Capítulo 13

Oscilador Armónico

13.1. La ecuación diferencial $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de un oscilador armónico simple es

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \ . \tag{13.1}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Comenzaremos este capítulo exponiendo algunos resultados generales relativos a este tipo de ecuaciones, resultados que serán de gran utilidad para nuestros propósitos.

> *Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones cualesquiera de cierta ecuación diferencial. Tal ecuación diferencial es lineal si $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ también es solución, donde α y β son constantes (reales o complejas) arbitrarias.*

Ejercicio: Demuestre que la ecuación diferencial del oscilador armónico es lineal.

> *El orden de la derivada más alta da el orden de la ecuación diferencial. La solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes arbitrarias (que luego deben ser determinadas usando las condiciones de borde).*

La ecuación diferencial del oscilador armónico es de segundo orden, por lo tanto, la solución general tiene dos constantes arbitrarias. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones cualesquiera (distintas) de (13.1). Como la ecuación diferencial (13.1) es lineal, se tiene que la función $x_g(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, con α y β constantes arbitrarias, también es solución. Pero observe que la solución $x_g(t)$ tiene dos constantes arbitrarias y, por lo tanto, debe ser una solución general del problema. En otras palabras, todas las posibles soluciones de (13.1) deben ser de la forma $x_g(t)$; las distintas soluciones se diferencian sólo por los valores de α y β.
En el lenguaje técnico se dice que las soluciones de la ecuación diferencial (13.1) forman un espacio vectorial de 2 dimensiones, siendo x_1 y x_2 dos "vectores" particulares de ese espacio. Los dos vectores $x_1(t)$ y $x_2(t)$ (si uno de ellos no es múltiplo del otro) forman una *base* del espacio vectorial. Cualquier otro vector (o sea, solución de (13.1)) es una combinación lineal de los vectores base, es decir, es de la forma $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$.

Sabemos que las funciones
$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \tag{13.2}$$
y
$$x_2(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t) \tag{13.3}$$
son dos soluciones particulares de (13.1). Estas dos funciones (y de hecho así se hace frecuentemente) pueden ser tomadas como los dos vectores base del espacio vectorial formado por las soluciones de (13.1). Cualquier otra solución $x(t)$ de la ecuación diferencial del oscilador armónico puede escribirse de la forma
$$x(t) = a\ \cos(\omega_0 t) + b\ \operatorname{sen}(\omega_0 t)\ .$$
Las constantes a y b se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Observe que no es necesario elegir las funciones (13.2) y (13.3) como vectores base del espacio vectorial; de hecho, cualquier otro par de soluciones (mientras una no sea múltiplo de la otra) también habría servido. Lo interesante es que las funciones (13.2) y (13.3) *no* son las funciones más convenientes para usar como base. Existe un par de soluciones de (13.1) que, si se usan como base, simplifican notoriamente los cálculos. En lo que sigue de esta sección introduciremos esta nueva base, estudiaremos algunas de sus propiedades y la relacionaremos con la base dada por las funciones (13.2) y (13.3).

Consideremos la función
$$z(t) = e^{\Gamma t} = \exp(\Gamma t)\ .$$
Al derivar $z(t)$ dos veces se obtiene
$$\dot{z}(t) = \Gamma\, e^{\Gamma t}$$
y
$$\ddot{z}(t) = \Gamma^2\, e^{\Gamma t} = \Gamma^2\, z(t)\ .$$
Observe que esta última ecuación se puede escribir de la forma
$$\ddot{z}(t) - \Gamma^2 z(t) = 0\ .$$
Esta ecuación es idéntica a la del oscilador armónico si se identifica
$$\Gamma^2 = -\omega_0^2\ ,$$
lo que es equivalente a la relación
$$\Gamma = \pm i\omega_0\ ,$$
con $i \equiv \sqrt{-1}$. Observe que acabamos de demostrar que las funciones
$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \tag{13.4}$$
y
$$x_2(t) = e^{-i\omega_0 t} \tag{13.5}$$

son dos soluciones particulares de la ecuación diferencial del oscilador armónico, o sea, de (13.1). Resulta que éstas son las funciones más convenientes para generar todas las demás soluciones de (13.1). Cualquier solución $x(t)$ de (13.1) se puede escribir de la forma

$$x(t) = \alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t} ,$$

donde las constantes α y β se determinan a partir de las condiciones iniciales. (Las constantes α y β, generalmente, resultan ser números complejos).
Determinemos las relaciones entre las dos bases. Como $\cos(\omega_0 t)$ es solución de (13.1) debe poder escribirse de la forma

$$\cos(\omega_0 t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} . \tag{13.6}$$

Determinemos las constantes c_1 y c_2. Derivando (13.6) se encuentra que

$$-\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) = i\omega_0 c_1 e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 c_2 e^{-i\omega_0 t} ,$$

o sea,

$$\operatorname{sen}(\omega_0 t) = -i \left(c_1 e^{i\omega_0 t} - c_2 e^{-i\omega_0 t} \right) . \tag{13.7}$$

Evaluando (13.6) y (13.7) para $t = 0$ se obtiene

$$1 = c_1 + c_2$$

y

$$0 = -i(c_1 - c_2) .$$

De estas relaciones se deduce que $c_1 = c_2 = 1/2$. De esta manera hemos demostrado que

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \right) \tag{13.8}$$

y

$$\operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) . \tag{13.9}$$

También podemos escribir $\exp(i\omega_0 t)$ y $\exp(-i\omega_0 t)$ en función de $\cos(\omega_0 t)$ y $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$. Usando las relaciones anteriores no es difícil demostrar que

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \operatorname{sen}(\omega_0 t) \tag{13.10}$$

y

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \operatorname{sen}(\omega_0 t) . \tag{13.11}$$

Por último, sustituyendo en (13.10) $\omega_0 t$ por π encontramos una de las más bellas ecuaciones de la matemática

$$e^{i\pi} + 1 = 0 ,$$

relación que combina de manera simple los más importantes números de esa ciencia: 0, 1, π, e e $i = \sqrt{-1}$.

Ejercicio: Demuestre que el módulo de los números complejos $\exp(i\omega_0 t)$ y $\exp(-i\omega_0 t)$ es uno, es decir, demuestre que

$$|e^{i\omega_0 t}| = |e^{-i\omega_0 t}| = 1 .$$

13.2. El oscilador armónico simple

Cada vez que la ecuación dinámica de un sistema tiene la forma

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0 \ ,$$

estaremos en presencia de un oscilador armónico.

Ejemplo: Consideremos un péndulo de largo R. Elijamos el origen en el punto de suspensión. El momento angular y el torque (en torno al origen) vienen dados por

$$l = mR(R\dot{\theta})$$

y

$$\tau = -Rmg\ \mathrm{sen}\,\theta \ .$$

Por otra parte

$$\tau = \frac{dl}{dt} = mR^2\ddot{\theta} \ ,$$

luego

$$mR^2\ddot{\theta} = -Rmg\ \mathrm{sen}\,\theta \ .$$

Esta relación se puede escribir de la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\ \mathrm{sen}\,\theta = 0 \ .$$

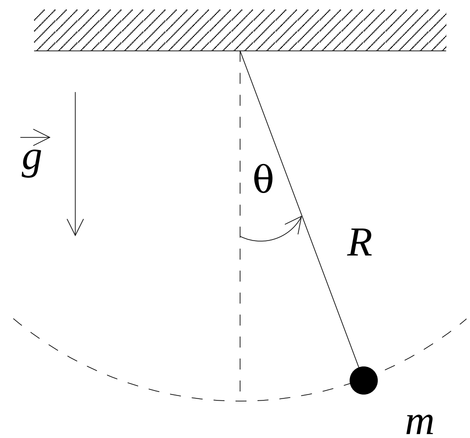

Figura 13.1

Denotando g/R por ω_0^2 y restringiéndonos a pequeños ángulos, de manera que podamos usar la aproximación $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \ . \tag{13.12}$$

La constante ω_0 está relacionada con el período T del movimiento por la relación $\omega_0 T = 2\pi$. Conocer la ecuación dinámica de un sistema permite, en principio, conocer la evolución temporal del mismo. Para encontrar la solución explícita del problema se procede generalmente de la siguiente manera: i) se busca la solución general de la ecuación dinámica; ii)las constantes arbitrarias de la ecuación general se determinan exigiendo que la solución cumpla con las condiciones de borde (iniciales) del problema.

Ilustremos el procedimiento con nuestro ejemplo concreto. Supongamos que en el instante $t = 0$ el ángulo y la velocidad angular del péndulo son θ_0 y Ω, respectivamente. Deseamos encontrar una expresión explícita para $\theta(t)$. Resolveremos este problema de dos maneras:

a) Sabemos que la solución general de (13.12) puede escribirse de la forma

$$\theta(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) \ .$$

Determinaremos las constantes a y b. Para ello derivemos primero la última ecuación respecto al tiempo. Se obtiene

$$\dot{\theta}(t) = -a\,\omega_0\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + b\,\omega_0\cos(\omega_0 t) \ .$$

Evaluando las dos últimas ecuaciones para $t = 0$, y usando las condiciones iniciales, se obtiene

$$\theta(0) = a = \theta_0$$

y

$$\dot{\theta}(0) = b\omega_0 = \Omega \ .$$

La solución explícita se obtiene sustituyendo los valores de a y b, que se deducen de estas relaciones, en la solución general:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\Omega}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) \ .$$

b) Como vimos en la sección anterior, en lugar de $\cos(\omega_0 t)$ y $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ también podemos usar las soluciones particulares $\exp(i\omega_0 t)$ y $\exp(-i\omega_0 t)$ como base. O sea, otra forma de escribir la solución general de (13.12) es

$$\theta(t) = \alpha \, \exp(i\omega_0 t) + \beta \, \exp(-i\omega_0 t) \ .$$

Determinaremos las constantes α y β. Para ello, nuevamente, derivemos la solución general:

$$\dot{\theta}(t) = i\omega_0 \, \alpha \, \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 \, \beta \, \exp(-i\omega_0 t) \ .$$

Evaluando estas dos últimas ecuaciones para $t = 0$, y usando las condiciones iniciales, se obtiene

$$\theta(0) = \theta_0 = \alpha + \beta$$

y

$$\dot{\theta}(0) = \Omega = i\omega_0 \, \alpha - i\omega_0 \, \beta \ .$$

Despejando α y β de estas dos relaciones:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\theta_0 - i\frac{\Omega}{\omega_0}\right) \ ,$$

$$\beta = \alpha^* = \frac{1}{2}\left(\theta_0 + i\frac{\Omega}{\omega_0}\right) \ .$$

Sustituyendo estos valores en la solución general se obtiene

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\left(\theta_0 - i\frac{\Omega}{\omega_0}\right) \exp(i\omega_0 t) + \frac{1}{2}\left(\theta_0 + i\frac{\Omega}{\omega_0}\right) \exp(-i\omega_0 t)$$

Demostremos ahora que las expresiones encontradas en las partes a) y b) son equivalentes. En efecto, reordenando los términos de la solución encontrada en la parte b) se encuentra que

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \theta_0 \, \frac{1}{2} \left(\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)\right) - i \, \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{1}{2} (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) \\
&= \theta_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \\
&= \theta_0 \, \cos(\omega_0 t) + \frac{\Omega}{\omega_0} \, \operatorname{sen}(\omega_0 t) \ .
\end{aligned}$$

Los dos procedimientos dan exactamente el mismo resultado. En el presente ejemplo, el segundo método resultó ser más engorroso, más largo y menos transparente y ciertamente no se observa ninguna ventaja al haber introducido la base con exponenciales complejas. Sin embargo, en las secciones siguientes, al estudiar problemas levemente más complejos, la ventaja de usar las exponenciales complejas en lugar del seno y coseno resultará más evidente.

