FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Ejercicio 3 FI1002-2

Por Eugenio Quintana

P1)

Se sabe que el periodo de un péndulo de largo L es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Así $L = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8\left(\frac{60}{2\pi}\right)^2 [m] \approx 890[m]$ (Un péndulo de casi 1[km]; igual es lógico piensen que el período es de 1 minuto y son pequeñas oscilaciones)

P2)

Existe Roce Estático el cual no realiza Trabajo ya que no produce un desplazamiento pues el punto de contacto está en reposo instantáneo.

P3)

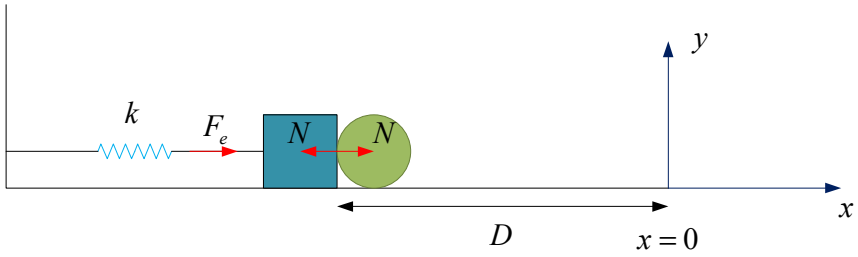
b) Aumenta

En la situación de equilibrio se tiene que la fuerza neta sobre el objeto es cero, o sea la fuerza elástica se compensa con el peso. Así $k(x_0 - l_0) = mg \Rightarrow x_0 = l_0 + \frac{mg}{k}$. O sea el resorte está estirado una distancia $\frac{mg}{k}$ de su largo natural. Así $E_i = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}$. (Tomando como referencia la posición de equilibrio x_0) Si se estira el resorte en una distancia Δx de su equilibrio la energía es

$$E_f = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + \Delta x\right)^2 - mg\Delta x = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + mg\Delta x + \frac{1}{2}k\Delta x^2 - mg\Delta x = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$\Rightarrow \quad E_f = E_i + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \quad \Rightarrow \quad E_f > E_i$$

P4)



Como nos interesa solo el comportamiento en el eje x, solo se escriban las fuerzas que actúan en este eje.

DCL sobre el bloque:

$m\ddot{x} = -kx - N$ (1)

DCL sobre la bolita:

$m\ddot{x} = N$ (2)

Reemplazando (2) en (1)

$2m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{2m}x$

Ecuación que tiene una solución de la forma $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$. Como se sabe que $x_0 = -D$ y que $v_0 = 0$, entonces $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = x_0 = -D$, $\theta_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right) = 0$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$. Con esto $x(t) = -D\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t\right)$. Reemplazando este resultado en la ecuación (2) se tiene que $N(t) = mD\frac{k}{2m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t\right) = \frac{Dk}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t\right)$. En el momento en el cual se eyecta la bolita se tiene que $N = 0$ (Condición de despegue), o sea cuando la función coseno se anula $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$.

Dicho esto de otra manera $N(t = t_1) = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{2m}}t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Luego de la eyección la fuerza neta sobre la bolita es cero, por lo que la solución de su ecuación de movimiento equivale a encontrar la velocidad con la que sale eyectada. Como $v(t) = \dot{x}(t) = D\sqrt{\frac{k}{2m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t\right)$ evaluando la velocidad en el tiempo de eyección se tiene que $v_{bolita} = ctte = v(t = t_1) = D\sqrt{\frac{k}{2m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t_1\right) = D\sqrt{\frac{k}{2m}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = D\sqrt{\frac{k}{2m}}$.

Finalmente la ecuación de movimiento después de la eyección del bloque es $m\ddot{x} = -kx$, cuya solución es de la forma $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$. En este caso $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Las condiciones iniciales del bloque solo vienen dadas por lo que sucede con la posición en t_1. Reemplazando en las ecuaciones encontradas se tiene que $x_0 = x(t = t_1) = 0$ y $v_0 = v(t = t_1) = D\sqrt{\frac{k}{2m}}$. Así $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = \frac{v_0}{\omega_0} = D\sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{D}{\sqrt{2}}$ y

$\theta_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right) = \arctan\left(-\frac{v_0}{0}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Así $x_{bloque}(t) = \frac{D}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{D}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, para $t > t_1$.