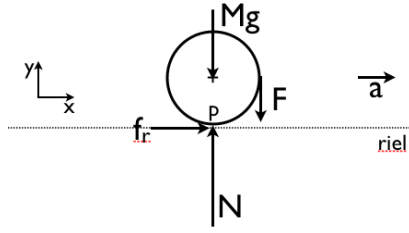


Solución Control 3, FI 1002, Primavera 2009

1. a) En el DCL de la figura, N representa la suma de las normales de ambos rieles y f_r la suma de las fuerzas de roce estáticas de ambos rieles, ambas sobre el punto de apoyo del cilindro en los rieles p . El peso del cilindro Mg se aplica sobre el centro de masa del cilindro, y la fuerza F es tangente al cilindro. a indica la dirección de la aceleración horizontal. Alternativamente se puede poner $2N$ y $2f_r$ en el DCL sin cambiar los resultados.



- b) Sólo la fuerza F realiza torque c/r al punto de apoyo p . El *brazo* de F c/r a p es $R = r \sin \theta$ donde $r = \sqrt{2}R$ es la distancia entre el punto de apoyo p y la tangente al cilindro donde se aplica la fuerza F , y $\theta = \pi/4$ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$ (vertical). Luego la ecuación de torque c/r a p es:

$$RF = I_p \alpha = I_p \frac{a}{R} = \left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) \frac{a}{R}$$

donde en la última igualdad usamos el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia c/r al punto p . Luego despejamos

$$a = \frac{2F}{3M}$$

- c) La segunda ley de Newton la escribimos a lo largo de ejes $\hat{x}$ horizontal hacia la derecha, e $\hat{y}$ vertical hacia arriba como

$$\hat{x}: \quad f_r = Ma \quad , \quad \hat{y}: \quad N - Mg - F = 0$$

El caso límite se obtiene de imponer $f_r = \mu_e N$, que reemplazando en las dos ecuaciones anteriores

$$Ma = M \frac{2F}{3M} = \mu_e (Mg + F)$$

de donde despejamos

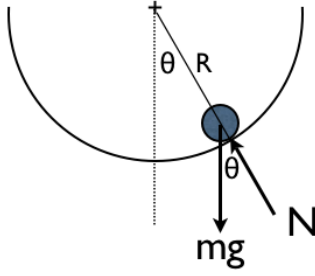
$$F = \frac{\mu_e Mg}{2/3 - \mu_e} = Mg$$

donde en la última igualdad reemplazamos $\mu_e = 1/3$.

2. La figura ilustra el DCL de la esferita de radio r , las únicas dos fuerzas sobre la esferita son el peso y la normal. Si calculamos el torque neto c/r al punto de contacto p entre la esferita r y el cilindro R obtenemos

$$rmg \sin(\pi - \theta) = I_p \alpha$$

donde el torque apunta hacia afuera del papel si la esferita está al lado derecho del punto más bajo del cilindro y hacia adentro del papel si la esferita está al lado izquierdo.



El momento de inercia de la esferita c/r a su centro de masa es $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$ de donde obtenemos $I_p = \frac{7}{5}mr^2$ c/r a un punto sobre la superficie. La aceleración del centro de masa de la esferita es $a_{cm} = r\alpha$, donde α es la aceleración angular de la esferita en torno a su centro. Reemplazando I_p , a_{cm} , y $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ en la ecuación anterior obtenemos la ecuación del movimiento:

$$g \sin \theta = \frac{7}{5}a_{cm}$$

Ahora usamos el hecho que el centro de masa de la esferita se mueve en movimiento circular por el interior del cilindro (a una distancia $R - r$ del centro). Luego a_{cm} ($= r\alpha$) representa también la aceleración tangencial: $a_{cm} = -(R - r)\ddot{\theta}$ donde los puntos representan derivadas con respecto al tiempo. Esta es la relación entre la rotación en torno al centro de la esfera y la rotación en torno al eje del cilindro que es necesario imponer para resolver el problema. Notar el signo negativo: si la esferita baja desde la posición de la figura entonces $\alpha > 0$ y $\ddot{\theta} < 0$; si la esferita está al lado izquierdo de la vertical entonces $\alpha < 0$ y $\ddot{\theta} > 0$.