13.3. El oscilador armónico atenuado

Ejemplo: Consideremos una masa m adosada a un resorte de constante de restitución k. Supongamos que la masa m sólo se puede desplazar a lo largo del eje $\hat{x}$. Sea $x(t)$ la posición de m, siendo $x = 0$ la posición de equilibrio. Supongamos además que sobre el sistema actúa una fuerza de roce que es proporcional a la velocidad $\dot{x}$ (pero de signo contrario), o sea

$$f_r = -\gamma\,\dot{x}(t) \qquad (\text{con } \gamma > 0)\ .$$

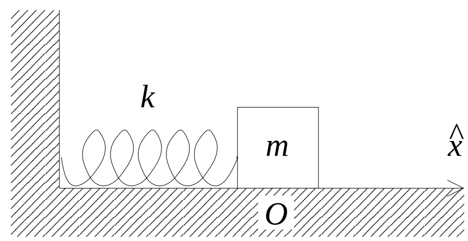

Figura 13.2

Usando la segunda ley de Newton se deduce que la posición $x(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) - \gamma\,\dot{x}(t)\ .$$

Introduciendo las constantes $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ y $\eta \equiv \gamma/2m$ se encuentra que la relación dinámica para este oscilador armónico con roce es

$$\ddot{x} + 2\eta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0\ . \tag{13.13}$$

Esta es la *ecuación diferencial del oscilador armónico atenuado.*

Ejercicio: Demuestre que la ecuación diferencial (13.13) es lineal.

Deseamos encontrar la solución general de la ecuación (13.13). Sabemos que, si encontramos dos soluciones particulares distintas de (13.13) (denotémoslas por $x_1(t)$ y $x_2(t)$), entonces la solución general vendrá dada por

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\ ,$$

donde las constantes α y β se eligen de manera que la solución satisfaga las condiciones iniciales.

Procederemos de acuerdo al siguiente esquema: primero encontraremos la solución general de (13.13) y luego determinaremos las constantes arbitrarias de la solución general de manera de obtener la solución particular que, en $t = 0$, satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0$$

y

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0 \ .$$

Ansatz (o hipótesis de trabajo): Busquemos soluciones del tipo $x(t) = e^{\Gamma t}$, donde Γ es una constante por determinar. Derivando el *Ansatz* dos veces se obtiene

$$\dot{x}(t) = \Gamma \, e^{\Gamma t} \ ,$$

y

$$\ddot{x}(t) = \Gamma^2 \, e^{\Gamma t} \ .$$

Sustituimos estas relaciones en (13.13),

$$\Gamma^2 \, e^{\Gamma t} + 2\eta \, \Gamma \, e^{\Gamma t} + \omega_0^2 \, e^{\Gamma t} = 0 \ ,$$

o sea,

$$\Gamma^2 + 2\eta \, \Gamma + \omega_0^2 = 0 \ .$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado para Γ se encuentra

$$\Gamma = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} \ . \tag{13.14}$$

Debemos distinguir tres casos:

i) Caso $\eta > \omega_0$ (oscilador armónico supercrítico).

En este caso la ecuación (13.14) nos entrega dos soluciones distintas de la ecuación diferencial, éstas son

$$x_1(t) = e^{\left(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}\right) t}$$

y

$$x_2(t) = e^{\left(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}\right) t} \ .$$

La solución general, por lo tanto, es

$$x(t) = \alpha \, e^{\left(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}\right) t} + \beta \, e^{\left(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}\right) t} \ .$$

Determinando α y β de manera que la solución general anterior cumpla con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$, se encuentra

$$x(t) = \frac{x_0}{2} \left[\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\left(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}\right) t} + \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\left(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}\right) t} \right] \ .$$

La figura 13.3 muestra cualitativamente el comportamiento del oscilador en este caso. En el caso supercrítico la fricción es muy grande y la masa m no oscila. Imagínese una bolita colgada de un resorte sumergida en un frasco con miel.

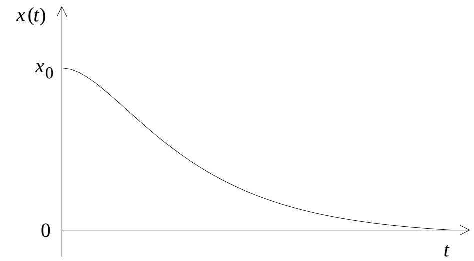

Figura 13.3

b) Caso $\eta < \omega_0$ (oscilador armónico subcrítico).

En este caso la ecuación (13.14) también nos da dos soluciones distintas:

$$x_1(t) = e^{\left(-\eta + i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}\right)t} = e^{-\eta t}\, e^{i\omega t}$$

y

$$x_2(t) = e^{\left(-\eta - i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}\right)t} = e^{-\eta t}\, e^{-i\omega t} \ ,$$

con

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \ .$$

La solución general viene dada por

$$x(t) = e^{-\eta t}\, \left(\alpha\, e^{i\omega t} + \beta\, e^{-i\omega t}\right) \ .$$

Evaluando α y β de manera que la solución cumpla las condiciones de borde $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$, se encuentra

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2}\, e^{-\eta t} \left[\left(1 + \frac{\eta}{i\omega}\right) e^{i\omega t} + \left(1 - \frac{\eta}{i\omega}\, e^{-i\omega t}\right)\right] \\ &= x_0\, e^{-\eta t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\eta}{\omega}\, \mathrm{sen}(\omega t)\right] \ . \end{aligned} \tag{13.15}$$

La figura 13.3 muestra cualitativamente el comportamiento del oscilador en este caso. En el caso subcrítico la fricción es relativamente pequeña y la masa m oscila. Note que a medida que transcurre el tiempo la amplitud de la oscilación decae exponencialmente.

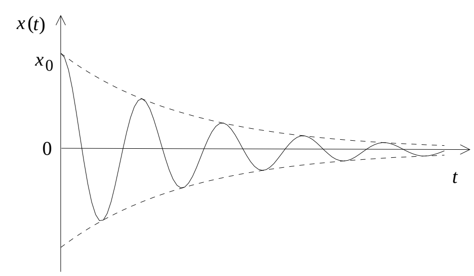

Figura 13.4

c) Caso $\eta = \omega_0$ (oscilador armónico crítico).

Este caso es levemente más complicado, ya que la ecuación (13.14) nos da sólo una solución:

$$x_1(t) = e^{-\eta t} \ .$$

Debemos, de alguna manera, encontrar otra solución para poder construir la solución general.

Ejercicio: Demuestre que la otra solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\eta\,\dot{x} + \eta^2\,x = 0$$

es la función

$$x_2(t) = t\,e^{-\eta t}\ .$$

Usando el resultado del ejercicio se encuentra que, para un oscilador armónico atenuado crítico, la solución general viene dada por

$$x(t) = (\alpha + \beta\,t)\,e^{-\eta t}\ .$$

Para que la solución cumpla con las condiciones de borde se determina que ésta viene dada por

$$x(t) = x_0(1 + \eta t)\,e^{-\eta t}\ . \tag{13.16}$$

Observe que, independiente de las condiciones iniciales, el oscilador armónico atenuado paulatinamente siempre se acercará a su posición de equilibrio, es decir, para $t \to \infty$, siempre $x(t) \to 0$.

Ejercicio: Demuestre que la solución (13.16) también se puede obtener a partir de (13.15) poniendo $\omega_0 = \eta + \epsilon$ y realizando el límite $\epsilon \to 0$.

13.4. El oscilador armónico forzado

Agreguémosle al oscilador armónico atenuado una fuerza armónica externa F_e de una frecuencia Ω, es decir,

$$F_e = F_0\,\cos(\Omega t)\ .$$

Situaciones de este tipo se dan con gran frecuencia en la naturaleza.
La ecuación diferencial para el oscilador en este caso es

$$\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\,\cos(\Omega t)\ . \tag{13.17}$$

Ejemplo: Demuestre que la ecuación diferencial anterior no es lineal, o sea, la suma de dos soluciones ya no sigue siendo solución.

Si el lado derecho es nulo (o sea, $F_0 = 0$), entonces la ecuación coincide con la analizada en la sección anterior. En este caso conocemos la solución general. Denotemos esta solución general (de la *ecuación homogénea*) por $x_h(t)$. Tal solución tendrá dos constantes arbitrarias.

Sea $x_p(t)$ una solución particular cualquiera de (13.17), entonces la solución general será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)\ .$$

Efectivamente, es fácil demostrar que $x(t)$ es solución de (13.17). De que es la solución general se desprende del hecho de que ésta, por ser la ecuación diferencial de segundo orden, debe tener dos constantes arbitrarias, las que $x(t)$ efectivamente tiene (las de la función $x_h(t)$).

En general, la solución $x(t)$ tiene un comportamiento complejo. Sin embargo, para tiempos grandes ($t \to \infty$) la solución $x_h(t)$ siempre desaparece, quedando sólo la solución particular $x_p(t)$. Observe que $x_p(t)$ es independiente de las condiciones iniciales. Todas las soluciones del problema, para $t \to \infty$, terminarán siendo idénticas. Cuando esto ocurre, se dice que se ha llegado al *estado estacionario*. Las oscilaciones iniciales del oscilador, que son altamente irregulares, y que si dependen de las condiciones iniciales, se llama es *transiente*. Para muchos problemas prácticos la solución que interesa es la del estado estacionario.

En lo que sigue encontraremos la solución $x_p(t)$ que es la correspondiente al estado estacionario. Por ser algebraicamente mucho más simple, usaremos extensivamente las funciones exponenciales complejas. La fuerza externa la reemplazaremos por la expresión

$$\bar{F}_e = F_0 \, e^{i\Omega t} \ .$$

En otras palabras, en lo que sigue encontraremos la solución estacionaria de la ecuación diferencial

$$\ddot{\bar{x}} + 2\eta \, \dot{\bar{x}} + \omega_0^2 \, \bar{x} = \frac{F_0}{m} \, e^{i\Omega t} \ . \tag{13.18}$$

Observe que la parte real de $\bar{F}_e$ corresponde a la fuerza externa $F_e = F_0 \cos(\Omega t)$, luego, al tomar la parte real de esta ecuación diferencial, obtenemos la ecuación (13.17); y a su vez, la parte real de $\bar{x}(t)$ corresponderá a la solución estacionaria de (13.17).

Hagamos el siguiente Ansatz:

$$\bar{x}(t) = A \, e^{i\Omega t} \ ,$$

o sea, analicemos si (13.18) puede tener una solución de este tipo. Aquí A es una constante que eventualmente habría que determinar. Derivamos $\bar{x}(t)$ respecto al tiempo:

$$\dot{\bar{x}}(t) = i\Omega A \, e^{i\Omega t}$$

y

$$\ddot{\bar{x}}(t) = -\Omega^2 \, A \, e^{i\Omega t} \ .$$

Sustituyendo esto en (13.18) se obtiene

$$-\Omega^2 \, A \, e^{i\Omega t} + 2\eta i\Omega A \, e^{i\Omega t} + \omega_0^2 \, A \, e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} \, e^{i\Omega t} \ ,$$
$$-\Omega^2 \, A + 2\eta i\Omega A + \omega_0^2 \, A = \frac{F_0}{m} \ ,$$

o sea, nuestro Ansatz es una solución sólo si

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\eta\Omega} \ .$$

Observe que A es un número complejo.

