Solución Problema 1, Control 2, FI1002, Primavera 2009

1. En el DCL de la barra, $\vec{R}$ es la reacción del apoyo en la pared, que no realiza torque c/r al punto de apoyo (rótula). Para obtener una configuracin de equilibrio imponemos $\Sigma\vec{F} = 0$ y $\Sigma\vec{\tau} = 0$. Calculamos suma de torques c/r a la rótula para eliminar la fuerza de reacción $\vec{R}$ desconocida:

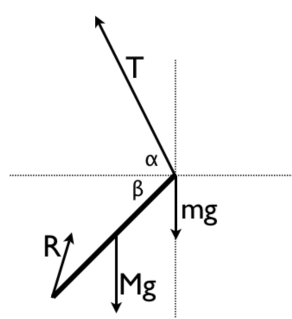
$$TL\sin(\alpha+\beta) = Mg\frac{L}{2}\sin(\pi/2-\beta) + mgL\sin(\pi/2-\beta) \equiv (T^*/2)L$$

donde todo el lado derecho es conocido, y definimos $T^* = 2(M/2+m)g\cos\beta = \sqrt{2}(M/2+m)g$ para $\beta = \pi/4$ de modo de simplificar la nomenclatura. Luego la tensión en función del ángulo α es

$$T = \frac{T^*/2}{\sin(\alpha+\beta)}$$

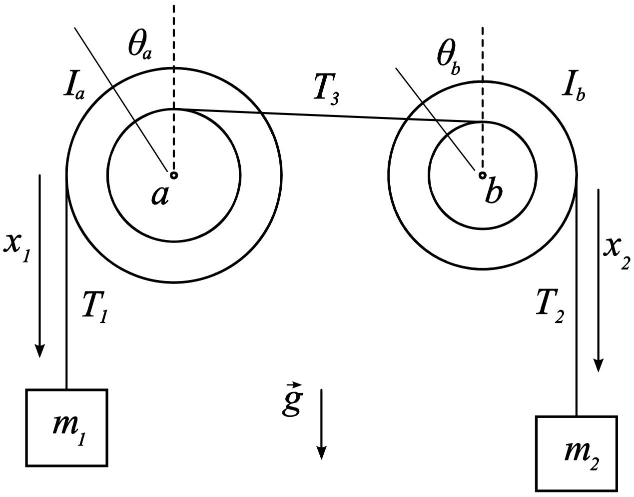
El ángulo puede variar entre $\alpha_0 = 0$ (cuerda horizontal) y casi $\alpha_1 = \pi/2$ (cuerda vertical atada sobre pared infinita). O bien el límite inferior puede llegar a ser $\alpha_0 = -\beta$ si bajan de la horizontal, ambas opciones son correctas.

Dado $\beta = \pi/4$, el valor máximo de $\sin(\alpha+\beta) = 1$ para $\alpha = \pi/4$, y el valor mínimo de $\sin(\alpha+\beta) = 1/\sqrt{2}$ para $\alpha = 0, \pi/2$. Luego el valor mínimo de la tensión es $T(\alpha = \pi/4) = T^*/2$ y el valor máximo es $T(\alpha = 0, \pi/2) = \sqrt{2}T^*/2$. Si ustedes utilizaron $\alpha_0 = -\pi/4$, entonces la tensión tiende a infinito en ese límite.



2. Si la cuerda se corta en $T_{max} = T^*$, entonces se debe cumplir $\sin(\alpha+\beta) = 1/2$ para lo cual se necesita $\alpha+\beta = (\pi/6, 5\pi/6)$, de donde $\alpha_{min} = -\frac{\pi}{12} < 0$, $\alpha_{max} = \frac{7\pi}{12} > \pi/2$. Es decir, dicha cuerda resiste para el intervalo adecuado de $0 < \alpha < \pi/2$.