Para pequeñas oscilaciones podemos usar $\sin \theta \sim \theta$, llegando a la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)}\theta = 0 \quad ,$$

que representa un movimiento armónico simple de frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R - r)}} = \frac{2\pi}{T}$; de donde obtenemos finalmente el período del movimiento como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}} \quad .$$

3. a) La posición horizontal del centro de M es $x(t)$. La posición horizontal de la bolita m es $x(t) + y(t)$, luego la posición del centro de masa del sistema es

$$x_{cm} = \frac{Mx(t) + mx(t) + my(t)}{M + m} = x(t) + \frac{m}{M + m}y(t)$$

Las fuerzas externas al carrito son debidas al resorte ($F_e = -kx$) y al roce viscoso ($F_r = -b\dot{x}$), luego la segunda ley de Newton la escribimos como

$$-kx(t) - b\dot{x} = (M + m)\ddot{x}_{cm} \quad .$$

Usando $\ddot{y} = -\omega^2 y(t)$ y reordenando

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m\ddot{y} = m\omega^2 \sin(\omega t)$$

- b) Dividiendo la ecuación anterior por $(M+m)$ e identificando $\omega_0^2 = k/(M+m)$ y $1/\tau = b/(M+m)$ podemos reescribirla como

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{mr\omega^2}{M+m} \sin(\omega t)$$

La única dependencia de la solución propuesta $x(t) \equiv B(\omega) \sin(\omega t - \delta)$ en el tiempo está en el numerador luego obtenemos

$$\frac{1}{\tau}\dot{x} = \frac{\omega}{\tau} B(\omega) \cos(\omega t - \delta) \quad \text{y} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 B(\omega) \sin(\omega t - \delta)$$

luego

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = [-\omega^2 + \omega_0^2] B(\omega) \sin(\omega t - \delta) + \frac{\omega}{\tau} B(\omega) \cos(\omega t - \delta) \quad .$$

Usando $\sin(\omega t - \delta) = \sin(\omega t) \cos \delta + \sin(-\delta) \cos(\omega t)$, $\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta - \sin(\omega t) \sin(-\delta)$; reemplazando en la ecuación anterior y reagrupando:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + \frac{\omega}{\tau} \sin \delta \right] B(\omega) \sin(\omega t) + \left[\frac{\omega}{\tau} \cos \delta - (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta \right] B(\omega) \cos(\omega t)$$

factorizando por $\cos \delta$ y reemplazando $\tan \delta = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$ se anula el término con $\cos(\omega t)$ y se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega^2}{\tau^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \cos \delta B(\omega) \sin(\omega t)$$

A partir de la relación $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$ obtenemos

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2/\tau^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}$$

que al reemplazar arriba se obtiene finalmente:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right] \frac{B(\omega)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}} \sin(\omega t) = \frac{mr\omega^2}{M+m} \sin(\omega t)$$

es decir, efectivamente la función $x(t)$ propuesta es solución.

- c) Expandiendo el interior de la raíz cuadrada en el denominador de $B(\omega)$ encontramos

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} = \sqrt{\omega^4 + (1/\tau^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4}$$

que identificando término a término con la expresión experimental resulta

$$\omega_0^4 = 16 \quad \text{y} \quad (1/\tau^2 - 2\omega_0^2) = -7 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \tau = 1 \text{ s}$$

La amplitud $B(\omega)$ es máxima cuando $\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - 2(\frac{1}{2\tau})^2$ de donde $\omega_{max} = \sqrt{3,5} \sim 1,9 \sim \omega_0$. Alternativamente imponiendo $\frac{dB(u)}{du} = 0$ con $u = \omega^2$ se obtiene $u_{max} = 32/7 \sim 4,6$ de donde $\omega_{max} \sim 2,1 \sim \omega_0$.