Cualquier número complejo A se puede escribir de la forma

$$A = A_R + iA_I = |A|\, e^{i\phi} = |A| \cos\phi + i|A| \operatorname{sen}\phi \ ,$$

donde $|A|$ es el módulo y ϕ la *fase* del número complejo. Conociendo la parte real e imaginaria de A se pueden encontrar el módulo y la fase usando las relaciones

$$|A| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2}$$

y

$$\tan\phi = \frac{A_I}{A_R} \ .$$

Usando las expresiones anteriores para el número complejo A se encuentra que éste puede escribirse de la forma

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \exp\left[i \arctan\left(\frac{2\Omega\eta}{\Omega^2-\omega_0^2}\right)\right] \ .$$

Hemos encontrado una solución particular de (13.18):

$$\bar{x}(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \exp\left[i\Omega t + i \arctan\left(\frac{2\Omega\eta}{\Omega^2-\omega_0^2}\right)\right] \ .$$

La solución estacionaria de (13.17) es la parte real de $\bar{x}(t)$, o sea,

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \cos\left[\Omega t + \arctan\left(\frac{2\Omega\eta}{\Omega^2-\omega_0^2}\right)\right] = |A| \cos(\Omega t + \phi) \ ,$$

con

$$|A| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}}$$

y

$$\tan\phi = \frac{2\Omega\eta}{\Omega^2-\omega_0^2} \ .$$

Observe que la solución estacionaria, o sea, después de que el transiente ha desaparecido, oscila con la *misma* frecuencia con que la fuerza externa está forzando el sistema. Observe, sin embargo, que las dos oscilaciones (la de la fuerza externa y la de la respuesta del sistema) no van es fase, sino que están desfasados en ϕ. La amplitud con que oscila el sistema en el estado estacionario viene dada por $|A|$.

Resonancias

Analicemos con más detalle la amplitud con que oscila un oscilador armónico forzado en su estado estacionario. La figura 13.5a muestra la amplitud $|A|$ en función de la frecuencia Ω con que se está forzando el oscilador. Las distintas curvas corresponden a distintos parámetros del coeficiente de roce $\xi \equiv 2\eta/\omega_0$. cuando el roce es pequeño, la amplitud llega a ser muy grande cuando la frecuencia Ω con que se fuerza el oscilador es parecida a la frecuencia natural del oscilador ω_0. Estas grandes respuestas de un sistema de estímulos pequeños se conoce con el nombre de *resonancias.*

Para η pequeño, la amplitud máxima de la resonancia viene dada por

$$|A|_{\max} = \frac{F_0}{2m\eta\omega_0} \; .$$

La fricción η, aun cuando es pequeña, no puede despreciarse. De lo contrario se obtienen resultados absurdos; la amplitud del oscilador se iría incrementando indefinidamente.

Figura 13.5a Figura 13.5b

La figura 13.5b muestra el comportamiento de la fase ϕ. Observemos que si la frecuencia Ω con que se fuerza el sistema es mucho menor que la frecuencia natural del sistema ω_0, entonces el estímulo y la respuesta del sistema esencialmente estarán en fase; cuando $\Omega \gg \omega_0$, las dos magnitudes estarán completamente desfasadas. Cuando el sistema entra en resonancia $\omega_0 \simeq \Omega$, el desfase entre el estímulo y la respuesta del sistema es de 90°

13.5. Osciladores armónicos acoplados

Considere la configuración mostrada en la figura 13.7. Las masas están restringidas a moverse a lo largo del eje $\hat{x}$. Analicemos la forma en la cual oscila este sistema.

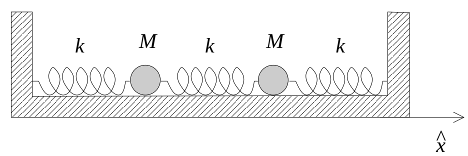

Figura 13.7

Sean x_1 y x_2 los desplazamientos de las dos masas respecto a sus posiciones de equilibrio. Las ecuaciones de movimiento para estas masas son:

$$M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \tag{13.19}$$

y

$$M\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \; . \tag{13.20}$$

(Note que $(x_2 - x_1)$ es el alargamiento neto del resorte central respecto al largo que tiene cuando el sistema está en equilibrio.) Las ecuaciones (13.19) y (13.20) son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas (la segunda derivada de x_1 depende no sólo de x_1, sino que también de x_2, y lo mismo ocurre para la segunda derivada de x_2). Sumando y restando las dos ecuaciones diferenciales obtenemos

$$M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

y

$$M(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1) \; .$$

Definamos dos nuevas variables ξ_1 y ξ_2 por

$$\xi_1 = x_1 + x_2$$

y

$$\xi_2 = x_2 - x_1 \ .$$

Con estas definiciones las dos últimas ecuaciones diferenciales se pueden escribir de la forma

$$M\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1$$

y

$$M\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 \ .$$

Observe que estas ecuaciones ya no están acopladas y que cada una de ellas corresponde a la de un oscilador armónico simple. Las soluciones generales vienen dadas por

$$\xi_1(t) = A\,\cos(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)$$

y

$$\xi_2(t) = C\,\cos(\omega_2 t) + D\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) \ ,$$

con

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{k}{M}}$$

y

$$\omega_2 \equiv \sqrt{\frac{3k}{M}} = \sqrt{3}\,\omega_1 \ .$$

Conociendo ξ_1 y ξ_2 en función del tiempo también conocemos el comportamiento de x_1 y x_2:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(\xi_1(t) + \xi_2(t)) \\ &= \frac{A}{2}\,\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) + \frac{C}{2}\,\cos(\omega_2 t) + \frac{D}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2}(\xi_1(t) - \xi_2(t)) \\ &= \frac{A}{2}\,\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) - \frac{C}{2}\,\cos(\omega_2 t) - \frac{D}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) \ . \end{aligned}$$

Esta solución general tiene cuatro constantes arbitrarias (A, B, C y D), las que se determinan exigiendo que la solución cumpla con las cuatro condiciones iniciales (la posición y velocidad de cada una de las masas). Por ejemplo, si en $t = 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$ y $\dot{x}_2 = 0$, entonces las constantes resultan ser $A = C = 0$, $B = v_0/\omega_1$ y $D = -v_0/\omega_2$. Debido a que la razón entre las frecuencias ω_1 y ω_2 no es un número racional, el sistema, en general, no manifestará un comportamiento periódico.

Modos normales

Si en el problema anterior hacemos oscilar el sistema de manera que $C = D = 0$, entonces la posición de ambas masas vendrá dada por

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)\ .$$

Observe que en ese caso ambas masas oscilan juntas (en fase) y que el movimiento de cada una de ellas es armónico (con período $T_1 = 2\pi/\omega_1$).
Algo parecido ocurre cuando el sistema oscila de manera que $A = B = 0$. En este caso

$$x_1(t) = -x_2(t) = \frac{C}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{D}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_2 t)\ .$$

Nuevamente ambas masas oscilan juntas, pero en sentido opuestos (en contrafase) y el movimiento de cada una de ellas es armónico (con período $T_2 = 2\pi/\omega_2$). Estos modos de oscilación armónicos del sistema se conocen con el nombre de *modos normales*.

Un concepto útil en la discusión de sistemas más complejos es el de *grados de libertad*. Los grados de libertad de un sistema son el número de variables que se requieren para describir el sistema. Por ejemplo: una masa m restringida a moverse a lo largo de una recta tiene un grado de libertad. La misma partícula, si su movimiento está confinado a un plano, tendrá dos grados de libertad. Un sistema consistente de tres partículas que pueden moverse en un plano, tiene 6 grados de libertad. Dos partículas en el espacio tridimensional unidas por una barra rígida poseen 5 grados de libertad.
A continuación resumiremos, sin demostración, algunas características generales que presentan todos los sistemas consistentes de osciladores armónicos acoplados.

i) Un sistema de osciladores armónicos acoplados de N grados de libertad se describe con N funciones $\{x_j(t)\}$. Las ecuaciones dinámicas son ecuaciones diferenciales de segundo orden y generalmente están acopladas.

ii) Siempre es posible introducir nuevas variables $\{\xi_j(t)\}$ cuyas ecuaciones diferenciales son de la forma
$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = 0\ ,$$
o sea, corresponden a osciladores armónicos simples. Las variables $\xi_j(t)$ son combinaciones lineales de las variables $\{x_j(t)\}$. Los métodos generales para encontrar estas nuevas variables serán materia de cursos más avanzados. Sin embarga, en muchas situaciones simples no es difícil encontrarlos por simple inspección.

iii) Algunas de las frecuencias ω_j pueden ser nulas, en cuyo caso la ecuación diferencial es simplemente $\ddot{\xi}_j = 0$. Los modos normales de frecuencia nula corresponden a la traslación o rotación del sistema como un todo.

iv) Cada una de estas nuevas variables da origen a un modo normal. Un sistema con N grados de libertad tiene N modos normales (algunos de ellos pueden tener frecuencia nula).

v) La solución de las ecuaciones diferenciales para las variables $\xi_j(t)$ son inmediatas. En total se tendrán $2N$ constantes arbitrarias.

vi) Siempre es posible despejar $x_j(t)$ en función de las funciones $\{\xi_j(t)\}$ (en el lenguaje técnico, el movimiento del sistema, en general, es una suma –superposición– de los distintos modos normales). De esta manera se encuentra la solución general del problema. Las constantes arbitrarias se determinan exigiendo que la solución cumpla con las condiciones iniciales. Hay $2N$ condiciones iniciales: $x_j(0)$ y $\dot{x}_j(0)$ para los $j = 1, 2, \ldots, N$ grados de libertad.

vii) Cuando sólo se excita un único modo normal, todas las partículas se moverán armónicamente y con la misma frecuencia. Cuando se excitan dos o más modos normales es forma simultánea, las partículas no se moverán armónicamente y el movimiento, en general, ni siquiera será periódico.

viii) Frecuentemente, en sistemas no demasiado complejos, es posible no sólo identificar algunos o todos los modos normales, sino que también encontrar las frecuencias respectivas por simple inspección del problema.

Ejemplo: Consideremos la configuración mostrada en la figura 13.8. Las tres masas sólo pueden moverse a lo largo del anillo de radio R. Los resortes, todos con constante de restitución k, también siempre se deforman a lo largo de la circunferencia. Encontraremos todos los modos normales con sus frecuencias.

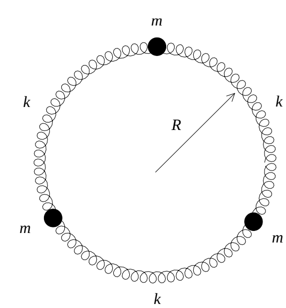

Figura 13.8

El sistema tiene tres grados de libertad y, por lo tanto, existirán tres modos normales. Uno de ellos tiene frecuencia cero y corresponde a una rotación (rígida) uniforme de las tres masas a lo largo del anillo.

Es evidente que otro modo normal de oscilación del sistema es el mostrado en la figura 13.9: una de las tres partículas queda quieta y las otras dos se mueven en sentidos opuestos.

