$$\dot{R}_x = \frac{1}{2}\dot{x}_B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ddot{R}_x}_{a_{CM}} = \frac{1}{2} \underbrace{\ddot{x}_B}_{a_B}$$

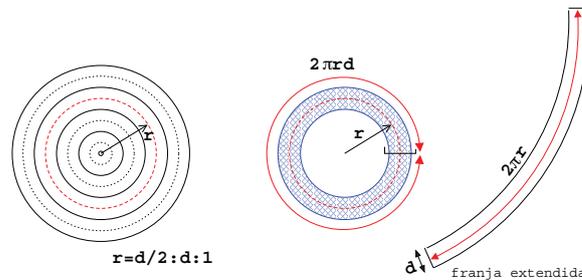
consistente con el resultado de mas arriba.

3.6. Area del círculo y volumen de esfera con MATLAB

Ilustramos el uso de MATLAB para el cálculo del área de un círculo y el volumen de una esfera. Si bien los resultados son conocidos, el procedimiento nos permitirá identificar estrategias para abordar problemas más complejos.

Para el cálculo del área del círculo de radio R , lo subdividimos en N anillos circulares, cada uno de ancho $d = R/N$. Si N es lo suficientemente grande, el área de un anillo de semiradio r es, en buena aproximación, igual a $2\pi r d$. Esto es ilustrado en la figura de más abajo. La construcción `r=d/2:d:1` define un arreglo de semiradios $d/2; 3d/2; \dots$.

El uso de esta misma idea en el cálculo del volumen de una esfera se traduce en subdividirla en cascarones de igual espesor. El volumen de una cascarina de 'semiradio' r y grosor d será $4\pi r^2 d$. El volumen total será la suma de estas contribuciones.



El programa en MATLAB es el siguiente

```
% PROGRAMA PARA CALCULAR AREA DE UN CIRCULO Y VOLUMEN DE ESFERA
clear
float('double')
R=1;
%----- Loop de convergencia
for N=1:100
  ri=0; rf=ri+R;
  dr=(rf-ri)/N;
  r=ri+dr/2:dr:rf;
%----- AREA=suma 2*Pi*r(i)*dr    VOL=suma 4*Pi*r(i)^2*dr
  area=2*pi*sum(r)*dr;
  vol=4*pi*sum(r.^2)*dr;
  fprintf('Area(%i) = %.7f    Vol(%i) = %.7f\n',N,area,N,vol);
end
fprintf('Vol exacto %.7f \n',4*pi/3)
```

3.7. Preguntas Conceptuales

Pregunta 1: Contraste el rol de las fuerzas internas en un sistema, con las fuerzas externas sobre este.

Pregunta 2: Defina el momento de inercia de un sólido e indique al menos una de sus propiedades.

Pregunta 3: En no más de 5 líneas, establezca dos diferencias físicas (no algebraicas!) entre el momento de inercia de un sólido y su centro de masas.

Pregunta 4: Excluyendo el caso de un objeto puntual, ilustre con un ejemplo un caso de momento de inercia nulo.

Pregunta 5: En no más de 5 líneas, establezca dos diferencias físicas (no algebraicas!) entre el momento de inercia de un sólido y su momentum.

Pregunta 6: Considere un lápiz de grafito e indique un eje que lo atraviese con respecto al cual su momento de inercia sea máximo, y un eje con respecto a cuál sea mínimo.

Pregunta 7: Considere el sistema conformado por granos de arena apilados sobre una mesa. Identifique fuerzas internas en el sistema y fuerzas externas actuando sobre el sistema.

Pregunta 8: Considere un sistema formado por dos partículas distantes en 1 cm. Indique un eje con respecto al cual su momento de inercia es nulo.

Pregunta 9: En no mas de 5 líneas, describa dos diferencias físicas entre la masa de un sistema y su centro de masas.

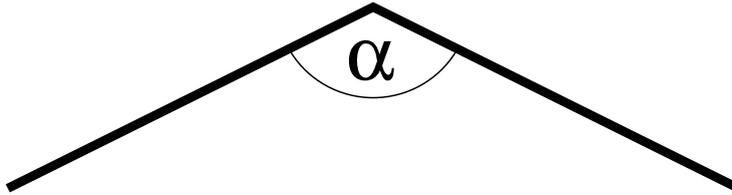
Pregunta 10: En no mas de 5 líneas describa la diferencia entre el momento de inercia de un sólido y su energía cinética.

Pregunta 11: Un canasto con manzanas posa sobre una mesa. En el contexto del sistema formado por el canasto y las manzanas, indique dos fuerzas externas y dos fuerzas internas.

Pregunta 12: Describa dos ejemplos de cuerpos cuyos centros de masa se ubican en el exterior de ellos. Justifique su respuesta.

3.8. Ejercicios Semestres Pasados

Ejercicio 1: Se tiene una barra de longitud L homogénea y doblada en “V” como indica la figura. El ángulo de doblado de la barra es α .



1. (2pt.) Determine a que distancia del vértice (donde se dobla la barra) se encuentra el centro de masa del objeto.
2. (2pt.) Verifique que el resultado tiene sentido si $\alpha = 0, \pi/2$ y π
3. (2pt.) Un fabricante entrega barras de $L = 1m$ con un ángulo α no muy preciso alrededor de $\pi/2$. En el control de calidad se puede medir la posición del centro de masas y de ahí obtener la calidad del ángulo. ¿Con qué precisión se debe medir la posición del centro de masa para poder determinar si ángulo está entre $\pi/2 - 0,01$ y $\pi/2 + 0,01$?
En la respuesta indique simplemente si se debe medir con una precisión de 1m, 10cm, 1 cm, 1mm ó 0,1mm. Justifique.