<u>**Control2 Problema2**</u>



a) Torque alrededor de los cada deje de las poleas

$$I_a\ddot{\theta}_a = R_a T_1 - r_a T_3$$

$$I_b\ddot{\theta}_b = -R_b T_2 + r_b T_3$$

b) Sumatoria de fuerzas sobre las masas que cuelgan

c) $m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2$$

d) Usando los ángulos de la figura, las velocidades tangentes en la cadena deben ser iguales, de modo que:

$$\ddot{\theta}_a r_a = \ddot{\theta}_b r_b$$

$$\ddot{\theta}_a R_a = \ddot{x}_1$$

$$\ddot{\theta}_b R_b = -\ddot{x}_2$$

e) Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(m_1 r_b R_a - m_2 r_a R_b) R_a r_b}{r_b^2(I_a + m_1 R_a^2) + r_a^2(I_b + m_2 R_b^2)}$$

Luego, la posición en función del tiempo será:

$$x_1(t) = x_0 + \frac{1}{2}\ddot{x}_1 t^2$$

Control n2 problema3

a) Momento de inercia antes del choque. Solo la ruleta es considerada y como la unión de cuatro barras de largo r y masa m, por tanto:

$$I_{ruleta\ c/r\ O} = 4*(Mr^2/3) = 4Mr^2/3$$

Momento de inercia después del choque. La ruleta más la masa localizada en un extremo de los brazos de la ruleta, por tanto:

$$I_{ruleta+partícula\ c/r\ O} = 4Mr^2/3 + mr^2 = 4Mr^2/3 + Mr^2/3 = 5Mr^2/3$$

b) Dado que el momento de inercia del sistema es una cantidad conservada podemos comparar ambas cantidades para obtener la velocidad angular.

El momento de inercia antes de la colision

$$\boldsymbol{L}_{antes} = \boldsymbol{L}_{ruleta} + \boldsymbol{L}_{particula} = I_{ruleta\ c/r\ O}\,\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = (-4Mr^2\omega_1/3 + r\ mv\ cos\theta)\ \boldsymbol{k}$$

Donde el momento angular de la partícula apuntan hacia fuera de la hoja y la velocidad angular hacia dentro de la hoja.

Y el momento angular después de la colisión:

$$\boldsymbol{L}_{despues} = \boldsymbol{L}_{ruleta+particula} = I_{ruleta+partícula\ c/r\ O}\,\boldsymbol{\omega}_2 = (5Mr^2\omega_2/3)\ \boldsymbol{k}$$

De $\boldsymbol{L}_{antes} = \boldsymbol{L}_{despues}$, y a partir de la las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$-4Mr^2\omega_1/3 + rmv\ cos\theta = 5Mr^2\omega_2/3 \ \Rightarrow\ \omega_2 = (vcos\theta - 4r\omega_1)/\ 5r$$

y el sentido de giro de la ruleta después del choque esta dado por la condición:

$$(vcos\theta - 4r\omega_1) >< 0 \Rightarrow \quad cos\theta < 4r\omega_1/v\ ,\ invierte\ el\ sentido\ de\ giro$$

$$cos\theta > 4r\omega_1/v\ ,\ mantiene\ el\ sentido\ de\ giro$$

Nota1: las cantidades *r, v,* ω_1 (todas escalares) son definidas positivas.

c) La diferencia de velocidades angulares es:

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 - (vcos\theta - 4r\omega_1)/5r = (9r\omega_1 - vcos\theta)/5r.$$

Esta cantidad es máxima si $vcos\theta$ es mínima, es decir para $\theta=90.$

d) La masa total del sistema después de la colisión es $4M/3$ ($4m$). Y la posición del centro de masas después de la colisión:

$$CM = CM_{ruleta} + CM_{partìcula} = 0 + (m\mathbf{r}/4m) = \mathbf{r}/4\ .$$

Por tanto la velocidad del centro de masas después de la colisión:

$$\mathbf{V}_{CM} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}/4 = \pm\boldsymbol{\theta}\ (vcos\theta - 4r\omega_1)/20$$

Nota2: El signo depende del sentido de giro después de la colisión.
Nota3: Es igualmente válido si ellos entregan solo el módulo de la velocidad olvidando la dirección.

e) La "perdida" de energía cinética es:

$$\Delta E_K = E_{K,\ después} - E_{K,\ antes} = I_{ruleta+partícula\ c/r\ O}\,\omega_2^2/2 - (I_{ruleta\ c/r\ O}\,\omega_1^2/2 + mv^2/2)$$
$$= (5\omega_2^2 - 4\omega_1^2)Mr^2/3 - mv^2/2 = mvcos\theta(vcos\theta - 8r\omega_1)/5 - 4m\omega_1/5 - mv^2/2$$

Nota4: La solución de esta sección esta completa hasta este punto. No es necesario demostrar explícitamente que esta diferencia de energía es no nula.