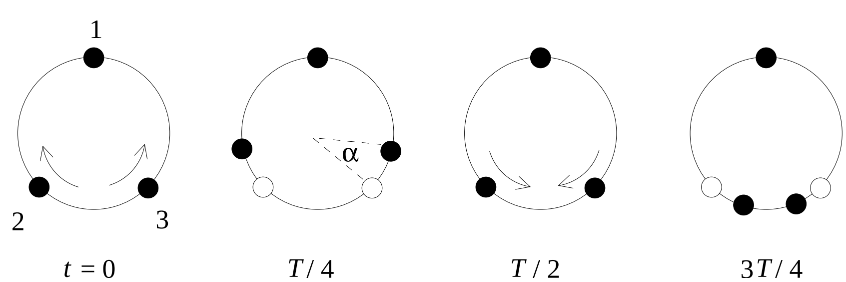

Figura 13.9

No es difícil encontrar la frecuencia angular de este modo. De los resortes que unen las partículas que se mueven, uno se acorta en una magnitud $a = \alpha R$ y el otro se alarga en $2a$;

la fuerza neta sobre la partícula es, por lo tanto, $3ka$. Para la frecuencia de este modo de vibración se obtiene $\omega = \sqrt{3k/m}$.
Otro modo normal se encuentra si la partícula 2 se mantiene quieta y las partículas 1 y 3 oscilan moviéndose en direcciones opuestas (ver figura 13.10). Por supuesto que este modo de oscilación tiene la misma frecuencia que el modo anterior (en el lenguaje técnico se dice que los dos modos son *degenerados*).

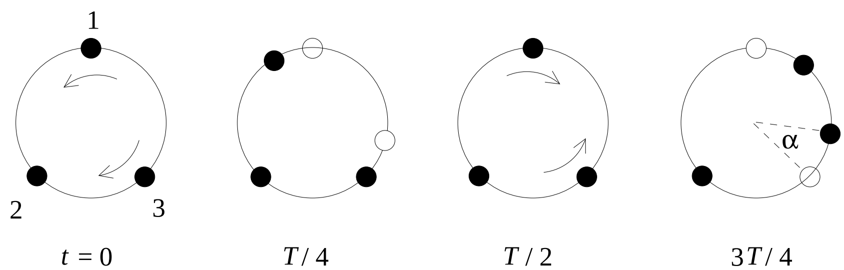

Figura 13.10

Pareciera que existe un cuarto modo, en que la partícula 3 se mantiene quieta y las partículas 1 y 2 oscilan, moviéndose en direcciones opuestas (ver figura 13.11). Efectivamente este también es un modo normal, pero no es uno distinto; en efecto, la superposición de los modos mostrados en las figuras 13.9 y 13.10 generan el modo mostrado en la figura 13.11. En el lenguaje técnico se dice que el modo de la figura 13.11 no es un modo independiente sino que es una combinación lineal de los modos normales mostrados en las figuras 13.9 y 13.10.

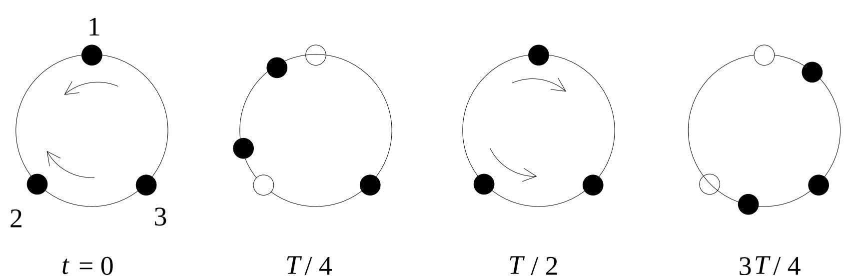

Figura 13.11

13.6. * Modos normales de una cuerda

Consideremos una cuerda de largo L, sin masa, bajo la tensión τ, que al centro tiene adosada una masa m y analicemos el movimiento transversal de la masa en ausencia de gravedad. Sea $u(t)$ el desplazamiento transversal de la masa en función del tiempo. En todo momento supondremos que el ángulo de la cuerdo con la horizontal es pequeño, es decir, que

$$\frac{u(t)}{L/2} = \tan\alpha \simeq \alpha \ .$$

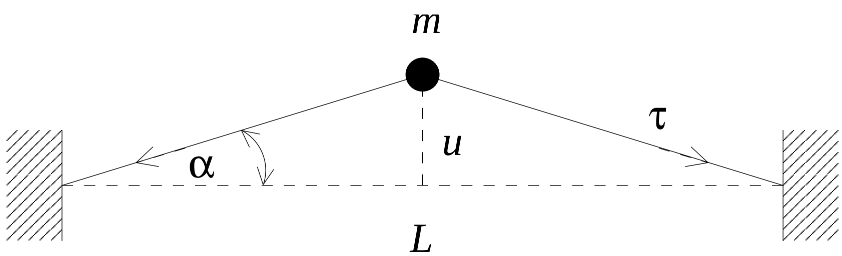

Figura 13.11

Además supondremos que la tensión τ no varía debido a la pequeña elongación que sufre la cuerda cuando está deformada. La fuerza transversal neta sobre la masa m debida a la tensión de la cuerda es

$$F = -2\tau \,\mathrm{sen}\,\alpha \simeq -2\tau\,\alpha \simeq -2\tau \frac{u}{L/2} = \frac{4\tau}{L}\,u \ .$$

La segunda ley de Newton nos da la relación

$$m\ddot{u} = -\frac{4\tau}{L}\,u \ ,$$

o sea,

$$\ddot{u} + \omega_1^2 u = 0 \ ,$$

con

$$\omega_1^2 = \frac{4\tau}{Lm} \ . \tag{13.21}$$

Concluimos que la masa m oscilará armónicamente con frecuencia ω_1.

Consideremos ahora dos masas m adosadas a la cuerda en forma equiespaciada. Este sistema ahora tiene dos grados de libertad y, por lo tanto, tendrá dos modos normales de oscilación: uno en que las dos partículas oscilan en fase y otro en que oscilan en contrafase (ver figura 13.12).

En el modo 1, la fuerza transversal que actúa sobre cada masa es

$$F = -\tau \,\mathrm{sen}\,\alpha = -\tau\,\alpha = \tau \frac{u}{L/3} = -\frac{3\tau}{L} u \ .$$

El desplazamiento de cada masa satisfacerá la ecuación de movimiento (segunda ley de Newton)

$$m\ddot{u} = -\frac{3\tau}{L} u \ ,$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular

$$\omega_1^2 = \frac{3\tau}{Lm} \ . \tag{13.22}$$

En el modo 2, la fuerza transversal que actúa sobre cada masa es

$$F = -\tau \,\mathrm{sen}\,\alpha - \tau \,\mathrm{sen}\,\beta = -\tau\,\alpha - \tau\,\beta = -\tau \frac{u}{L/3} - \tau \frac{2u}{L/3} = -\frac{9\tau}{L} u \ .$$

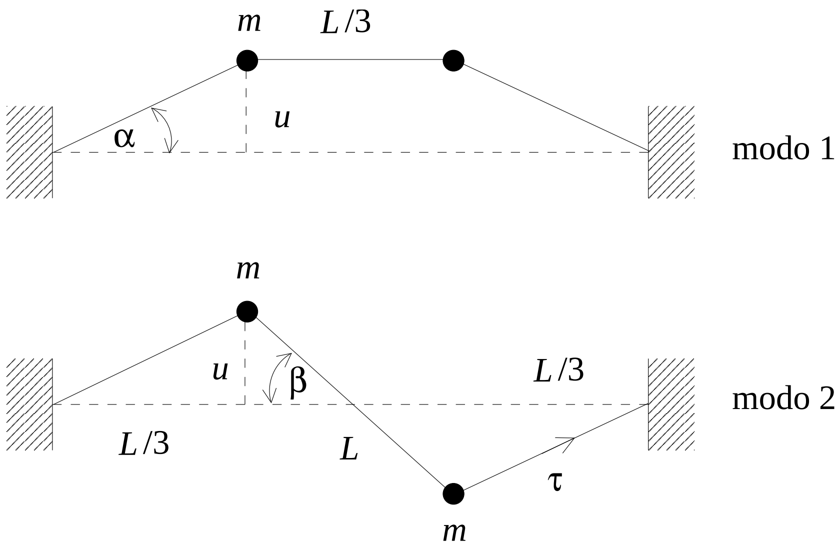

Figura 13.12

La ecuación de movimiento de cada masa (segunda ley de Newton) en este caso es

$$m\ddot{u} = -\frac{9\tau}{L}u \ .$$

Nuevamente es la ecuación de un oscilador armónico, pero ahora con la frecuencia angular

$$\omega_2^2 = \frac{9\tau}{Lm} \ . \tag{13.23}$$

Generalicemos los resultados anteriores y consideremos N masas m adosadas en forma equiespaciada a la cuerda. Definamos el eje $\hat{x}$ a lo largo de la cuerda cuando está en su posición de equilibrio y elijamos el cero coincidiendo con el extremo izquierdo de la cuerda (el otro extremo de la cuerda estará en $x = L$). La posición longitudinal de la masa j será

$$x_j = j\,\frac{L}{N+1} \ . \tag{13.24}$$

El sistema tiene N grados de libertad y por lo tanto existirán N modos normales. En lo que sigue encontraremos los N modos normales con sus frecuencias respectivas. Para ello introduzcamos las N funciones

$$y_\nu(x,t) = u(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{\nu\pi}{L}x\right) \ , \tag{13.25}$$

con $\nu = 1, 2, 3, \ldots, N$.
Consideremos un ν particular (por ejemplo $\nu = 3$) y desplacemos las N partículas transversalmente en una distancia $u_j(t) = y_\nu(x_j, t)$. La figura 13.6 muestra esquemáticamente la situación que se tiene en este caso.
Encontraremos la ecuación de movimiento de la partícula j. Los ángulos que la cuerda al lado izquierdo y derecho de la partícula j forman con la horizontal son

$$\alpha \simeq \frac{u_j - u_{j-1}}{L/(N+1)}$$

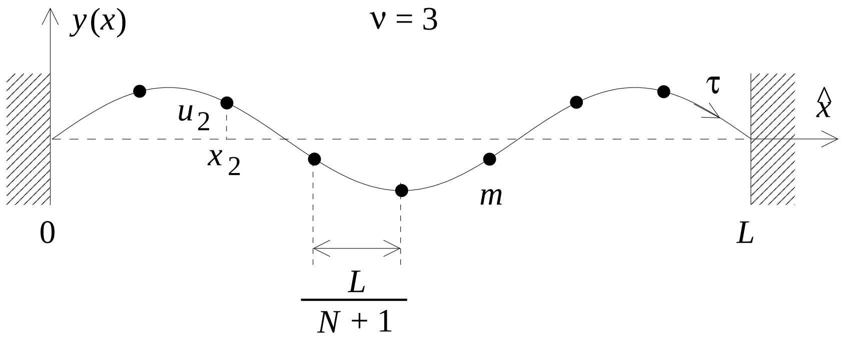

Figura 13.13

y

$$\beta \simeq \frac{u_{j+1} - u_j}{L/(N+1)} \ ,$$

respectivamente (ver figura 13.14).

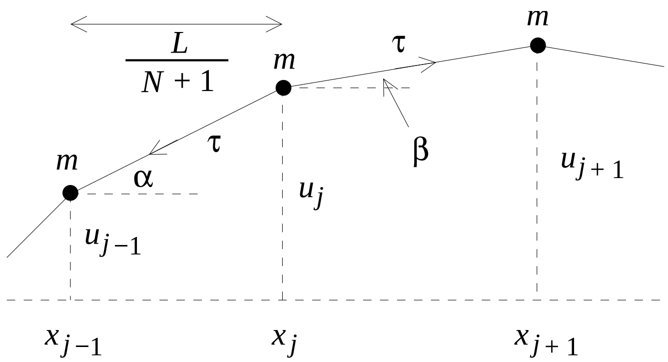

Figura 13.14

La fuerza transversal neta que actúa sobre la partícula j es

$$F = -\tau \text{ sen}\,\alpha + \tau \text{ sen}\,\beta \simeq -\tau(\alpha - \beta) \simeq \tau(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) \, \frac{N+1}{L} \ .$$

La ecuación de movimiento para la partícula j es, por lo tanto,

$$m\ddot{u} = -\frac{\tau(N+1)}{L} \, (2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) \ .$$

Pero $u_j(t) = y_\nu(x_j, t)$, luego

$$\ddot{u}_j = \ddot{u}(t) \text{ sen}\left(\frac{\nu\pi}{L} x_j\right) = \ddot{u}(t) \, \text{sen}\left(\frac{\nu\pi j}{N+1}\right) \ ,$$

$$\begin{aligned} u_{j+1} + u_{j-1} &= u(t) \, \left[\text{sen}\left(\frac{\nu\pi(j+1)}{N+1}\right) + \text{sen}\left(\frac{\nu\pi(j-1)}{N+1}\right)\right] \\ &= 2 \text{ sen}\left(\frac{\nu\pi j}{N+1}\right) \cos\left(\frac{\nu\pi}{N+1}\right) \end{aligned}$$

y

$$2u_j - u_{j+1} - u_{j-1} = 2u(t)\left(1 - \cos\left(\frac{\nu\pi}{N+1}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\pi j}{N+1}\right) .$$

Con estas relaciones la ecuación de movimiento para la partícula j queda

$$m\ddot{u} = -\frac{2\tau(N+1)}{L}\left(1 - \cos\left(\frac{\nu\pi}{N+1}\right)\right) u ,$$

o sea,

$$\ddot{u} + \omega_\nu^2 u = 0$$

con

$$\omega_\nu^2 = \frac{2\tau(N+1)}{mL}\left(1 - \cos\left(\frac{\nu\pi}{N+1}\right)\right) . \tag{13.26}$$

Observe que ésta resulta ser la de un oscilador armónico y que es independiente de j, o sea, todas las masas oscilarán armónicamente con la misma frecuencia. En otras palabras, el movimiento será el de un modo normal de vibración del sistema. Haciendo variar ν se obtienen los distintos modos de vibración.

Ejercicio: Demuestre que la ecuación (13.26), para $N = 1$ (y $\nu = 1$) coincide con (13.21) y que para $N = 2$ (con $\nu = 1$ y 2) coincide con (13.22) y (13.23), respectivamente.

Ejercicio: Demuestre que para enteros $\nu > N$ no se obtienen nuevos modos de oscilación.

A continuación estudiaremos el caso de una cuerda de largo L, pero con una densidad lineal de masa uniforme μ. La masa de tal cuerda es $L\mu$.
Para obtener la cuerda con masa tomaremos el límite $N \to \infty$ y $m \to 0$ de manera que la masa total de la cuerda sea $L\mu$, o sea,

$$L \to \infty \qquad \text{y} \qquad m \to 0 \qquad \text{tal que} \quad Nm = L\mu$$

En este límite, para las frecuencias ω_ν, se tiene

$$\omega_\nu^2 = \frac{2\tau N^2}{L(Nm)}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\nu^2\pi^2}{N^2}\right)\right) = \frac{\tau\nu^2\pi^2}{\mu L^2} ,$$

o sea,

$$\omega_\nu = \nu\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

Esta última ecuación da las frecuencia de los modos normales de una cuerda de largo L, densidad lineal μ y bajo tensión τ. Hay infinitos modos normales, todos ellos múltiplos enteros de una frecuencia fundamental

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} .$$

13.7. Problemas

1. La aceleración de la gravedad varía con la posición sobre la Tierra debido a su rotación y a que el globo terráqueo no es exactamente esférico. Esto fue descubierto por primera vez en el siglo XVII, cuando se observó que un reloj pendular, cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, perdía alrededor de 90 s por día cerca del Ecuador.

   a) Demuestre que una pequeña variación de g produce una pequeña modificación del período del péndulo T dado por
   $$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} \; .$$

   b) ¿Cuánto deberá variar g para lograr explicar la diferencia del período de un péndulo entre París y el Ecuador?

2. Una masa de 2 kg se sujeta a un resorte de constante de fuerza $k = 10$ N/m que descansa sobre una superficie horizontal lisa. Otra masa de 1 kg se desliza a lo largo de la superficie hacia la primera a 6 m/s.

   a) Hallar la amplitud de la oscilación si las masas realizan un choque perfectamente inelástico y ambas quedan adosadas al resorte. ¿Cuál es el período de oscilación?

   b) Hallar la amplitud y período de la oscilación si el choque es perfectamente elástico.

   c) En cada caso encuentre una expresión para la posición x de la masa sujeta al resorte en función del tiempo, admitiendo que el choque se produce en el instante $t = 0$.

3. Un resorte de constante de fuerza $k = 100$ N/m cuelga verticalmente de un soporte. En su extremo inferior (que se encuentra a una distancia l_0 del techo) se engancha una masa de 0.5 kg, que luego (en el instante $t = 0$) se suelta, desde el reposo. La masa comenzará a oscilar en torno a un nuevo punto de equilibrio x_0.

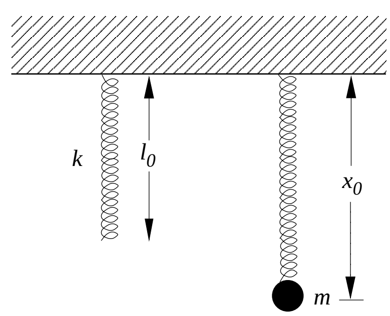

Figura 13.15

   a) Encuentre el nuevo punto de equilibrio x_0.

   b) ¿Con qué período oscilará la masa m alrededor de x_0?

   c) Encuentre la energía cinética y el potencial en función del tiempo. (Especifique claramente los orígenes usados para especificar las energías potenciales.)

   d) Encuentre la velocidad máxima que llegará a tener la masa m mientras oscila.

4. En una cuenca esférica de radio r se desliza una masa m_1 una pequeña distancia s_1, siendo $s_1 \ll r$. Una segunda masa m_2 se desplaza en sentido opuesto hasta una distancia $s_2 = 3s_1$ (también $s_2 \ll r$).

    a) Si las masas se dejan libres en el mismo instante y resbalan sin roce, ¿en dónde se encontrarán?

    b) Si la colisión es elástica, ¿cuándo volverán las masas nuevamente a estar en reposo y en qué lugar?

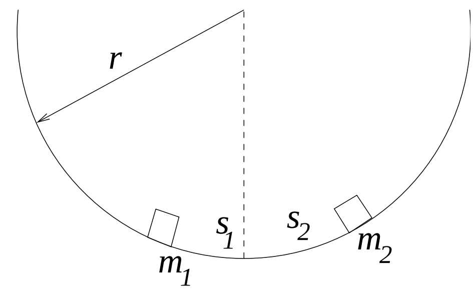

Figura 13.16

5. Un bloque de madera se desliza sobre una superficie horizontal lisa. El bloque está sujeto a un resorte que oscila con período de 0.3 s. Un segundo bloque descansa en su parte superior. El coeficiente de roce estático entre los dos bloques es $\mu_s = 0{,}25$.

    a) Si la amplitud de oscilación es 1 cm, ¿se deslizará el bloque situado encima?
    b) ¿Cuál es la mayor amplitud de oscilación para la cual no se deslizará el bloque de encima?

6. Una variable $x(t)$ se comporta armónicamente. Si en $t = 0$, la posición, la velocidad y aceleración vienen dadas por $x(0) = 1$ cm, $v(0) = 2$ cm/s y $a(0) = -4$ cm/s^2, respectivamente. Encuentre la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ para $t = 6$ s.

7. La figura 13.17 muestra un tubo de sección constante A y forma de U, abierto a la atmósfera. El tubo está lleno hasta el nivel indicado por una línea a trazos con un líquido incompresible que fluye a través del tubo con un rozamiento despreciable. La longitud total de la columna de líquido es L. Demuestre que si se hace descender la superficie del líquido en uno de los brazos de la U y luego se deja libre, el nivel del fluido oscilará armónicamente alrededor de su posición de equilibrio con un período dado por $T = 2\pi\sqrt{L/2g}$.

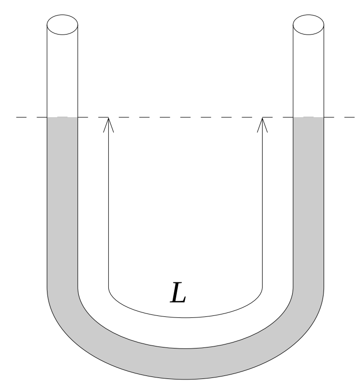

Figura 13.17

8. Encuentre (aproximadamente) el menor valor de la frecuencia angular que podría tener un oscilador armónico $x(t)$, si lo que se conoce es que $x(0) = 0$, $v(1\text{ s}) = 2$ cm/s y $a(2\text{ s}) = 4$ cm/s^2.

9. Suponga que una variable $x(t)$ varía armónicamente con una frecuencia angular $\omega_0 = 2\text{ s}^{-1}$.

    a) Encuentre la posición x y la velocidad v en el instante $t = 3$ s si $x(0) = 1$ cm y $x(1\text{ s}) = 1$ cm.

b) Repita lo mismo pero con las condiciones de borde $x(1\text{ s}) = 1$ cm y $v(1\text{ s}) = 4$ cm/s.

c) Repita lo mismo pero ahora con las condiciones de borde $x(0) = 2$ cm y $v(2\text{ s}) = -4$ cm/s.

10. Se cuelga una masa M de un resorte y se pone en movimiento oscilatorio vertical, con una amplitud de 7 cm. La frecuencia de las oscilaciones es de 4 Hz. Al llegar M a la posición más baja, se le coloca encima una pequeña piedrecita. Supongamos que la masa de la piedrecita es tan pequeña que no tiene mayor efecto sobre la oscilación.

    a) ¿A qué distancia por encima de la posición de equilibrio perderá contacto la piedrecita con la masa M?

    b) ¿Cuál es la velocidad de la piedrecita cuando se separa de la masa M?

11. Un péndulo simple de 50 cm de largo cuelga del techo de un vagón que se acelera con una aceleración $a = 7$ m/s^2 en dirección horizontal. Encuentre el período del péndulo para pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio.

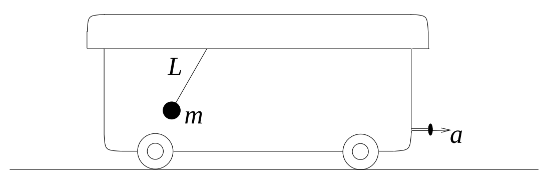

Figura 13.18

12. Considere una variable $x(t)$ que satisface la ecuación de un oscilador armónico atenuado. Suponga que $\omega_0 = 1$ rad/s y que se tienen las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 2$ cm, $v(0) = 0$ cm/s.

    a) Encuentre la solución si $\eta = 2{,}2\omega_0$. Grafique la solución en el intervalo $0 < t < 20$ s.

    b) Repita lo mismo de la parte (a), pero con $\eta = \omega_0$.

    c) Repita lo anterior, pero ahora con $\lambda = 0{,}5\omega_0$.

    d) Repita lo de las partes (a), (b) y (c), con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ cm y $v(0) = 50$ cm/s.

13. Considere dos péndulos idénticos acoplados. Las ecuaciones de movimiento en ese caso vienen dadas por:

$$m\ell\ddot{\theta}_1 = -mg\theta_1 - \lambda(\theta_1 - \theta_2)$$
$$m\ell\ddot{\theta}_2 = -mg\theta_2 - \lambda(\theta_1 - \theta_2)$$

La constante λ acopla los dos osciladores armónicos. Si $\lambda = 0$ (o sea, si el acoplamiento se hace cero) cada péndulo oscila independientemente del otro.

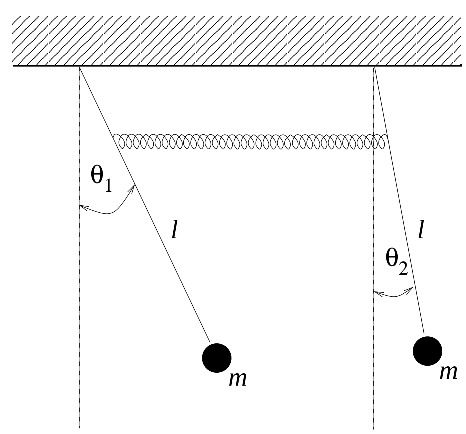

Figura 13.19

a) Introduzca las nuevas variables

$$\eta_1(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$$
$$\eta_2(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$$

y demuestre que éstas varían armónicamente con las frecuencias

$$\omega_0 = \sqrt{g/\ell} \qquad \text{y} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Gamma}\ ,$$

respectivamente, donde $\Gamma = 2\lambda/(m\ell)$.

b) Demuestre que la solución general se puede escribir de la forma

$$\theta_1(t) = \frac{1}{2}[A\cos(\omega_0 t + \alpha) + B\cos(\omega_1 t + \beta)]$$
$$\theta_2(t) = \frac{1}{2}[A\cos(\omega_0 t + \alpha) - B\cos(\omega_1 t + \beta)]$$

Las constantes A, B, α y β se determinan con las condiciones de borde.

c) Sea $\omega_0 = 1$ rad/s y $\Gamma = 0{,}1$ s^{-2}. Encuentre la solución para el caso en que $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = \dot\theta_1(0) = \dot\theta_2(0) = 0$. Grafique $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.

d) Repita lo anterior, pero para el caso en que $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ y $\dot\theta_1(0) = \dot\theta_2(0) = 0$.

e) Repita lo anterior, pero para el caso en que $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$ y $\dot\theta_1(0) = \dot\theta_2(0) = 0$.

f) Para el caso (c) el movimiento de cada péndulo consiste en un movimiento oscilatorio cuya amplitud también varía periódicamente. Sea Ω la frecuencia angular de la variación periódica de la amplitud. Encuentre Ω.

14. *Péndulo físico*: Considere un objeto de masa M, que puede oscilar alrededor de un eje que lo atraviesa. Sea I el momento de inercia para rotaciones alrededor de ese eje y ℓ la distancia entre el eje y el centro de masas del objeto. Encuentre el período T para pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. Demuestre que un péndulo simple equivalente, es decir, uno que tenga el mismo período, tiene un largo

$$\ell_0 = \frac{I}{m\ell}\ .$$

15. Considere la configuración mostrada en la figura 13.20. Las cuatro masas sólo pueden moverse a lo largo del anillo de radio R. (Los resortes también siempre se deforman a lo largo de la circunferencia.) Encuentre la frecuencia de los modos normales de oscilación.

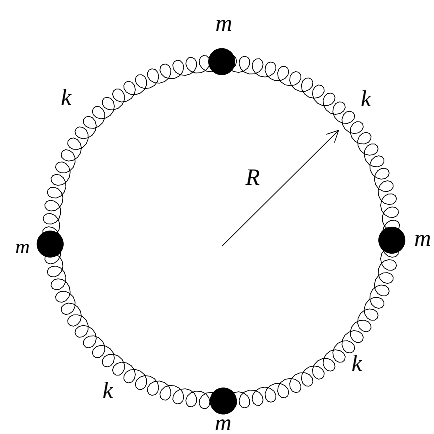

Figura 13.20

16. Considere una masa m resbalando sin roce (en presencia de la aceleración de gravedad $-g\hat{y}$) a lo largo de un perfil de la forma

$$y(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 \ ,$$

con $\alpha = 1 \text{ m}^{-2}$ y $\beta = 3/2 \text{ m}^{-1}$. Grafique $y(x)$. Si la masa realiza pequeñas oscilaciones en torno al mínimo local, encuentre el período T de tal movimiento.

17. Una masa de 2 kg oscila colgada de un resorte de constante de restitución $k = 400$ N/m. La constante de amortiguamiento es $\eta = 1 \text{ s}^{-1}$. El sistema es forzado por una fuerza sinusoidal de amplitud $F_0 = 10$ N y frecuencia angular $\omega = 10$ rad/s.

    a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones en el régimen estacionario?
    b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia?
    c) Encuentre la amplitud de las vibraciones en la resonancia.

18. Considere una masa $m = 50$ g que oscila sujeta a un resorte de constante de restitución k. Suponga que hay algún dispositivo que atenúa las oscilaciones con una fuerza que es proporcional a la velocidad (o sea, estamos en presencia de un oscilador armónico atenuado). Con un cronómetro se mide el "período de oscilación"; éste resulta ser igual a 2.1 s.

    a) ¿Cuánto valen ω_0 y λ?
    b) ¿En cuánto disminuirá la amplitud máxima de oscilación entre dos ciclos consecutivos?

19. Una masa $m = 1$ kg cuelga de un resorte de constante de restitución $k = 200$ N/m. La constante de amortiguamiento es $\eta = 1 \text{ s}^{-1}$. En el instante $t = 0$ comienza a actuar sobre la masa una fuerza $F = F_0 \sin(\omega t)$, con $F_0 = 2$ N y $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$.

    a) Si $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$, encuentre $x(t)$ para $t = 1$ s, $t = 100$ s y $t = 1000$ s.
    b) Encuentre la energía disipada en un ciclo cuando el oscilador se encuentra en el régimen estacionario.

20. Una masa m descansa sobre una mesa horizontal lisa (sin roce). El movimiento de la masa está restringido a desplazamientos a lo largo del eje $\hat{x}$. Sobre la masa actúa una fuerza $\vec{F}(t) = F_0 \sin(\omega t)\hat{x}$.

    a) Encuentre la aceleración $a(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la masa, si en el instante $t = 0$ se encontraba detenida.
    b) Encuentre la posición $x(t)$ si además se sabe que $x(0) = 0$. Demuestre que el movimiento es armónico con una amplitud $A = F_0/(m\omega^2)$.
    c) La masa ahora se sujeta adicionalmente a un resorte de constante de restitución k. (La orientación del resorte también es a lo largo del eje $\hat{x}$). Compare el movimiento que tiene ahora con el que tenía cuando no estaba unida al resorte.

21. (Péndulo de torsión)
Suponga que un extremo de un alambre metálico está firmemente adosado del cielo de una pieza y del otro cuelgan dos esferas sólidas tal como se mustran en la figura adjunta. Al girar las esferas con el alambre en un ángulo θ (alrededor del eje formado por el alambre), el alambre ejercerá un torque τ que hará que las esferas retornen a la posición de equilibrio. El torque que ejerce el alambre es

$$\vec{\tau} = -\eta\vec{\theta}$$

donde τ es una constante (que depende del largo, diámetro y material de que está hecho el alambre).

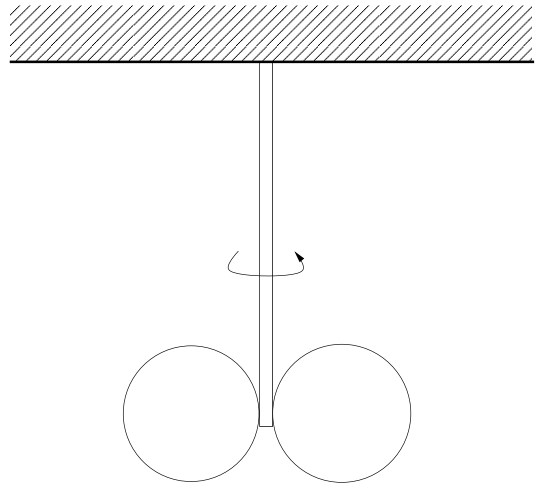

Figura 13.21

Para este problema suponga que $\eta = 1250$ g cm^2/s^2. Si las esferas son de aluminio ($\rho_{\rm Al} = 2,7$ g/cm^3), ¿qué diámetro deben tener las esferas para que el período sea exactamente de un segundo? (El momento de inercia de una esfera sólida de masa M y radio R para una rotación alrededor de un eje que pasa por su centro es $I = 2mR^2/5$).

22. Una masa de $m = 0.5$ kg, después de caer una distancia $h = 5$ m, se adosa a un resorte (largo) de constante $k = 2$ kg/s^2. El sistema resultante viene gobernado por la ecuación de movimiento

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) + 2\omega_0 \dot{z}(t) = 0$$

o sea, corresponde a un oscilador armónico amortiguado crítico. La magnitud $z(t)$ mide la posición de la masa m respecto al punto de equilibrio y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema.

La solución general está dada por la relación

$$z(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

donde A y B son constantes que se ajustan con las condiciones iniciales.

(Para los cálculos numéricos que siguen, use para la aceleración de gravedad el valor $g = 10$ m/s^2)

a) Determine A y B usando las condiciones iniciales.

b) Sea t_0 el instante en que el resorte tiene su máxima compresión. Evalúe t_0. (Elija el cero del tiempo en el instante en que la masa colisiona con el resorte).

c) Haga un gráfico esquemático de la función $z(t)$.

d) ¿Cuál será la energía total disipada por el amortiguador?

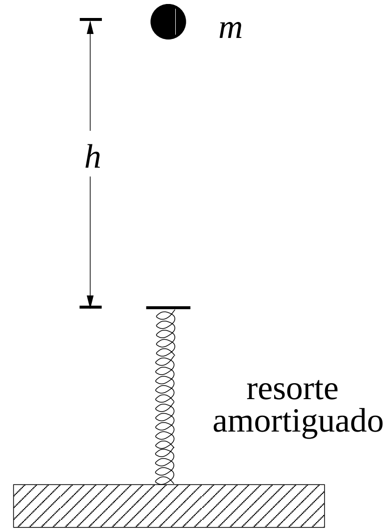

Figura 13.22

23. Considere dos cilindros que giran rápidamente en sentidos contrarios tal como se muestra en la figura adjunta. Sobre estos cilindros se coloca un tablón de masa M y densidad uniforme. Sea d la distancia entre los dos cilindros y sea μ el coeficiente de roce cinemático entre el tablón y los cilindros. Demuestre que el movimiento del tablón es armónico. Encuentre el período del movimiento.

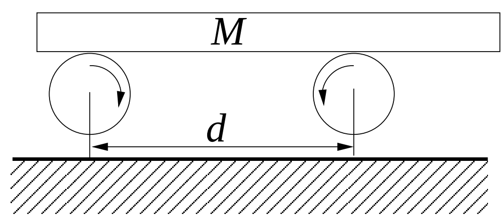

Figura 13.23

24. Considere dos masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de largo natural ℓ_o y constante de restitución k. Supongamos que el movimiento de ambas masas está restringido a lo largo de la recta que los une.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las posiciones de las masas m_1 y m_2, respectivamente.

a) Demuestre que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales acopladas

$$m_1\ddot{x}_1(t) = k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0]$$
$$m_2\ddot{x}_2(t) = -k[x_2(t) - x_1(t) - \ell_0]$$

b) Definamos las variables $\eta_0(t)$ y $\eta_1(t)$ por

$$\eta_0(t) = \frac{m_1x_1(t) + m_2x_2(t)}{m_1 + m_2}$$
$$\eta_1(t) = x_2(t) - x_1(t) - \ell_0$$

Demuestre que las variables $\eta_0(t)$ y $\eta_1(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales (desacopladas)

$$\ddot{\eta}_0 = 0$$
$$\ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 = 0$$

con

$$\omega^2 = k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

c) Demuestre que la solución más general del problema se puede escribir de la forma

$$x_1(t) = A + Bt - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\ell_0 + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$$
$$x_2(t) = A + Bt + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\ell_0 + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$$

d) Definamos ω_0 y α por $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y $\alpha = m_2/m_1$. Exprese ω en términos de ω_0 y α. ¿Cuánto vale ω en términos de ω_0 si $\alpha \to \infty$? ¿Coincide esto con lo que usted intuía? ¿Cuáanto vale ω en términos de ω_0 si $\alpha = 1$?

e) Sea $\ell_0 = 8$ cm y $\omega_0 = 1$ rad/s y $\alpha = 1$ (o sea, $m_1 = m_2$). Encuentre la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 10$ cm y $v_1(0) = v_2(0) = 0$. Grafique $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en un mismo gráfico para el intervalo $0 < t < 15$ s.

f) Repita lo mismo de la parte (e) pero para las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 8$ cm, y $v_1(0) = 4$ cm/s y $v_2(0) = 0$.

g) Repita la parte (f) pero con $\alpha = 10$.

h) Repita la parte (f) pero con $\alpha = 0{,}1$.

25. Considere tres partículas de masa m que sólo pueden moverse a lo largo del eje $\hat{x}$ y están unidas por resortes de largo natural ℓ_0 y constantes de restitución k (ver figura).

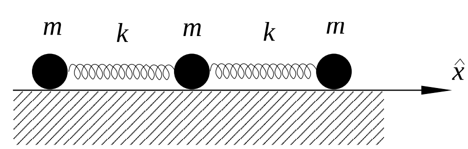

Figura 13.24

Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ las posiciones de las tres masas en función del tiempo.

a) Demuestre que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales acopladas

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell_0)$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_3 + x_1 - 2x_2)$$
$$m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3 + \ell_0)$$

b) Intoduzca las nuevas variables definidas por

$$\eta_0 = (x_1 + x_2 + x_3) \quad , \quad \eta_1 = (x_1 - x_3) + \ell_0 \quad \text{y} \quad \eta_2 = (x_1 - 2x_2 + x_3).$$

Demuestre que estas nuevas variables satisfacen las ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\ddot{\eta}_0 = 0 \quad , \quad \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = 0,$$

con $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$. ¡Interprete!

c) Demuestre que la solución general al problema se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A + Bt + C\cos(\omega_1 t + \delta_1) + D\cos(\omega_2 t + \delta_2) - \ell_0 \\ x_2(t) &= A + Bt - 2D\cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ x_1(t) &= A + Bt - C\cos(\omega_1 t + \delta_1) + D\cos(\omega_2 t + \delta_2) + \ell_0 \end{aligned}$$

Las constantes A, B, C, D, δ_1 y δ_2 se eligen de manera que la solución satisfaga las condiciones de borde. Convénzase de que, en general, las condiciones de borde determinan a las seis constantes.

d) Suponga que $\ell_0 = 5$ cm y $\omega_1 = 1$ rad/s. Encuentre la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = -8$ cm, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 8$ cm, $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$. Grafique en un mismo gráfico $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$ en el intervalo $0 < t < 15$ s.

e) Repita lo mismo que la parte (d), con las condiciones iniciales $x_1(0) = -4$ cm, $x_2(0) = -2$ cm, $x_3(0) = 6$ cm y $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$

f) Repita lo mismo que la parte (d), con las condiciones iniciales $x_1(0) = -8$ cm, $x_2(0) = 0$ cm, $x_3(0) = 5$ cm y $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$

g) Repita lo mismo que la parte (d), con las condiciones iniciales $x_1(0) = -5$ cm, $x_2(0) = 0$ cm, $x_3(0) = 5$ cm, $v_1(0) = v_2(0) = 0$ y $v_3(0) = 3$ cm/s.

26. Considere un resorte, de constante de restitución k, que conecta dos masas, M y m restringidas a moverse a lo largo del eje $\hat{x}$. Encuentre la frecuencia de oscilación de tal sistema.

27. * Suponga que la energía potencial de cierta molécula diatómica viene razonablemente bien desvrita por la expresión

$$U(r) = \frac{1}{2}U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \right]$$

con $U_0 = 2$ eV (eV es una unidad de energía usada en la física atómica llamada “electron-volt”) y $r_0 = 0{,}5$ nm (1 nm=10^{-9} m).

a) Demuestre que $r = r_0$ es la separación de equilibrio de la molécula.

b) Grafique $U(r)$ en el rango 0,4 nm$< r <$ 0,7 nm.

c) Desarrolle el potencial $U(r)$ en torno a $r = r_0$, es decir exprese $U(r)$ de la forma

$$U(r) = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2} c_2 s^2 + \ldots$$

donde $s = r - r_0$ y encuentre los coeficientes c_0, c_1 y c_2.

d) Convénzase de que la fuerza para pequeños desplazamientos de los átomos respecto a su posición de equilibrio (que ocurre para $s = 0$) viene dada por $F(s) = -ks$. Evalúe k.

e) Si las masas de los átomos son $m_1 = m_2 = m$, ¿cuál será la frecuencia vibracional de la molécula?

28. Considere cuatro masas iguales unidas por resortes de constante de restitución k tal como se muestra en la figura. Las masas sólo se pueden mover en el plano en que se ubican. Usando argumentos de simetría, describa algunos de los modos normales de vibración y encuentre la frecuencia de ellos. ¿Cuaántos modos normales tiene este sistema? ¿Cuántos de ellos tienen frecuencia cero?

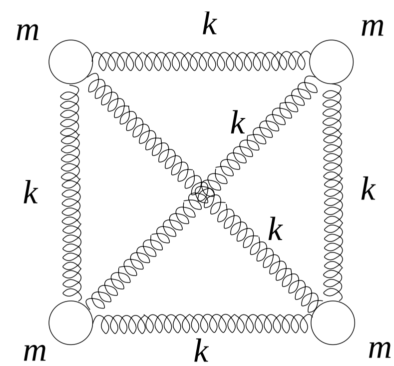

Figura 13.25

29. Un reloj "de los abuelos" se basa en un péndulo de longitud 1 m. El reloj se atrasa 1 segundo por día. ¿En cuánto se debe corregir la longitud del péndulo?

30. Un resorte de constante de resitución $k = 2$ dina/cm y largo en reposo ℓ_0 se encuentra adosado firmemente a la base de un recipiente (ver figura). El recipiente está lleno de agua.

Suponga ahora que en el instante $t = 0$ se le adosa al extremo superior una esfera sólida homogénea de radio $R = 1$ cm, hecha de un material más liviano que el agua, y que la esfera luego se suelta (o sea, en el instante $t = 0$ la longitud del resorte es ℓ_0 y la esfera se suelta en reposo). Se observa que la esfera realiza oscilaciones armónicas de amplitud $A = 0{,}8$ cm.

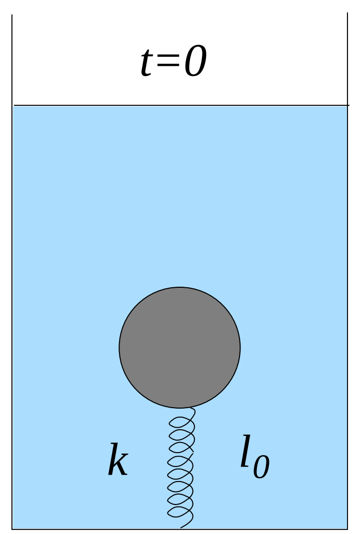

Figura 13.26

a) Encuentre la densidad ρ de la esfera.

b) Encuentre el período T del movimiento armónico que la esfera realiza una vez que se suelta.

(Al desarrollar el problema ignore los efectos debidos al roce viscoso entre la esfera y el agua).

31. El péndulo de la figura está formado por una barra de masa despreciable y longitud L. La masa del extremo inferior se mantiene unido a un resorte de constante k dispuesto horizontalmente y fijo, por su otro extremo a una pared. Cuando el péndulo se encuentra en posición vertical la longitud del resorte es la de su largo natural. Calcule la frecuencia ω del sistema. Verifique su resultado analizando el límite de algunos sistemas conocidos.

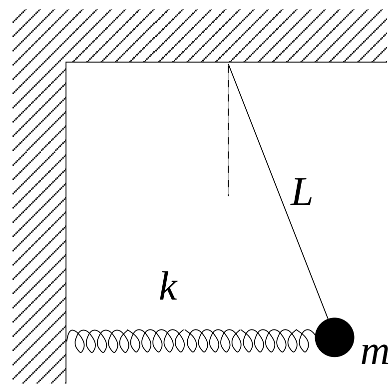

Figura 13.27

32. Considere un cilindro de radio R y densidad ρ, con una perforación cilíndrica de radio $R/2$, tal como se muestra en la figura. El cilindro rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal realizando pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio. Encuentre el período de las oscilaciones.

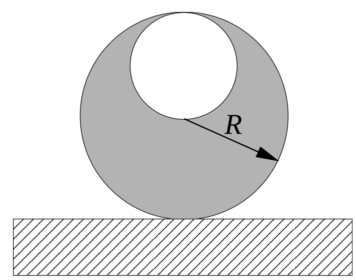

Figura 13.28

13.8. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 8

La forma general de la solución para un oscilador armónico simple es

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

La condición $x(0) = 0$ implica que $A = 0$, luego queda

$$x(t) = B\sin(\omega t).$$

Derivando se obtiene

$$v(t) = \omega B\cos(\omega t) \quad \text{y} \quad a(t) = -\omega^2 B\sin(\omega t)$$

Aplicando las condiciones de borde se encuentra que

$$v(1) = \omega B \cos(\omega) = 2$$

y

$$a(2) = -\omega^2 B \sin(2\omega) = -2\omega^2 B \sin(\omega)\cos(\omega) = 4.$$

Formando el cuociente entre las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\sin(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

La figura 13.29 muestra un gráfico del lado izquierdo y derecho de esta ecuación. La intersección de menor frecuencia ocurre para $\omega \sim 3{,}43\ \mathrm{s}^{-1}$.

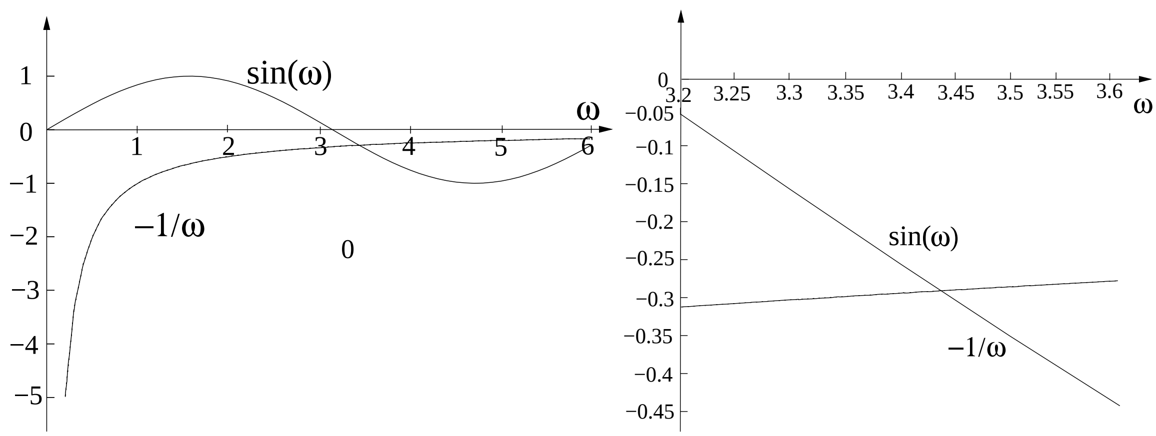

Figura 13.29

Solución al problema 15

El sistema tiene 4 grados de libertad y por lo tanto existen cuatro modos normales. Sean $\theta_j, j = 1{,}2{,}3{,}4$ los cuatro ángulos de las cuatro masas respecto a sus posiciones de "equilibrio". Los cuatro modos normales se encuentran por simple inspección del problema.

i) Uno de los modos normales tiene frecuencia nula ($\omega_1 = 0$) y corresponde a la rotación uniforme y simultánea de las cuatro masas a lo largo del anillo, o sea, $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_3(t) = \theta_4(t) = \omega t$.

ii) Otro modo normal se obtiene si las partículas 1 y 3 se mantienen en reposo y las partículas 2 y 4 oscilan con la misma amplitud pero en sentido contrario, o sea $\theta_1(t) = \theta_3(t) = 0$, $\theta_2(t) = -\theta_4(t)$, $\forall t$. Al desplazar la masa 2 en un ángulo α uno de los resortes se comprime y el otro se alarga en una magnitud $R\alpha$. La fuerza sobre la masa será igual a $2kR\alpha$, luego la frecuencia de este modo normal será $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$.

iii) Otro modo normal se obtiene si las partículas 2 y 4 se mantienen en reposo y las partículas 1 y 3 oscilan con la misma amplitud pero en sentido contrario. Por simetría este modo tiene la misma frecuencia que el modo normal anterior ($\omega_3 = \sqrt{2k/m}$).

iv) El cuarto modo normal se obtiene si las cuatro masas oscilan con la misma amplitud, 1 y 3 en la misma dirección y 2 y 4 en la dirección contraria, es decir, $\theta_1(t) = \theta_3(t) = -\theta_2(t) = -\theta_4(t) =$, $\forall t$. Al desplazarse una masa en un ángulo α, uno de los resortes se acorta y el otro se alarga en una magnitud $2R\alpha$. La fuerza sobre la masa será, por lo tanto, igual a $4kR\alpha$. Luego la frecuencia de oscilación es $\omega_2 = \sqrt{4k/m}$.

La figura 13.30 muestra esquemáticamente el movimiento de las cuatro masas para los cuatro modos normales.

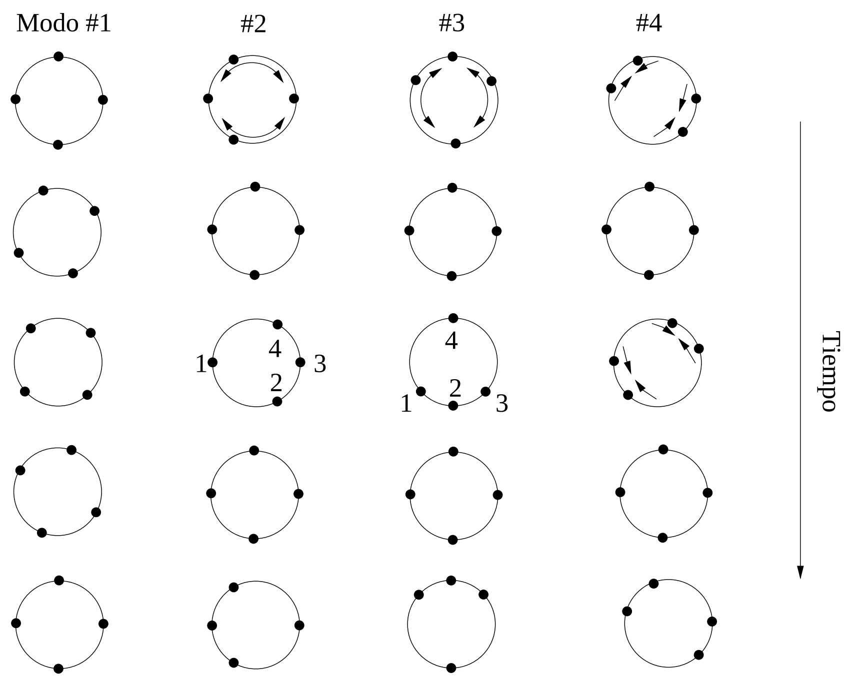

Figura 13.30

Solución al problema 21

Al girar el alambre con las esferas en un ángulo $\vec{\theta} = \theta\hat{z}$ el torque es

$$\vec{\tau} = -\eta\theta\hat{z}.$$

El torque genera un cambio del momento angular del sistema. Se tiene

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right)\hat{z} = I\ddot{\theta}\hat{z},$$

donde I es el momento de inercia de las dos esferas para rotaciones alrededor del eje $\hat{z}$ (que coincide con el alambre).
De las dos ecuaciones anteriores se deduce que

$$I\ddot{\theta} = -\eta\theta$$

o sea,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

con $\omega_0^2 = \eta/I$. Para el período T se obtiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\eta}}.$$

Usando el teorema de Steiner, para el momento de inercia se encuentra la expresión

$$I = 2\left[\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right] = \frac{14}{5}mR^2 = \frac{14}{5}\frac{4}{3}\pi R^3\rho R^2 = \frac{56}{15}\pi\rho R^5.$$

Usando esto en la expresión anterior para el período y despejando R se encuentra

$$R^5 = \frac{15}{56}\frac{T^2}{4\pi^3}\frac{\eta}{\rho} = 0,99986 \quad \text{cm}^5.$$

O sea, con esferas de diámetro igual a 1 cm, este péndulo tendrá un período de 1 segundo.

Solución al problema 22

a) Sea x_0 la magnitud que el resorte se comprimirá respecto a su largo natural una vez que llegue al equilibrio. Se tiene que

$$kx_0 = mg$$

o sea,

$$x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0,5 \cdot 10}{2} \quad \text{m} = 2,5 \quad \text{m}.$$

La velocidad v_0 de la masa cuando choca con el resorte viene dada por

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Por consiguiente, las condiciones iniciales son

$$x(0) = x_0 = 2,5 \quad \text{m} \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = -v_0 = -10 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La frecuencia angular natural del sistema es $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\frac{1}{\text{s}}$.

Derivando la expresión

$$z(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

se obtiene

$$\dot{z}(t) = (B - A\omega_0 - B\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.$$

Evaluando estas expresiones en $t = 0$ se obtiene

$$z(0) = A \quad \text{y} \quad \dot{z}(0) = B - A\omega_0.$$

Usando las condiciones iniciales se encuentra para A y B los valores

$$A = x_0 = 2,5 \quad \text{m}$$

y

$$B = A\omega_0 + \dot{z}(0) = (2,5 \cdot 2 - 10) \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} = -5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) La velocidad $\dot{z}(t)$ es nula cuando $(B - A\omega_0 - B\omega_0 t) = 0$. De esta relación se deduce que ello ocurre en el instante

$$t_o = \frac{1}{\omega_0} - \frac{A}{B} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2,5}{(-5)}\right) \text{s} = 1 \quad \text{s}.$$

c) La figura 13.31 muestra el gráfico de la posición $z(t)$ en función del tiempo.

d) Del cambio de energía potencial $\Delta U = mg(h + x_0)$,

$$\frac{1}{2}kx_o^2$$

queda como energía potencial del resorte; el resto se disipa. Por lo tanto, la energía disipada es

$$\begin{aligned} Q &= mgh + mgx_0 - \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2,5)^2\right] \quad \text{Joule} = 31,25 \quad \text{Joule} \end{aligned}$$

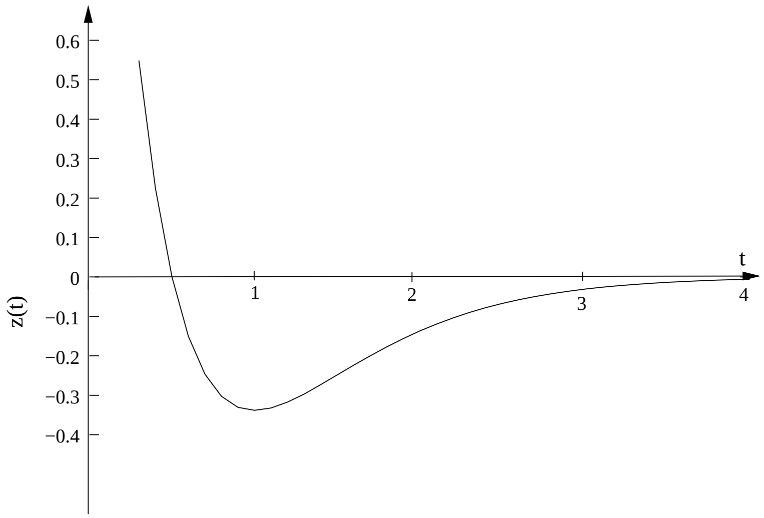

Figura 13.31

Solución al problema 30

Una vez que se adosa la esfera al resorte el nuevo punto de equilibrio del resorte sube en una magnitud D que se puede evaluar de la relación

$$kD = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_0 - \rho)g,$$

donde $\rho_0 = 1$ g/cm^3 es la densidad del agua. Observe que la amplitud de la oscilación coincidirá con D, o sea, $D = A =$ 0,8 cm. Despejando ρ se encuentra

$$\rho = \rho_0 - \frac{3kA}{4\pi R^3 g}.$$

Ahora $k/g = 2$ dina$/g = 2$ gramos, luego

$$\rho = \left[1 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 0,8}{4\pi}\right] \quad \text{g/cm}^3 = 0,618 \quad \text{g/cm}^3.$$

El período del movimiento viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

donde $m = 4\pi R^3\rho/3 = 4\pi$ 0,618/3 g = 25,9 g. Para el período se encuentra $T =$ 1,75 s.